ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1969 г. Выпуск 37

УДК 62-5:621.391.

УТОЧНЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ПРОСТОТЫ

Б.П.Гаврилко, Н.Г.Загоруйко, К.Ф.Самохвалов

В работе [I] была предложена гипотеза простоты [x)], положенная в основу закона предсказания. Применительно к решающим функциям этот закон формулируется следующим образом:

<u>Простейшая решающая функция, с заданной степенью точности распознающая обучающую выборку, будет наиболее точно распознавать и контрольную выборку</u>.

Трудность проблемы состоит в том, как определить понятие "простота", какую структуру или какую решающую функцию считать "наипростейшей". Понятие простоты либо остается пока на интуитивном уровне, либо формулируется на языке конкретного автомата, реализующего некоторую решающую функцию. В работе [3], например, понятие простоты определялось на языке машины Тьюринга, а в работе [I] – на языке П-машины.

Было бы желательно так определить решающую функцию и меру её сложности, чтобы решающая функция была инвариантной относительно допустимых преобразований шкал, в которых замеряются признаки, а мера сложности – инвариантной относительно всех способов программирования и не зависящей от языка того или иного конкретного автомата.

Язык теории моделей, групп и инвариантов, кажется, позволяет выполнить эти требования [4,5]. Приведем некоторые све

[x)] Интересные примеры из истории естествознания, подтверждающие распространенность гипотезы простоты среди естествоиспытателей, приводятся в работе [2].

дения из теории моделей.

§ I. Математическое моделирование эмпирических зависимостей

Нужда в математических моделях возникает тогда, когда работать с математическими объектами представляется более удобным, чем непосредственно с тем материалом, который ими моделируется. Модель оправдывает свое назначение, если всякому эмпирическому факту, который нас интересует, соответствует некий математический факт, относительно которого заведомо известно, что если он имеет место, то имеет место и соответствующий ему эмпирический факт. Только это и важно при выборе модели. Во всем остальном модель может быть произвольной.

Так как мы намерены рассматривать теорию, в основном, как алгоритм для вычислительной машины, нас будут интересовать числовые модели.

То обстоятельство, что в рассматриваемой задаче построения решающих функций мы заранее фиксируем исходное признаковое пространство, равносильно соглашению рассматривать лишь те эмпирические объекты и эмпирические зависимости на множестве этих объектов, которые обнаруживаются с помощью приборов, предназначенных для измерения выбранных признаков. Множество всех объектов, различаемых между собой по данным признакам, и совокупность указанных выше зависимостей между этими объектами будем называть эмпирической системой с отношениями. В более общем случае системой с отношениями называется некоторая последовательность вида

$$\mathcal{A} = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle,$$

где A - непустое множество объектов, называемое областью системы с отношениями, а $R_1, \dots, R_n$ - отношения в системе A [4].

Так как множество эмпирических объектов A конечно (из-за конечной точности измерительных приборов), то и эмпирическая система с отношениями всегда конечна.

Если $S = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ есть n-членная последовательность положительных целых чисел, то система с отношениями $\mathcal{A} = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ является системой типа S, если для каждого $i = 1, \dots, n$ отношение R_i есть m_i-местное отношение. Две системы с отношениями подобны, если они одного типа.

Рассмотрим теперь важное понятие изоморфизма двух подобных систем с отношениями.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B, Q_1, \dots, Q_n \rangle$ - подобные системы с отношениями. $\mathcal{B}$ называется изоморфным образом $\mathcal{A}$, если f - взаимно однозначное отображение A на B такое, что для каждого $i = 1, \dots, n$ и каждой последовательности $\langle a_1, \dots, a_{m_i} \rangle$ элементов из A $R_i(a_1, \dots, a_{m_i})$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $Q_i(f(a_1), \dots, f(a_{m_i}))$. Вместо того, чтобы называть $\mathcal{B}$ изоморфным образом $\mathcal{A}$, мы будем часто говорить, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны. Числовая система с отношениями *) $\mathcal{M}$ называется моделью эмпирической системы с отношениями $\mathcal{A}$, если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}$ изоморфны.

Используя указанный выше произвол при выборе модели, мы для каждой эмпирической системы с отношениями будем брать числовую систему с отношениями, которая строится по следующему методу.

Множество A эмпирических объектов взаимно однозначно отображается на произвольное множество M натуральных чисел (т.е. нумеруется). При этом отображении отношения $R_1, \dots, R_n$ в множестве M индуцируют соответствующие им отношения $Q_1, \dots, Q_n$, в результате чего создается модель

$$\mathcal{M} = \langle M, Q_1, \dots, Q_n \rangle .$$

Не все возможные свойства этой модели соответствуют свойствам положенной в её основу эмпирической системы с отношениями. Свойствам эмпирической системы соответствуют те и только те свойства модели, которые инвариантны относительно группы автоморфизмов этой модели. **)

Таким образом, на языке нашей модели эмпирическая система с отношениями $\mathcal{A}$ вполне определяет группу автоморфизмов модели. Отметим, что в силу конечности системы $\mathcal{A}$ группа G_0 модели $\mathcal{M}$ всегда конечна.

§ 2. Мера сложности структуры

Для предварительных целей мы считаем вполне достаточным ограничиться случаем только двух образов.

*) Числовой системой с отношениями называется система с отношением, у которой область A является некоторым множеством действительных чисел.

**) Известно (см., например, [5]), что совокупность всех автоморфизмов произвольной системы с отношениями есть группа.

Пусть соотношения

$$O_1 \subseteq M \quad \text{и} \quad O_2 \subseteq M \qquad (O_1 \cap O_2 = \emptyset)$$

задают обучающую выборку двух непересекающихся образов. Мы можем считать эту выборку такой системой с отношениями, модель которой имеет более широкую группу автоморфизмов (G_1), чем группа G_0 модели $\mathcal{M}$. Расширение группы автоморфизмов происходит за счет того, что здесь помимо автоморфизмов группы G_0 допускаются ещё и все возможные перестановки объектов внутри каждого из двух образов.

Напомним (см. [I]), что цель обучения состоит в выборе методов распространения классификации, заданной обучающей выборкой, на большую часть числового массива M. Это значит, что требуется, отправляясь от классов O_1 и O_2, найти такие классы O_1' и O_2', что $O_1 \subseteq O_1' \subseteq M$, $O_2 \subseteq O_2' \subseteq M$ и $O_1' \cap O_2' = \emptyset$.

Помимо элементов обучающей выборки в классы O_1' и O_2' входят некоторые новые элементы множества M, каждому из которых соответствует некоторый эмпирический факт или объект. Распознавание принадлежности конкретного эмпирического объекта тому или иному образу будет теперь осуществляться по такому правилу: если этому объекту соответствует число из множества O_i', то он принадлежит i-му образу. Отсюда ясно, что надежность распознавания (или успех предсказания) будет целиком зависеть от того, какими именно элементами из M классы O_i будут дополнены до O_i'. Мы считаем, что при выборе наилучшего варианта расширения классов O_1 и O_2 следует руководствоваться описанным в [I] постулатом простоты. Исходя из него, тот вариант считается лучшим, при котором классы O_i' обладают наиболее простой структурой. Полученные таким путем классы O_i' будем называть наипростейшим обобщением классов O_i.

В этих терминах закон предсказания, основанный на гипотезе простоты, эквивалентен следующему утверждению: природа эмпирической реальности такова, что из всех общих методов предсказания будущих экспериментов наиболее успешным в большинстве случаев будет метод, основанный на наипростейшем обобщении результатов прошлых экспериментов.

Применительно к случаю, когда допускается некоторая доля ошибок исходной классификации, закон предсказания формулируется так: простейшая теория, объясняющая известные факты с заданной степенью точности, является и наиболее адекватной для предсказания неизвестных фактов.

Для уточнения критерия простоты напомним, что обучающую выборку в заданном признаковом пространстве можно рассматривать как такую систему с отношениями, модель которой имеет группу автоморфизмов (G_1), являющуюся расширением группы автоморфизмов исходной модели $\mathcal{M}$. Точнее, эта группа автоморфизмов G_1 есть подгруппа группы всех возможных перестановок множества M *), порожденная **) всеми автоморфизмами модели $\mathcal{M}$ (группа G_0) и всевозможными перемещениями элементов множества M внутри каждого класса O_i.

Для некоторых вариантов классов O_1' и O_2' можно построить группу автоморфизмов G_1' по тому же правилу, что и группу G_1 для классов O_1 и O_2 ***). Известно [5], что чем шире группа преобразований, тем меньше количество характеристик, инвариантных относительно этих преобразований.

Если рассматривать число независимых инвариантов как меру сложности структуры классов O_i', то наипростейшей структуре будет соответствовать группа G_1', максимально широкая среди групп, не содержащих преобразований, переставляющих элементы из одного класса в другой.

§ 3. Выбор простейшей решающей функции

Приведем некоторые предварительные соображения об алгоритме выбора простейшей решающей функции.

Представим себе, что мы имеем возможность просмотреть все варианты разделения признакового пространства (или соответствующего ему множества натуральных чисел M) на k непустых непересекающихся подпространств (подмножеств). ****) Отберем из них те варианты разделения, которые удовлетворяют следующим требованиям: а) число k равно числу распознаваемых образов; б) в каждом подмножестве имеются представители обучающей выборки только одного из k образов.

Для каждого из отобранных таким способом вариантов деле-

*) Т.е. симметрическая группа S_n, где n - число элементов множества.

**) "Порожденная" в смысле [6] .

***) Исключение составляют варианты, при которых $O_1' \cap O_2' \neq \emptyset$.

****) В силу конечной точности измерения признаков пространство дискретно и количество вариантов его разделения на конечное число частей конечно.

ния можно определить число независимых инвариантов, сохраняющихся при допустимых преобразованиях шкал, в которых измеряются признаки, точно так же, как и построить группу автоморфизмов G_1', не содержащую преобразований, переставляющих элементы из одного подмножества (класса) в другой.

Тот вариант разделения, которому соответствует максимально широкая группа G_1', и следует выбрать в качестве наилучшего, так как он удовлетворяет требованию наипростейшей структуры образов. Этот вариант разделения и фиксируется в качестве простейшей решающей функции $\mathcal{D}$.

Может оказаться, что множество простейших решающих функций состоит более чем из одного элемента (несколько обобщений равной минимальной сложности). В этом случае для каждого элемента множества M следует провести "голосование" и впоследствии относить элемент к тому образу, за принадлежность к которому "проголосовало" большинство простейших решающих функций.

Сказанное выше свидетельствует о принципиальной возможности построения решающих функций, удовлетворяющих критерию простоты. Описанный здесь алгоритм, сводящийся к полному перебору, для большинства задач будет слишком громоздким. Практически приемлемый алгоритм поиска простейшей решающей функции представляет собой предмет дальнейших исследований.

§ 4. Заключение

Если на базе этой схемы удастся построить общую теорию распознавания образов, то она будет обладать следующими достоинствами:

I. Поскольку мы имеем дело только с конечными группами, то очевидно, что эта общая теория может рассматриваться как алгоритм, существование которого заведомо обеспечено.

2. Предложенный групповой подход позволяет утверждать, что отнесение каждого конкретного эмпирического объекта к тому или иному классу не зависит от условностей, связанных с представлением эмпирических данных в числовом виде.

3. Определение "простоты структуры" не опирается на ту или иную концепцию алгоритма (или автомата), вследствие чего мы имеем дело с индуктивной, а не с дискриптивной простотой [2].

Другими словами, такой постулат простоты может рассматриваться в качестве гипотезы об эмпирической реальности, а не о языке, которым эта реальность описывается.

В числе задач, которые предстоит ещё решить на пути построения теории распознавания, стоит задача распространения описанного выше подхода на более сложные случаи (в частности, на случай "пересекающихся" образов), уточнение определений "образ", "таксон" и т.д. на теоретико-групповом языке, поиск оптимального сочетания противоречивых требований между точностью и сложностью описания классов.

Может случиться, что строгий алгоритм построения решающих функций окажется слишком громоздким и мы будем вынуждены обратиться к его упрощенным эвристическим вариантам, аналогичным тем, которыми мы все давно пользуемся. Но тогда мы сможем быть уверенными, что ничего лучшего при заданных ограничениях ресурсов нельзя сделать в принципе.

Литература

I. Н.Г. ЗАГОРУЙКО, К.Ф. САМОХВАЛОВ. Природа проблемы распознавания образов. – Вычислительные системы. Труды ИМ СО АН СССР, вып. 36, 1969.

2. Е.А. МАМЧУР, Н.Ф. ОВЧИННИКОВ. Принципы простоты и симметрии. "Природа", № 6, 1968.

3. R.I. SOLOMONOFF.A.Formal Theory of Inductive Inference. "Inform. and Control". March 1964 (part I),Iune 1964 (part II

4. П.СУПЕС, Дж. ЗИНЕС. Основы теории измерений. В кн. "Психологические измерения", Изд-во "Мир", М., 1967.

5. М.И. КАРГАПОЛОВ, Ю.И. МЕРЗЛЯКОВ, В.Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ. Основы теории групп, часть I, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1968.

6. Б.И. ПЛОТКИН. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., 1966.

Поступила в редакцию
13 января 1969 года