

УДК 681.14: 621.01

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Ю.С.Завьялов

Проектирование сложных машин (летательных аппаратов, судов, автомобилей и т.п.) и технологических процессов можно разделить на два основных этапа: 1) нахождение принципиальной схемы объекта и 2) выбор оптимального или близкого к нему варианта схемы.

Первый этап основывается на всем объеме знаний той или иной отрасли техники и предшествующем опыте проектирования. Он связан с выработкой новых идей и представлений и в настоящее время остается функцией человека. Автоматизация его с помощью вычислительной техники пока не может быть осуществлена достаточно эффективно, хотя работы в этом направлении ведутся в рамках эвристического программирования [1].

Второй этап представляет собой перебор по некоторому правилу (или даже случайно) различных вариантов схемы и выбор оптимального варианта. При ручном проектировании поиск осуществляется либо путем приближенных оценочных расчетов, либо на какой-нибудь физической модели и заканчивается испытанием опытного образца изделия или технологического процесса. Эта трудоемкая работа, как правило, поддается автоматизации и может быть поручена электронным вычислительным машинам (ЭВМ) [1,2]. Ниже обсуждаются подобного рода задачи, возникающие при проектировании и технической подготовке производства в машиностроении, и намечаются пути их решения с помощью универсальных вычислительных систем.

§ I. Характерные задачи, связанные с проектированием форм деталей и агрегатов

Необходимым этапом проектирования является создание форм агрегатов (поверхности летательных аппаратов, корпуса судов, кузова автомобилей и т.п.), отдельных сложных деталей, а также технологической и сборочной оснастки.

При разработке проектов вручную используется плазовошаблонный метод. Создание формы конструкции состоит в проектировании двух взаимно-перпендикулярных наборов плоских сечений (плазов) и их увязке в пространственной схеме. Таким образом получается опорная сеть линий на поверхности, которую дополняют уже на стадии технологической подготовки производства. В ряде случаев узлы сетки приходится варьировать, чтобы выполнить условия гладкости, отражающие требования гидрозеродинамики и эстетические взгляды конструктора. Такой процесс увязки очень трудоемок и занимает при разработке, например, самолета несколько месяцев работы нескольких десятков инженеров и техников.

При машинном проектировании в соответствии с указанными случаями возникают две задачи:

1) Дать математическое описание поверхности, заданной дискретным набором ее точек. Это — задача интерполирования, состоящая в решении систем линейных уравнений.

2) По заданной схеме, где строго определены лишь некоторые элементы — размеры, построить поверхность, удовлетворяющую условиям гладкости. Это — задача интерполирования со сглаживанием, сводящаяся к задачам математического программирования.

После того, как будут удовлетворительно решены обе указанные задачи, можно выполнить многие другие работы.

3) При компоновке агрегатов, например, фюзеляжа самолета с крыльями, килем, и другими частями, требуется находить линии пересечения поверхностей; расчет обшивки состоит в определении поверхности, эквидистантной заданной, расчет конструктивных элементов (шпангоутов, стрингеров) связан с вычислением длин линий на поверхности, углов между ними; раскрой панелей для последующей штамповки приводит к задачам о геодезических линиях и т.д. Все это задачи прикладной геометрии.

4) Подготовка информации для изготовления деталей на станках с программным управлением состоит в выборе способа обработки, вычислении траекторий режущего инструмента относительно заготовки, скоростей резания.

Решением перечисленных задач на ЭВМ приходится заниматься большинству конструкторских организаций и предприятий авиационной, судостроительной, автомобильной промышленности и других отраслей. Из советских исследований отметим, как наиболее полные, работы Е.Б. Рабинского [3], выполненные применительно к авиационному, и Ю.Л. Кеткова [4] для судостроительной промышленности.

С проблемой формообразования связан целый ряд других вопросов, возникающих при проектировании новой машины.

5) Задача оптимального размещения оборудования (плоских фигур на плоской области или тел в пространственной области) представляет задачу математического программирования, которая еще ожидает своего решения в достаточно общем случае.

6) Точное знание формы тел необходимо для физических расчетов (гидрозеродинамического, теплового и прочностного). Последние суть краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

При современном уровне вычислительной техники можно ставить и последнюю задачу проектирования.

7) Промоделировать летные испытания аппарата, ходовые испытания судна и т.п. Здесь задача состоит в исследовании решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. И хотя никакая математическая модель не может отразить всей сложности физического явления, тем не менее на многие вопросы можно ответить без изготовления и испытания физической модели или опытного образца изделия.

Проанализируем с точки зрения машинной реализации задачи 1 и 2. Прежде всего отметим, что объем исходной информации в них порядка 10^4 чисел, а окончательной информации 10^5 чисел. По объему же вычислений задачи не сравнимы. Если в задаче 1 он составляет 10^6 операций, то в задаче 2 в разных постановках только для расчета плоской кривой, а не поверхности требуется выполнить 10^5 – 10^7 операций. Если провести сглаживание двух наборов плоских сечений, как при плазовом методе проектирования, то придется выполнить до 10^7 – 10^9 операций. В точной постановке задачи для поверхности количество операций достигает 10^9 – 10^{12} .

При подготовке информации для станков с программным управлением (задача 4) приходится произвести до 10^8 операций. Характерной чертой этой задачи, как, впрочем, и других, связанных с воспроизведением поверхностей, является большой объем информации (порядка 10^7 чисел), выводимой на управляющие устройства станка или чертежного автомата.

Каждая из задач типов 5-7 для своей реализации потребует примерно $10^8 - 10^{10}$ операций.

Заметим также, что все перечисленные задачи эффективно (по времени) могут решаться, если информация о поверхности будет находиться в оперативной памяти ЭМ, для чего требуется 10^5 ячеек. Если учесть ещё память, необходимую непосредственно для решения задачи, то приходим к желаемой оперативной памяти порядка $10^5 - 10^6$ ячеек.

Наконец, заметим, что все рассмотренные здесь задачи допускают для своего решения построение таких алгоритмов, которые можно разбить (распараллелить) на независимые блоки - на промежуточных стадиях решения задачи. Подобные алгоритмы называются **параллельными** [5] (гл.7). Для задачи I параллельный алгоритм построен нами в работе [17]. Другие задачи, в частности, 2,6,7, относятся к уже рассмотренным с этой точки зрения типовым задачам [5,8].

Подводя итог сказанному, можно сделать вывод, что для эффективного решения задач проектирования и технической подготовки производства нужны вычислительные средства с производительностью не менее 10^5 операций в секунду, объемом оперативной памяти $10^5 - 10^6$ ячеек и внешней памятью на 10^7 слов. Применение менее мощных вычислительных средств хотя и возможно в ряде случаев, но при решении сложных задач ставит ограничения на их размерность, точность результатов и значительно увеличивает время решения.

§ 2. Вычислительные системы как средство автоматизации проектно-конструкторских работ

Наиболее полным выражением идеи использования вычислительной техники для инженерных работ в настоящее время являются автоматизированные системы (АС) проектирования и технической подготовки производства, созданные за последние пять-шесть лет в США, Англии и ещё в ряде стран.

АС представляет собой сложный комплекс, состоящий из мощной ЭМ, специальных устройств двухсторонней связи человека с машиной и математического обеспечения (рис.1).

К числу специальных устройств связи относятся:

а) средства оперативной связи в виде индикатора на электронно-лучевой трубке со световым пером или иным указателем с большой скоростью вывода и изменения информации;

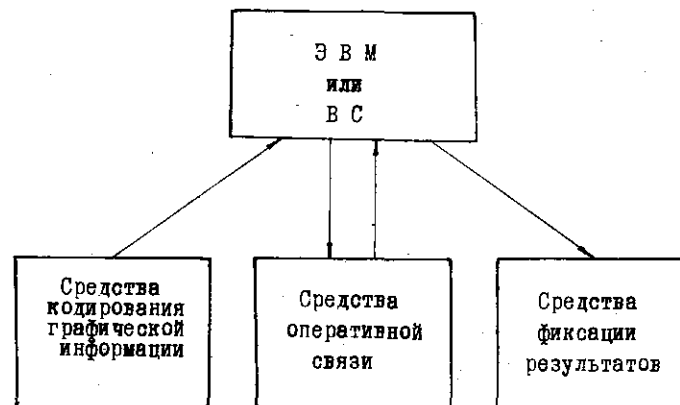


Рис. 1. Схема автоматизированной системы

б) средства кодирования графической информации для ввода в ЭМ;

в) средства фиксации результатов, включающие в себя алфавитно-цифровые печатающие устройства, графопостроители, прецизионные электронно-лучевые трубки с регистрацией изображений на киноплёнку.

Такие устройства позволяют вводить в ЭМ и выводить из неё графическую информацию, символы, таблицы и т.п. в удобном для инженера виде.

Математическое обеспечение состоит из трех частей:

а) алгоритмического языка, на котором инженер формулирует задания машине и транслятора с него для данной ЭМ;

б) библиотеки основных рабочих стандартных программ;

в) библиотеки вспомогательных стандартных программ, обслуживающих устройства ввода-вывода информации.

С помощью АС можно автоматизировать все виды проектно-конструкторских работ, включая изготовление технической документации.

За рубежом наиболее широко автоматизированные системы применяются в авиационной и автомобильной промышленности, где сильна конкурентная борьба и происходит быстрое моральное старение техники [2]. Использование же АС даёт следующие большие преимущества:

а) экономию материальных и людских ресурсов, особенно последнее;

б) сокращение в несколько раз сроков проектирования изделий и подготовки их производства;

в) быстрое освоение и внедрение в практику новых конструкций и технологических циклов;

г) улучшение качества проектно-конструкторских и технологических работ.

Ввиду этого АС становятся в настоящее время важнейшим средством ускорения технического прогресса в машиностроении.

В АС нашли отражение две стороны процесса проектирования. В такой системе человек выполняет творческую часть работы: создает принципиальную схему проекта и по результатам работы машины вносит в схему изменения. ЭВМ каждый раз производит расчет вариантов, выбор наилучшего из них и выдает результат на то или иное выводное устройство. Такое взаимодействие получило название "система человек-машина с обратной связью". О реализованных АС подобного типа подробнее можно ознакомиться по статье Кунза [2].

Рассмотрим процесс проектирования машиностроительных изделий, например, фюзеляжа самолета. В АС вводится исходная информация в виде таблицы или эскизного рисунка с некоторыми заданными размерами. По команде оператора-конструктора ЭВМ производит расчет поверхности и выдает ее в том или ином виде на внешнее устройство для визуального осмотра. В случае необходимости оператор вносит изменение в полученную форму и повторяет расчет. Последний вариант засылается в долговременную память ЭВМ. Он является машинным эталоном поверхности, который при ручном проектировании хранится в виде большого числа плазов или объемного макета. После этого производится расчет обшивки, конструктивных элементов и т.д. Таким же образом рассчитываются крылья, хвостовое оперение и другие части и запоминаются во внешней памяти ЭВМ. Далее программным же путем на АС выполняется компоновка фюзеляжа с крыльями и прочими агрегатами и производятся другие расчеты. В соответствии с машинным эталоном изделия осуществляется проектирование технологической и сборочной оснастки для его производства.

После каждого очередного этапа АС изготавливает техническую документацию. Если для производства детали имеется подходящий станок с программным управлением, то АС рассчитывает непосредственно информацию для управления станком. Таким образом, имеется возможность автоматизировать весь процесс, начиная от проектирования и кончая выпуском готовой продукции.

В качестве вычислительного средства для АС предлагается использовать однородную вычислительную систему (ВС), состоящую

из некоторого количества ЭВМ одного типа. Теория ВС была разработана Э.В. Евреиновым и Ю.Г. Косаревым [5]. Создана и успешно действует с 1966 г. первая ВС "Минск-222" [6-8], состоящая из нескольких ЭВМ "Минск-22".

ВС имеют следующие основные преимущества:

а) обладают большой оперативной памятью;

б) дают возможность вводить и выводить информацию сразу во все ЭВМ системы, т.е. по нескольким каналам одновременно;

в) позволяют одновременно выполнять независимые части вычислительного процесса и обмениваться результатами, иначе говоря, реализовывать параллельные алгоритмы.

Эти свойства полностью соответствуют характеристикам задач проектирования, рассмотренных в § 1. Для их эффективного решения можно использовать ВС из 8-10 машин "Минск-22" или 3-4-х "Минск-32".

Помимо отмеченных выше преимуществ вычислительной системы при ее эксплуатации в АС проявляются и другие. Если АС обслуживает большое конструкторское бюро, то возникает необходимость пользоваться ею сразу несколькими разработчиками. При наличии в АС только одной мощной ЭВМ приходится создавать операционную систему, регулирующую поток задач, например, с разделением времени, как это имеет место в американской АС, созданной по проекту МАК [2]. Если применяется ВС, состоящая из нескольких ЭВМ, то отдельные разработчики решают простые задачи, которые по количеству составляют большую часть, каждый на своей машине, и только для решения сложных задач используется вся ВС. Операционная система становится необходимой, если АС обслуживает много организаций, разделенных территориально. В процессе работы конструктор, выполняя какую-то часть проекта, может вызвать по каналам коммутации ВС на свой пульт результаты смежного разработчика и проверить согласованность проекта. Главный конструктор аналогичным образом контролирует работу всего бюро.

ВС обладают высокой надежностью: неисправность одной или нескольких ЭВМ приводит не к выходу из строя всей системы, а только к уменьшению ее производительности. С другой стороны, в случае необходимости увеличения мощности системы достаточно подсоединить к ней новые ЭВМ того же типа.

Относительно программирования для ВС следует сказать, что в автоматизированной системе ВС выступает в роли специализированного вычислительного устройства, рабочие программы которого,

по преимуществу, должны быть стандартными.

Такие программы для улучшения их качества, особенно для задач, по своим характеристикам приближающихся к предельным возможностям ВС, приходится составлять вручную. Объем ручного программирования на ВС, как это доказано в [7], не намного больше, чем для одной ЭВМ [7] (стр. 55-76). Для более простых задач существует возможность автоматизации программирования для ВС на базе трансляторов для одной ЭВМ [8] (стр. 63-69).

Указанные соображения показывают на предпочтительность применения в автоматизированных системах ВС по сравнению с одной ЭВМ такой же мощности.

§ 3. Математические модели плоских кривых, получаемых при ручном проектировании

В практике ручного проектирования и технической подготовки производства широкое распространение получил метод построения плоских контуров (опорной сети поверхности) на плазе в виде линий упруго-статического равновесия тонкой рейки (стержня) с опорами в нескольких точках. Опоры подбираются так, чтобы линия равновесия (средняя линия стержня) имела требуемую форму и обладала в некотором смысле гладкостью.

1. Характер кривых. Рассматривается плоская задача о чистом изгибе без растяжения тонкого стержня с опорами в точках $P_0, P_1, \dots, P_N$ (рис. 2). В концевых опорах P_0 и P_N

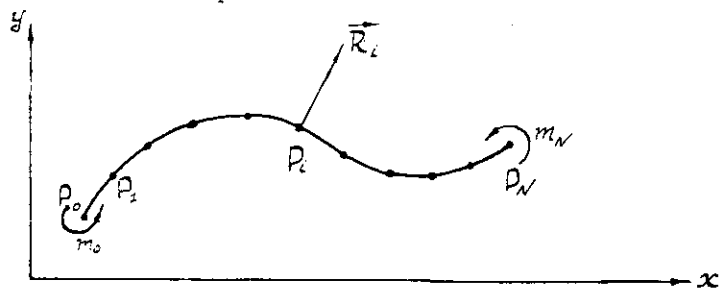


Рис. 2. Упругий стержень в равновесии.

приложены внешние моменты, других внешних нагрузок нет. Опоры будем считать идеальными, а, следовательно, возникающие в них реакции $\vec{R}_i (R_{ix}, R_{iy})$ ортогональными к средней линии стержня в точках P_i .

т.е.

$$R_{ix} = -R_{iy} y'_i \quad (i=0, 1, \dots, N-1). \quad (3.1)$$

Для разрешимости задачи одна из опор, пусть это будет P_N , должна быть, вообще говоря, неидеальной.

Если обозначить через m_i моменты, а через $\mathcal{F}_i(X_i, Y_i)$ перерезывающие силы, то условия равновесия имеют вид 10:

$$\vec{F}_0 = \vec{R}_0, \quad \vec{F}_i = \vec{F}_{i-1} + \vec{R}_i, \quad (i=1, 2, \dots, N-1), \quad \vec{F}_{N-1} = -\vec{R}_N. \quad (3.2)$$

$$m_i - Y_i h_i + X_i \ell_i = m_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, N-1), \quad (3.3)$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i; \quad \ell_i = y_{i+1} - y_i.$$

Линия равновесия средней линии стержня на участке $P_i P_{i+1}$ представляется функцией $y = y^{(i)}(x)$, непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой. Ее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{y^{(i)''''}}{[1 + (y^{(i)'})^2]^{3/2}} = -m_i + Y_i(x - x_i) - X_i(y^{(i)} - y_i), \quad (3.4)$$

$$(i=0, 1, \dots, N-1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x = x_i, \quad y^{(i)} &= y_i; \\ x = x_{i+1}, \quad y^{(i)} &= y_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Индексы сверху обозначают номер звена, снизу - значение параметров в точке.

В выражении (3.4) слева стоит кривизна дуги $k^{(i)}(x)$, а справа $M^{(i)}(x)$ - изгибающий момент, действующий в сечении x и отнесенный к величине EY - произведению модуля Юнга на момент инерции стержня. Будем считать силы и моменты, входящие в уравнения (3.1) - (3.3), тоже отнесенными к EY . Уравнения (3.4) интегрируются, и решения их представляются в эллиптических интегралах [11].

Как уже отмечалось, в опорах P_0 и P_N прикладываются внешние моменты m_0 и m_N , которые определяют условия на концах стержня. Они могут быть нескольких типов (I - IV).

I. В одних случаях на конце известна величина угла наклона касательной к кривой, а значит, задано y'_0 или y'_N .

II. В других случаях можно определить непосредственно m_0 или m_N , т.е. задать в силу (3.4) и (3.3) кривизну k_0 или k_N .

В частности, при свободном конце $m_0 = 0$ или $m_N = 0$.

III. Встречаются ситуации, в которых инженер затрудняется указать характер граничного условия. Между тем грубое задание первой производной или освобождение конца не позволяют добиться нужной формы вблизи него. Здесь можно предложить компромиссное решение. В конечной точке, например P_0 , снимается опора и отыскивается новая точка $P_1(x_1, y_1)$ такая, что, если закрепить стержень со свободным концом $m_1 = 0$, то он пройдет и через точку P_0 . Это означает, что реакция $R_0 = 0$, и весь участок $P_1 P_0$ описывается одним уравнением $y = y^{(0)}(x)$ с условием $y^{(0)'}(x_1) = 0$. Аналогично обстоит дело и на другом конце.

IV. Линия равновесия стержня может быть по условию периодической с периодом $P_0 P_N$. Тогда, очевидно, должно быть $y_0 = y_N$, $y^{(0)'}(x_0) = y^{(N-1)'}(x_N)$, $y^{(0)''}(x_0) = y^{(N-1)''}(x_N)$. Этот случай приходится использовать при построении замкнутых контуров, например, сечений фюзеляжа самолета и мотогондол.

Исследуем характер функции, описывающей линию равновесия стержня.

Поскольку задача решается по модели сплошной среды, то первая и вторая производные от решения должны быть всюду непрерывны, в том числе в точках P_i . Равенство вторых производных, а следовательно, и кривизн в точках отражено в соотношениях (3.3). Остается добавить

$$y^{(i-1)'}(x_i) = y^{(i)'}(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, N-1). \quad (3.6)$$

Выписанные соотношения вместе с (3.1), (3.2), (3.3) и двумя условиями на концах образуют систему из $5N+3$ уравнений для определения неизвестных R_{ix} , R_{iy} , m_i ($i=0, 1, \dots, N$) и

$$X_i, Y_i \quad (i=0, 1, \dots, N-1).$$

Из (3.4) найдем третью производную функции $y(x)$, которая тоже непрерывна на участках $P_{i-1} P_i$ и $P_i P_{i+1}$. Вычисляя ее приращение в точке P_i и учитывая (3.1) - (3.3), находим

$$y^{(2)'''}(x_i) - y^{(i-1)'''}(x_i) = R_{iy} [1 + (y_i^{(i)'})^2]^{3/2}, \quad (3.7)$$

т.е. третья производная терпит разрыв в точках P_i .

Итак, линия равновесия тонкого стержня с несколькими опорами описывается функцией $y = y(x)$, непрерывной вместе с двумя первыми производными и имеющей разрывы третьей производ-

ной в точках опоры, иначе говоря, функция $y = y(x)$ принадлежит классу функций C^2 .

2. П о н я т и е г л а д к о с т и. Рассмотрим понятие гладкости кривых - контуров с точки зрения инженера-проектировщика. Перед началом работы он имеет эскиз поверхности, на котором жестко определено небольшое число параметров-размеров. В остальном же конструктор свободен и руководствуется лишь некоторыми принципами.

Один из таких принципов, как показал анализ ручного проектирования, состоит в том, что инженер стремится решить свою задачу с возможно более гладкими кривыми. Он не только не допускает без крайней необходимости изменения знака кривизны, но и добивается, чтобы последняя "в целом" была наименьшей.

Здесь уместно вспомнить [10], что в положении равновесия упругого стержня при заданных опорах его потенциальная энергия минимальна, т.е. интеграл

$$V_2 = \int_{(\alpha)} k^2(x) dx \quad (3.8)$$

по средней линии стержня α принимает минимальное значение.

Можно считать, что инженер среди возможных размещений опор находит такое, которое дает ему наименьшее значение V_2 , т.е. ищет нижнюю границу среди минимумов. Здесь мы должны оговориться, что нельзя определенно сказать, приближаются ли таким образом к наименьшему значению V_2 , или, быть может, к наименьшему значению интеграла от другой степени, например, от $|k(x)|$. При ручном проектировании описанный критерий носит больше качественный характер.

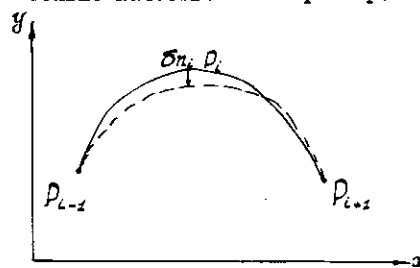


Рис.3. Изменение положения стержня при освобождении опоры

Приведем другой критерий, который применяется на следующем этапе уточнения проекта, а также для проверки качества контуров и выявления ошибок, возникающих при передаче информации от конструкторов к технологам. Он дает количественную оценку гладкости. Для того чтобы оценить гладкость на участке $P_{i-1} P_{i+1}$, остальную часть контура фиксируют. После этого освобождают опору

и измеряют отклонение по нормали $\delta \bar{n}_i$ к первоначальному положению (рис. 3).

Назовем коэффициентом гладкости в точке P_i отношение

$$\text{где } \hat{\sigma}_i = \frac{|\delta \bar{n}_i|}{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, N-1), \quad (3.9)$$

$$|\delta \bar{n}_i| = |\delta y_i| \sqrt{1 + y_i'^2},$$

$$\alpha_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}.$$

Процесс сглаживания состоит в том, чтобы варьированием опор добиться выполнения неравенств

$$\hat{\sigma}_i \leq \sigma_* \quad (i=1, 2, \dots, N-1), \quad (3.10)$$

где σ_* задано.

Очевидно, что величина $|\delta \bar{n}_i|$ будет тем меньше, чем меньше реакция опоры $\bar{R}_i$ в рассматриваемой точке. Следовательно, неравенства (3.10) означают ограниченность реакций, что, в свою очередь, на основании (3.7) приводит к выводу об ограниченности по модулю разрывов третьей производной функции $y(x)$.

На практике инженер стремится выполнить условия гладкости за счет возможно меньших по величине и количеству вариаций δy_i эскизных точек P_i , т.е. он пытается минимизировать сумму модулей уклонений

$$U_1 = \sum_{i=0}^N |\delta \bar{n}_i|. \quad (3.11)$$

Это можно заменить минимизацией суммы квадратов уклонений

$$U_2 = \sum_{i=0}^N (\delta \bar{n}_i)^2, \quad (3.12)$$

если число опор достаточно велико и нет грубых ошибок. В противном случае, как известно из теории сглаживания по методу наименьших квадратов ([12], гл. 5), картина при сглаживании может быть сильно искажена.

Таким образом, процесс построения контура с точки зрения указанных двух условий гладкости состоит соответственно в решении одной из следующих экстремальных задач:

1) Найти минимум функционала

$$\Phi = \varepsilon V_2 + U_2, \quad (3.13)$$

где ε характеризует степень сглаживания и будет называться параметром сглаживания. При $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к чистой задаче интерполирования, для которой $U_2 = 0$, а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ минимизируется только V_2 . В последнем случае решением задачи оказывается функция с непрерывной третьей производной. В частности, если в концевых точках P_0 и P_N заданы нулевые значения производных или условия периодичности, то решением будет прямая линия ($V_2 = 0$).

2) Найти минимум функционала

$$\psi = U_v \quad (v=1, 2) \quad (3.14)$$

при ограничениях (3.10).

§ 4. Линейная модель и теория многозвенных функций

1. Вид кривых. Рассмотренная в § 3 задача о равновесии стержня очень упрощается, если величина $y'(x)$ мала, так что в уравнениях (3.4) ее квадратом можно пренебречь по сравнению с единицей. При этом, так как $(y - y_i) \sim y'(x)(x - x_i)$, а $X_i \sim y_i y'(x)$ в силу (3.1) и (3.2), то в уравнениях (3.4) можно пренебречь также величиной $X_i(y^{(i)} - y_i)$ по сравнению с $y_i'(x - x_i)$, и они примут вид:

$$y^{(i)''} = -m_i + y_i'(x - x_i) \quad (i=0, 1, \dots, N-1). \quad (4.1)$$

Интегрируя их дважды, найдем уравнение каждого звена кривой:

$$y^{(i)}(x) = \frac{y_i'}{6}(x - x_i)^3 - \frac{m_i}{2}(x - x_i)^2 + C_{1i}(x - x_i) + C_{0i}, \quad (4.2)$$

$(i=0, 1, \dots, N-1).$

Постоянные интегрирования C_{10} и C_{1N} по-прежнему определяются из граничных условий (3.5). Так как в (3.3) члены с $X_i y_i'$ пренебрежимо малы, то условия для определения неизвестных постоянных разбиваются на две независимые группы. С помощью (3.3) из (4.2) исключаются величины y_i' , оставшиеся же неизвестные m_i находятся из (3.6) и условий в концевых точках (I-IV). Равенства (3.2) дают значения R_{iy} .

Линия равновесия состоит из дуг - кубических парабол - и принадлежит классу C^2 . В опорах P_i ее третья производная терпит разрыв, согласно (3.7), на величину R_{iy} .

Если бы нужно было найти более точное решение, то, разла-

гая $(1+y)^{3/2}$ по степеням малого параметра $y^{1/2}$ и применяя к нелинейному уравнению (3.4) метод последовательных приближений, можно было бы получить уравнения дуг в виде полиномов высших нечетных степеней.

2. Г л а д к о с т ь к р и в ы х. В линейризированной постановке понятие гладкости кривых остается тем же самым, только в формуле (3.8) кривизну $k(x)$ следует заменить приближенно на $y''(x)$, а в формулах (3.9) - (3.12) $|\delta n_i| = |\delta y_i|$ и $\alpha_i = h_{i-1} + h_i$.

Перепишем (3.10) применительно к данному случаю

$$\bar{\theta}_i = \frac{|\delta y_i|}{h_{i-1} + h_i} \leq \bar{\theta}_* \quad (i=1, 2, \dots, N-1). \quad (4.3)$$

Здесь мы имеем возможность вычислить в явном виде допустимые величины $|R_{iy}|$, которые, как было установлено в § 3, должны быть ограничены.

Для этого возьмем уравнение звена $P_{i-1} P_i$ в обычной форме (4.2). В точке P_i оно даст соотношение

$$\frac{y_{i-1}}{6} h_{i-1}^3 - \frac{m_{i-1}}{2} h_{i-1}^2 + c_{ii} h_{i-1} + c_{oi-1} = y_i, \quad (4.4)$$

где $c_{oi-1} = y_{i-1}, c_{ii-1} = y'_{i-1}$.

Уравнение участка $P_i P_{i+1}$ можно оставить в таком же виде, но только учесть разрыв третьей производной R_{iy} в точке P_i , добавив член $R_{iy}(x - x_i)^3$. В точке P_{i+1} имеем соотношения

$$\frac{y_{i-1}}{6} (h_{i-1} + h_i)^3 + \frac{R_{iy}}{6} h_i^3 - \frac{m_{i-1}}{2} (h_{i-1} + h_i)^2 + y'_{i-1} (h_{i-1} + h_i) + y_{i-1} = y_{i+1}; \quad (4.5)$$

$$\frac{y_{i-1}}{2} (h_{i-1} + h_i)^2 + \frac{R_{iy}}{2} h_i^2 - m_{i-1} (h_{i-1} + h_i) + y'_{i-1} = y'_{i+1}. \quad (4.6)$$

Исключая из (4.4) - (4.6) y_{i-1} и m_{i-1} , приходим к равенству

$$A_i R_{iy} + B_i = y_i, \quad (4.7)$$

где

$$A_i = \frac{1}{3} \left(\frac{h_{i-1} h_i}{h_{i-1} + h_i} \right)^3, \quad (4.8)$$

$$B_i = \frac{1}{(h_{i-1} + h_i)^3} [h_{i-1} h_i^2 (h_{i-1} + h_i) y'_{i-1} + h_i^2 (3h_{i-1} + h_i) y_{i-1} + h_i^2 (h_{i-1} + 3h_i) y_{i+1} - h_{i-1}^2 h_i (h_{i-1} + h_i) y'_{i+1}]. \quad (4.9)$$

Будем предполагать в соответствии с физическими условиями, что при освобождении опоры в точке P_i изменяется только y_i на величину δy_i , а y_k и y'_k ($k \neq i$) остаются фиксированными. При этом реакция в точке P_i исчезает, т.е. $\delta R_{iy} = -R_{iy}$. Тогда из (4.7) получаем

$$R_{iy} = -A_i^{-1} \delta y_i.$$

Отсюда и из (4.3) следует, что условие гладкости $\bar{\theta}_i \leq \bar{\theta}_*$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) равносильно неравенствам

$$|R_{iy}| \leq A_i^{-1} (h_{i-1} + h_i) \bar{\theta}_*, \quad (i=1, 2, \dots, N-1). \quad (4.10)$$

Для того же участка $P_{i-1} P_{i+1}$ рассмотрим задачу сглаживания, выраженную формулой (3.13). Найти

$$\min \left\{ \varepsilon_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [y''(x)]^2 dx + (y_i - y_i^0)^2 \right\}, \quad (4.11)$$

где y_i^0 - заданное значение, а y_i - сглаженное. Интеграл имеет значение:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [y''(x)]^2 dx = y'_{i-1} y'_{i+1} - y'_{i-1} y''_{i-1} - y'_{i+1} y''_{i+1} + y''_{i-1} y_{i-1} + y''_{i+1} y_{i+1} + (y'''_{i-1} - y'''_{i+1}) y_i,$$

где y_k и y'_k ($k \neq i$) фиксированы. Подставляя в (4.11) выражения y_i и производных, приходим к формуле

$$\min \left\{ \varepsilon_i (A_i R_{iy}^2 + D_i) + (A_i R_{iy} + B_i - y_i^0)^2 \right\}, \quad (4.12)$$

где D_i не зависит от R_{iy} .

Условие экстремума для выражения (4.12) по параметру R_{iy} имеет вид:

$$(\varepsilon_i + A_i) R_{iy} + B_i - y_i^0 = 0. \quad (4.13)$$

Согласно (4.9) можно показать, что

$$y_i^0 - B_i = h_{i-1}^2 h_i^2 y(x_{i-1}; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; x_{i+1}), \quad (4.14)$$

где $y(x_{i-1}, \dots, x_{i+1})$ есть аналог четвертой разделенной разности (см., например, [12], гл. 2), в котором вместо первых разделенных разностей для концевых точек стоят производные y'_{i-1} и y'_{i+1} . Из-за того, что величины y'_{i-1} и y'_{i+1} неизвестны, будем заменять это четвертой разделенной разностью.

Из (4.10), (4.13) и (4.14) следует неравенство:

$$\varepsilon_i \geq A_i \left[\frac{h_{i-1}^2 h_i^2 |y(x_{i-1}, \dots, x_{i+1})|}{(h_{i-1} + h_i) \delta_*} - 1 \right], \quad (4.15)$$

дающее связь между величинами δ_* и ε_i . При заданном δ_* оно налагает ограничение на величину ε_i . Выражение в квадратной скобке характеризует относительное отклонение четвертой разделенной разности по заданным точкам от отношения разрыва третьей производной решения к шагу h_i . Неравенство (4.15) имеет смысл только тогда, когда это выражение положительно. Если оно отрицательно, то это означает, что условия (3.10) будут выполнены при любом $\varepsilon_i \geq 0$.

3. О т е о р и и м н о г о з в е н н ы х ф у н к ц и й. Функции, полученные из приближенной постановки задачи о равновесии стержня, состоящие из звеньев — кубических парабол и принадлежащие классу C^2 , впервые были исследованы Шенбергом в 1946 г. Он дал им название "splines" — функций (латинское *spline* — упругий стержень, рейка и т.п.). В русском языке нет достаточно точного эквивалента слову *spline*. Поэтому мы предлагаем называть рассматриваемые функции м н о г о з в е н н ы м и ф у н к ц и я м и или просто м н о г о з в е н н и к а м и. Это название отражает свойства функций и указывает на особенности геометрии определяемых ими линий и поверхностей. С этой точки зрения обычная ломаная есть линейный многозвенник, приближенное решение задачи о равновесии стержня — кубический многозвенник. В общем случае можно рассматривать многозвенные функции $(2n-1)$ -ой степени.

В первое время теория многозвенных функций не получила большого развития. Интерес к ним появляется к началу 60-х годов в США в связи с созданием автоматизированных систем конструирования для машиностроения. Помимо самого Шенберга в разработке теории активно участвуют Биркгоф со своими сотрудниками, школа Уолша, исследования которой представлены в монографии [13], подводящей итоги работы американских ученых до 1967 г. В этих трудах в первую очередь были изложены задачи интерполирования многозвенными функциями. С ними связаны применения тео-

рии к задачам численного дифференцирования и интегрирования. Рассмотрены экстремальные свойства интерполяционных многозвенников, идущие от принципа минимума потенциальной энергии (3.9). К этим исследованиям примыкает задача интерполирования со сглаживанием дискретной информации, а также другие задачи приближения функций. Имеется применение кубических многозвенников в вариационном методе Рунца-Галеркина. В дальнейшем результаты распространялись на функции двух переменных, а также на многозвенные функции высших нечетных степеней. Наконец, появилось много работ с обобщением теории на линейные операторы. Более подробные обзоры и библиографию можно найти в [12-14]. Таким образом, складывается новая область численного анализа, обладающая по своим методам целым рядом преимуществ по сравнению с классическими способами.

Использование многозвенных функций для решения вычислительных задач приводит к более простым, чем обычно, алгоритмам. Область применимости новых методов шире, чем классических.

4. П р и м е н е н и е м н о г о з в е н н ы х ф у н к ц и й в з а д а ч а х п р о е к т и р о в а н и я. В Институте математики СО АН СССР работы над вопросами многозвенных функций были начаты в 1964 г. в связи с созданием математического обеспечения для автоматизации инженерных работ в машиностроении. Для поставленных целей оказалось достаточным использовать только функции третьей степени — кубические многозвенники — и их обобщения на случай двух независимых переменных — бикубические многозвенники.

Кроме того, В.А. Леус развил вариант теории, близкий к тому, когда в задаче о равновесии стержня линеаризация проводится не для всего стержня, а на каждом звене $P_i P_{i+1}$ отдельно относительно связанной с ним системы координат. Для получения более простых алгоритмов считалось, что только первые производные непрерывны, а вторые разрывны в точках P_i . Получившиеся кривые по форме близки к нелинейным решениям, и этот способ оказался удобным для моделирования некоторых ручных плазовых работ. Однако, здесь затруднительно построить уравнение поверхности, и потому связанные с этим расчеты требуют сравнительно сложных программ. Правда, увеличение времени счета компенсируется меньшими требованиями к объему оперативной памяти ЭВМ.

В § I были сформулированы задачи, возникающие при автоматизации проектирования и технической подготовки производства.

Первые четыре из них к настоящему времени рассмотрены методами теории многозвенных функций:

1) Исследовано интерполирование многозвенными функциями функций одной переменной. Эти результаты распространяются и на функции двух независимых переменных.

2) Рассмотрено интерполирование со сглаживанием кубическими многозвенниками в двух постановках, соответствующих $\nu=1$ и $\nu=2$ в формуле (3.14) с ограничениями типа (4.8) и без них. При двух независимых переменных эта задача может быть решена на современных ЭВМ при сравнительно малом числе узлов, порядка 10^2-10^3 .

3) Решены геометрические задачи, связанные с проектированием конструктивных элементов, компоновкой агрегатов, раскрыем панелей.

4) Сформулированы общие принципы подготовки информации для изготовления деталей и агрегатов на станках с программным управлением, если поверхности описываются многозвенными функциями. Конкретно они реализованы на двух многокоординатных станках.

При рассмотрении этих задач главное внимание уделялось построению алгоритмов, в том числе параллельных, удобных для реализации на ЭВМ и ВС.

В задачах типов 4-6 специфика многозвенных функций проявляется в меньшей степени. Но и здесь, например, в гидродинамике и теории упругости этот аппарат может дать определенный эффект, особенно при решении вариационных задач.

О первых результатах работы сообщалось в [15-17]. Подробное изложение теории интерполирования многозвенными функциями с алгоритмами дается в последующих статьях данного сборника. Результаты других исследований будут опубликованы позднее.

С помощью разработанного математического аппарата были проведены эксперименты по проектированию отдельных деталей и агрегатов сложной формы. Для целей технологической подготовки эти методы прошли практическую проверку в заводских условиях и внедрены в производство. На их основе почти полностью автоматизированы плазовые работы и осуществлен расчет информации для изготовления деталей и агрегатов на многокоординатных станках с программным управлением.

Итак, в Институте математики СО АН СССР проведены исследования по всем основным аспектам АС. Создан математический аппарат проектирования форм деталей и агрегатов. Показана эффек-

тивность применения вычислительных систем для этих целей. Под руководством В.А. Львова разработаны образцы аппаратуры ввода-вывода графической информации для ЭВМ и накоплен опыт работы устройств с машиной "Минск-22" [9].

Эти исследования могут служить основой для создания автоматизированной системы (АС) проектирования и технической подготовки производства в машиностроении. АС могут использоваться также в тех областях, где имеют дело с обработкой геометрической информации, например, в картографии, архитектуре и т.п.

Автор благодарен Б.И. Квасову, проверившему все выкладки в его статьях, публикуемых в данном сборнике, а также Т.Е. Самсаковой за помощь при подготовке рукописей в печати.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. УИЛСОН, М. УИЛСОН. Информация, вычислительные машины и проектирование систем. "Мир", М., 1968.
2. Ст.А. КУНЗ. Использование вычислительных машин в промышленности. - В сб.: "Информация". "Мир", М., 1968, 137-151.
3. Е.Б. РАВИНСКИЙ. Алгоритмизация графоаналитических способов конструирования поверхностей летательных аппаратов. Автореф. канд. диссертации. М., 1966.
4. Ю.Л. КЕТКОВ. Об оптимальных методах нелинейной аппроксимации плоских кривых и системе автоматизации программирования для обработки геометрической информации. Автореферат канд. диссертации. Горький, 1966.
5. Э.В. ЕВРЕЙНОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Однородные вычислительные системы высокой производительности. "Наука", Сиб. отдел., Новосибирск, 1966.
6. "Вычислительные системы". Сб. статей, вып.23. "Наука", Сиб. отделение, Новосибирск, 1967.
7. "Вычислительные системы". Сб. статей, вып.24. "Наука", Сиб. отдел., Новосибирск, 1967.
8. "Вычислительные системы". Сб. статей, вып.30. "Наука", Сиб. отдел., Новосибирск, 1968.
9. "Вычислительные системы". Сб. статей, вып.35. Новосибирск, 1969.
10. Н.М. БЕЛЯЕВ. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959.
11. Е.П. ПОПОВ. Нелинейные задачи статики тонких стержней. Гос.техиздат, М.-Л., 1948.
12. I.J. SCHOENBERG. On spline functions. "Inequalities", O. Shisha (ed.). Acad. Press, New York-London, 1967, p.255-292.
13. J.H. AHLBERG, E.W. NILSON, J.L. WALSH. The theory of splines and their applications. Acad. Press, New York-London, 1967.

14. P.M. ANSELONE, P.J. LAURENT. A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions. Numer.Math., 1968, v.12, N 1, p.66-82.
15. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Вычислительные системы как средство автоматизации проектно-конструкторских работ и технической подготовки производства. Труды I Всесоюзной конференции по Вычислительным системам. Новосибирск, вып.6, 1968, с. 15-18.
16. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Математические основы автоматизированной системы проектирования агрегатных поверхностей в машиностроении (АСПАП). Материалы Всесоюзной научно-технической конференции "Автоматизация технической подготовки производства в машиностроении", ч. I, Минск, 1968, с. 43-45.
17. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Интерполирование функций одной и двух переменных кусочно-полиномиальными функциями. - Сб.: Математические вопросы геофизики, вып. I. Новосибирск, 1969, с. 125-141.

Поступила в редакцию
15 сентября 1969 г.