ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1970 г. Выпуск 38

УДК 518:517.949.12

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КУБИЧЕСКИМИ МНОГОЗВЕННИКАМИ

Ю.С. Завьялов

В этой статье излагается теория интерполирования функций одной переменной кубическими spline функциями, названными нами кубическими многозвенниками. Помимо изложения новых результатов, полученных автором, дается обзор работ зарубежных ученых по исследуемым вопросам проблемы. При этом рассматриваются только функции третьей степени и остаются в стороне многочисленные обобщения на функции высших нечетных степеней и на линейные операторы.

Интерполирование многозвенными функциями впервые появилось в работе Шенберга [1]. Он же [2] установил первые теоремы существования и единственности решения задачи. Впоследствии Уолш, Альберг и Нильсон [3,8] ввели периодические кубические многозвенники и исследовали некоторые их свойства. Постановке задачи, существованию и единственности решения посвящен § 1. При этом основную систему уравнений удалось записать в общем виде, охватывающем все типичные варианты, что позволило вести в дальнейшем исследование сразу в общем случае.

В §§ 2,3 излагаются алгоритмы решения задачи. Гревиллом [4] разработан весьма общий алгоритм, пригодный для многозвенных функций любых нечетных степеней. Для кубических многозвенников задача сводится к простой системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей [3,8] и может быть решена проще. В настоящей работе для нее дается обоснование метода прогонки. В случае равноотстоящих узлов интерполяции удается получить явные формулы. Нами для этой цели в 1966 г. был предложен комбинаторный способ, пригодный для решения различных рекуррент -

ных систем линейных уравнений. В монографии [8] несколько отличные формулы получены более громоздким путем. Наряду с простотой вычислительных алгоритмов, важным преимуществом интерполирования многозвенниками по сравнению с классическими способами является хорошая сходимость интерполяционного процесса. Большая часть работы (§§ 5,6) посвящена этому вопросу. Первый результат был получен в работе [3] для функций $f(x)$ из класса C^2, где показана равномерная сходимость для $f^{(r)}(x)$ $(r=0,1)$ и сходимость по норме в пространстве L_2 для $f''(x)$. Впоследствии в [8] требование к $f(x)$ было смягчено и заменено условием, чтобы $f''(x)$ принадлежало L_2. Далее, Альбергом и Нильсоном [5] изучена равномерная сходимость для $f^{(r)}(x)$ $(r = 0,1,2)$, если $f(x)$ из класса C^2, а Биркгофом и де Боором [6] - если из классов C^3 и C^4. В этих работах сходимость доказана в предположении равномерного стремления к нулю шагов интерполяции. Sharma и Meir [7] рассмотрели, помимо классов C^2 и C^3, также C^1 и C^0 и показали, что требование равномерности шагов для классов C^1 и C^2 является излишним. Эти результаты изложены в [8]. Нами применяется более тонкий метод получения оценок сходимости. Это позволило улучшить их во всех известных случаях, а для класса C^0 получить одну новую оценку. Кроме того, в рассмотрение включен дополнительный вариант интерполяционной задачи, для которого эффективных оценок ранее получено не было.

§ I. Постановка задачи. Существование и единственность решения

I. О п р е д е л е н и е [I,8]. Пусть область вещественной переменной $a \le x \le b$ разделена на промежутки множеством точек

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

На $[a,b]$ задана функция $y = S(x)$, обладающая двумя свойствами:

а) на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ $S(x)$ является кубическим полиномом

$$P_i(x) = \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda^{(i)} (x - x_i)^\lambda; \tag{I.I}$$

б) $S(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $S'(x)$ и $S''(x)$, т.е. принадлежит классу функций C^2 $(S(x) \in C^2)$ (рис. I).

Такую функцию будем называть к у б и ч е с к и м м н о г о з в е н н и к о м.

$S(x)$ может иметь непрерывную третью производную $S'''(x)$.

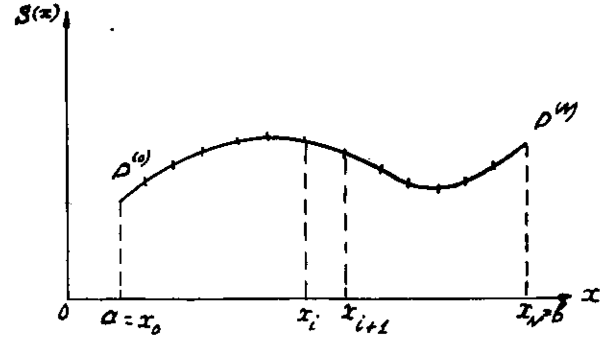

Рис. I.

Тогда она является кубическим полиномом на всем отрезке $[a,b]$. В частности, сюда войдут часто употребляемые в инженерном деле прямые, обычные и кубические параболы, а в полярных координатах - окружности, спирали Архимеда и т.п.

2. З а д а ч а и н т е р п о л и р о в а н и я [8].

Пусть на промежутке $[a,b]$ в некоторых точках x_i заданы значения функции $y_i = f(x_i)$. Требуется построить кубический многозвенник $y = S(x)$ с точками раздела в заданных узлах, интерполирующий $f(x)$, т.е.

$$S(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,\ldots,N), \tag{I.2}$$

и удовлетворяющий условиям на концевых дугах одного из следующих типов I - IУ:

$$\text{I.} \quad S'(x_i) = f'(x_i), \quad (i = 0, N); \tag{I.3}$$

$$\text{II.} \quad S''(x_i) = f''(x_i), \quad (i = 0, N). \tag{I.4}$$

Эти два типа выделяются особо вследствие их важности в теории и приложениях.

Ш. Общий случай, куда, помимо (I.3) и (I.4), включаются условия, задаваемые на продолжениях концевых дуг в точках $x_{-1} < x_0$ и $x_{N+1} > x_N$, выражается формулами

$$S^{(p)}(x_i) = f^{(p)}(x_i) \quad (x_i \le x_0,\ x_i \ge x_N), \tag{I.5}$$

где p = 0,I или 2 - порядок производной. Разумеется, условия (I.2) для $i = 0, N$ в (I.5) повторяться не должны.

Формулы (I.5) охватывают все естественные случаи краевых условий. В работе [8] в тип Ш включены произвольные линейные условия, а не только (I.5). Но тогда для него удается получить меньше результатов.

IУ. Если $f(x)$ – периодическая функция с периодом $X=b-a$, то и $S(x)$ должна быть периодической. Это дает соотношения

$$S'(x_0)=S'(x_N),\ S''(x_0)=S''(x_N). \qquad (I.6)$$

3. О с н о в н ы е у р а в н е н и я. Выведем систему уравнений для определения коэффициентов полиномов (I.I), составляющих функцию $S(x)$. По определению $S(x)$ во внутренних точках x_i (i = I,2,...,$N-1$) выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} &a_3^{(i-1)}h_{i-1}^3+a_2^{(i-1)}h_{i-1}^2+a_1^{(i-1)}h_{i-1}+a_0^{(i-1)}=a_0^{(i)},\\ &3a_3^{(i-1)}h_{i-1}^2+2a_2^{(i-1)}h_{i-1}+a_1^{(i-1)}=a_1^{(i)},\\ &3a_3^{(i-1)}h_{i-1}+a_2^{(i-1)}=a_2^{(i)}, \end{aligned}\right\} \qquad (I.7)$$

где
$$h_i=x_{i+1}-x_i.$$

Преобразуем условия (I.2) и (I.7). Это можно сделать тремя способами, в зависимости от того, какие из параметров $a_\lambda^{(i)}$ исключаются. Ниже будут получены системы, содержащие а) $a_2^{(i)}$, б) $a_1^{(i)}$ и в) $a_3^{(i)}$.

а) Соотношения (I.2) для всех i = 0,I,...,N дают

$$a_0^{(i)}=f(x_i). \qquad (I.8)$$

Из третьего соотношения (I.7) следует

$$a_3^{(i-1)}=\frac{a_2^{(i)}-a_2^{(i-1)}}{3h_{i-1}} \qquad (I.9)$$

для $i=1,\dots,N$. Далее из первого соотношения (I.7) и формул (I.8) и (I.9) находим, что

$$a_1^{(i-1)}=f(x_{i-1};x_i)-\frac{h_{i-1}}{3}(2a_2^{(i-1)}+a_2^{(i)}), \qquad (I.10a)$$

где $f(x_{i-1};x_i)$ – первые разделенные разности функции $f(x)$. Из второго соотношения (I.7) имеем

$$a_1^{(i)}=f(x_{i-1};x_i)+\frac{h_{i-1}}{3}(a_2^{(i-1)}+2a_2^{(i)}). \qquad (I.10б)$$

Запишем формулу (I.10а) для $a_1^{(i)}$ и приравняем выражения для $a_1^{(i)}$. Таким образом для $a_2^{(i)}$ получаем систему [8]:

$$\alpha_i a_2^{(i-1)}+2a_2^{(i)}+\beta_i a_2^{(i+1)}=3f(x_{i-1};x_i;x_{i+1}) \qquad (I.11)$$
$$(i=1,2,\dots,N-1),$$

где
$$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\quad \beta_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\ \alpha_i+\beta_i=1$$

и $f(x_{i-1};x_i;x_{i+1})$ – вторые разделенные разности.

В последнее уравнение (I.II) входит дополнительная величина

$$a_2^{(N)}=3h_{N-1}a_3^{(N-1)}+a_2^{(N-1)}.$$

Очевидно, коэффициенты $a_2^{(i)}$ связаны с моментами в задаче о стержне [I6] формулами $2a_2^{(i)}=-m_i$.

К уравнениям (I.II) нужно добавить на каждом конце по одному условию типа I–Ш или условия периодичности многозвенника IУ. Для этого представим уравнение кубического полинома и его производных в виде:

$$P_i^{(\rho)}(x)=\sum_{\lambda=0}^{3}(\lambda)_\rho\, a_\lambda^{(i)}(x-x_i)^{\lambda-\rho}\quad (\rho=0,1,2).$$

Здесь символ $(\lambda)_\rho$ означает убывающий ρ-факториал $(\lambda)_\rho=\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-\rho+1)$. Принимается, что $(\lambda)_0=1$ и $(\lambda)_\rho=0$, если $\rho>\lambda$. Подставляя $P_0^{(\rho)}(x)$ и $P_{N-1}^{(\rho)}(x)$ в граничные условия (I.5) и исключая $a_3^{(i)}$ и $a_1^{(i)}$ с помощью (I.9) и (I.I0), получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} &2a_2^{(0)}+\beta_0 a_2^{(1)}=(2+\beta_0)f(x_{i_1};x_{i_0};x_{i_1}),\\ &\alpha_N a_2^{(N-1)}+2a_2^{(N)}=(2+\alpha_N)f(x_{i_{N-1}};x_{i_N};x_{i_{N+1}}). \end{aligned}\right\} \qquad (I.12)$$

Здесь обозначено:

$$\beta_0=2\,\frac{(1)_\rho h_0^2-(3)_\rho h_{-1}^2}{2(1)_\rho h_0^2+3(2)_\rho h_0 h_1+(3)_\rho h_{-1}^2};$$

$$\alpha_N = 2\,\frac{(1)_\rho h_{N-1}^2 - (3)_\rho h_N^2}{2(1)_\rho h_{N-1}^2 + 3(2)_\rho h_{N-1} h_N + (3)_\rho h_N^2}\,; \tag{I.13}$$

$$h_{-1} = x_0 - x_{-1} \geqslant 0, \quad h_N = x_{N+1} - x_N \geqslant 0$$

Далее,

$$f(x_{i_{-1}}; x_{i_0}; x_{i_1}) = \frac{(1)_\rho f(x_0; x_1) - h_{-1}^{-1}\left[(0)_\rho f(x_0) - f^{(\rho)}(x_{-1})(-h_{-1})^\rho\right]}{(1)_\rho h_0 + (2)_\rho h_{-1}}\,,$$

$$f(x_{i_{N-1}}; x_{i_N}; x_{i_{N+1}}) = \frac{h_N^{-1}\left[f^{(\rho)}(x_{N+1}) h_N^\rho - (0)_\rho f(x_N)\right] - (1)_\rho f(x_{N-1}; x_N)}{(1)_\rho h_{N-1} + (2)_\rho h_N}. \tag{I.14}$$

Здесь левые части представляют собой вторые разделенные разности либо их аналоги с повторяющимися аргументами [II] (гл. 2). i_{-1}, i_0, i_1 могут принимать значения: -I,0,I, а i_{N-1}, i_N, i_{N+1} : $N-1, N, N+1$.

В качестве примеров формул (I.I3) и (I.I4) приведем следующие:

Тип I. $\rho = 1;\ x_{-1} = x_0,\ h_{-1} = 0;\ x_{N+1} = x_N,\ h_N = 0$.

Тогда

$$\beta_0 = 1; \quad f(x_0; x_0; x_1) = \frac{f(x_0, x_1) - f'(x_0)}{h_0}\,; \tag{I.14а}$$

$$\alpha_N = 1; \quad f(x_{N-1}; x_N; x_N) = \frac{f'(x_N) - f(x_{N-1}, x_N)}{h_{N-1}}\,.$$

Тип II. $\rho = 2$, $\quad h_{-1} = h_N = 0;\ (1)_\rho = 0$.

Тогда

$$\beta_0 = 0, \quad f(x_0; x_0; x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0);$$

$$\alpha_N = 0, \quad f(x_N; x_N; x_N) = \frac{1}{2} f''(x_N). \tag{I.14б}$$

Из общего случая III приведем формулы для $x_{-1} < x_0;\ x_{N+1} > x_N$ и $\rho = 2$:

$$\beta_0 = -\frac{2h_{-1}}{h_0 + h_{-1}}\,; \quad f(x_{-1}; x_{-1}; x_{-1}) = \frac{1}{2} f''(x_{-1});$$

$$\alpha_N = -\frac{2h_N}{h_{N-1} + h_N}\,; \quad f(x_{N+1}; x_{N+1}; x_{N+1}) = \frac{1}{2} f''(x_{N+1}). \tag{I.14в}$$

Заметим, что в общем случае, так как $h_0 > 0,\ h_{N-1} > 0,\ h_{-1} \geqslant 0,\ h_N \geqslant 0$, то $-2 < \beta_0 \leqslant 1,\ -2 < \alpha_N \leqslant 1$.

Для периодических функций $S(x_0) = S(x_N)$ и выполняются условия (I.6), т.е. точки x_0 и x_N отождествляются. Поэтому достаточно рассматривать одну из них как внутреннюю и записать для нее уравнения типа (I.II) [3,8]. Чтобы унифицировать запись системы уравнений во всех четырех случаях, введем число $N' = N-1$. Будем обозначать $x_{-1} = x_{N'} - X$ и $x_{N'+1} = x_N$. Тогда точки x_0 и $x_{N'}$ можно рассматривать как внутренние и записать для них уравнения типа (I.II). С учетом того, что $a_2^{(0)} = a_2^{(N+1)}$,уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &2a_2^{(0)} + \beta_0 a_2^{(1)} + \alpha_0 a_2^{(N)} = 3f(x_{-1}; x_0; x_1), \\ &\beta_N a_2^{(0)} + \alpha_N a_2^{(N-1)} + 2a_2^{(N)} = 3f(x_{N-1}; x_N; x_{N+1}). \end{aligned}\right\} \tag{I.15}$$

Здесь штрихи ради простоты опущены, а $\alpha_0,\ \beta_0$ и α_N, β_N вычисляются по формулам для внутренних точек.

Несколько иначе эти уравнения составлены в нашей работе [9]

В форме (I.I5) условия периодичности применимы, если $N > 1$. При $N = 1$, т.е. когда $a_2^{(1)} = a_2^{(N)}$ и $a_2^{(0)} = a_2^{(N-1)}$, уравнения (I.I5) упрощаются и представляют собой всю систему, которая определяет $a_2^{(0)}$ и $a_2^{(1)}$.

Уравнения (I.I2) и (I.I5) можно записать единообразно в виде:

$$\left.\begin{aligned} &2a_2^{(0)} + \beta_0 a_2^{(1)} + \alpha_0 a_2^{(N)} = (2 + \alpha_0 + \beta_0) f(x_{i_{-1}}; x_{i_0}; x_{i_1}), \\ &\beta_N a_2^{(0)} + \alpha_N a_2^{(N-1)} + 2a_2^{(N)} = (2 + \alpha_N + \beta_N) f(x_{i_{N-1}}; x_{i_N}; x_{i_{N+1}}). \end{aligned}\right\} \tag{I.16}$$

Такое представление граничных условий позволит нам в дальнейшем рассматривать в ряде вопросов сразу общий случай (I.I6), а не перебирать частные типы I-IУ, как это делалось в предшествующих работах (см. например, [8]).

Итак, решение задачи интерполирования сводится к решению линейной системы (I.II) и (I.I6), состоящей из $N+1$ уравнения и определяющей неизвестные $a_2^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

Значения функции $S(x)$, точнее составляющих ее полиномов, находятся по формулам (I.I), которым на основании (I.8) –(I.I0) можно придать вид:

$$P_{i-1}(x)=\frac{a_2^{(i-1)}(x_i-x)[(x_i-x)^2-h_{i-1}^2]}{3h_{i-1}}+\frac{a_2^{(i)}(x-x_{i-1})[(x-x_{i-1})^2-h_{i-1}^2]}{3h_{i-1}}+ \tag{I.I7}$$

$$+f(x_{i-1};x_i)(x-x_{i-1})+f(x_{i-1}); \quad (i=1,2,\ldots,N)$$

б) Если из исходных уравнений исключить $a_2^{(i)}$ и $a_3^{(i)}$, то можно построить систему уравнений относительно $a_1^{(i)}$ [8]. Проще всего ее получать из (I.II), исключая $a_2^{(i)}$ с помощью формул (I.I0):

$$\beta_i a_1^{(i-1)}+2a_1^{(i)}+\alpha_i a_1^{(i+1)}=3[\beta_i f(x_{i-1};x_i)+\alpha_i f(x_i;x_{i+1})]=c_i \tag{I.I8}$$
$$(i=1,2,\ldots,N-1).$$

Граничные условия (I.I2) переходят в уравнения

$$\left.\begin{aligned}&2a_1^{(0)}+\alpha_0 a_1^{(1)}=(2+\alpha_0)\Big[f(x_0;x_1)-\frac{(2-\alpha_0)}{2+\alpha_0}h_0 f(x_{i_{-1}};x_{i_0};x_{i_1})\Big],\\&\beta_N a_1^{(N-1)}+2a_1^{(N)}=(2+\beta_N)\Big[f(x_{N-1};x_N)+\frac{(2-\beta_N)}{2+\beta_N}h_{N-1}\times\\&\qquad\times f(x_{i_{N-1}};x_{i_N};x_{i_{N+1}})\Big],\end{aligned}\right\} \tag{I.I9}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{4(1-\beta_0)}{4-\beta_0}=\frac{2[(2)_p h_0+(3)_p h_{-1}]h_{-1}}{(1)_p h_0^2+2(2)_p h_{-1}h_0+(3)_p h_{-1}^2};\\ \beta_N&=\frac{4(1-\alpha_N)}{4-\alpha_N}=\frac{2[(2)_p h_{N-1}+(3)_p h_N]h_N}{(1)_p h_{N-1}^2+2(2)_p h_{N-1}h_N+(3)_p h_N^2}.\end{aligned} \tag{I.20}$$

Особенно простой вид уравнения (I.I9) принимают для многозвенников типа I, где p = I, $h_{-1}=h_N=0$, $\alpha_0=\beta_N=0$ и, в силу (I.I4а), уравнения имеют вид:

$$2a_1^{(0)}=2f'(x_0), \quad 2a_1^{(N)}=2f'(x_N). \tag{I.I9а}$$

Для типа II $\alpha_0=\beta_N=1$

В общем случае, так как $h_0>0$, $h_{-1}\geqslant 0$, $h_{N-1}>0$, $h_N\geqslant 0$, то $0\leqslant\alpha_0<2$, $0\leqslant\beta_0<2$.

Условия периодичности (I.I5) преобразуются в равенства, по-

добные (I.I8), при этом $a_1^{-1}=a_1^{(N)}$ и $a_1^{(N+1)}=a_1^{(0)}$.

Уравнения составляющих функцию $S(x)$ полиномов через $a_1^{(i)}$ получаются из (I.I7) в виде:

$$P_{i-1}(x)=u_{i-1}(x)a_1^{(i-1)}-v_{i-1}(x)a_1^{(i)}+w_{i-1}(x)f(x_{i-1};x_i)+\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \tag{I.2I}$$

где

$$u_{i-1}(x)=\frac{(x_i-x)^2(x-x_{i-1})}{h_{i-1}^2}, \quad v_{i-1}(x)=\frac{(x-x_{i-1})^2(x_i-x)}{h_{i-1}^2}, \tag{I.22}$$

$$w_{i-1}(x)=\frac{1}{h_{i-1}^2}\Big(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big)[(x_i-x)^2+4(x_i-x)(x-x_{i-1})+(x-x_{i-1})^2].$$

в) Построим систему уравнений для $a_3^{(i)}$. Возьмем уравнения (I.II) с добавленными в начале и конце уравнениями (I.I2) или (I.I5).

В периодическом случае сохраним исходную нумерацию узлов (без изменения, сделанного в а)) и вычтем из каждого последующего уравнения предыдущее и еще из первого последнее. Учитывая (I.9), будем иметь

$$\begin{aligned}&\alpha_i h_{i-1}a_3^{(i-1)}+(1+\alpha_i+\beta_i)h_i a_3^{(i)}+\beta_{i+1}h_{i+1}a_3^{(i+1)}=\\&=f(x_i;x_{i+1};x_{i+2})-f(x_{i-1};x_i;x_{i+1}) \quad (i=0,1,\ldots,N-1).\end{aligned} \tag{I.23}$$

Здесь происходит циклическая замена индексов -1 на $N-1$ и N на 0.

Для непериодических многозвенников осуществляется только вычитание из последующих уравнений предыдущих. При этом уравнения, в формировании которых участвуют граничные условия (I.I2), имеют вид:

$$\begin{aligned}&[\alpha_0'' h_{-1}+(1+\alpha_0'+\beta_1)h_0]a_3^{(0)}+\beta_1 h_1 a_3^{(1)}=\\&=f(x_0;x_1;x_2)-f(x_{i_{-1}};x_{i_0};x_{i_1}),\end{aligned} \tag{I.24}$$

$$\alpha_{N-1}h_{N-2}a_3^{(N-2)}+[(1+\alpha_{N-1}+\beta_N')h_{N-1}+\beta_N''h_N]a_3^{(N-1)}=$$

$$= f(x_{i_{N-1}}; x_{i_N}; x_{i_{N+1}}) - f(x_{N-2}; x_{N-1}; x_N),$$

где

$$\alpha_0' = \frac{(2)_p h_{-1}}{(1)_p h_0 + (2)_p h_{-1}}, \quad \alpha_0'' = \frac{(3)_p h_{-1}}{(1)_p h_0 + (2)_p h_{-1}}; \tag{I.25}$$

$$\beta_N' = \frac{(2)_p h_N}{(1)_p h_{N-1} + (2)_p h_N}, \quad \beta_N'' = \frac{(3)_p h_N}{(1)_p h_{N-1} + (2)_p h_N}.$$

Для непериодических многозвенников количество уравнений по сравнению с вариантами а) и в) уменьшилось на единицу, и, как в периодическом случае, их число равно числу звеньев многозвенника.

4. Существование и единственность. Будем рассматривать неизвестные $\alpha_2^{(i)}$ как вектор-столбец α_2 в $N+1$ - мерном векторном пространстве $R^{(N+1)}$, а правые части в уравнениях как вектор-столбец d. Коэффициенты системы образуют матрицу Q_2. Тогда уравнения (I.II) вместе с краевыми условиями (I.I6) можно записать в единой форме:

$$Q_2 \alpha_2 = d \tag{I.26}$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \beta_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-1} & 2 & \beta_{N-1} \\ \beta_N & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2^{(0)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_2^{(N-2)} \\ \alpha_2^{(N-1)} \\ \alpha_2^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \tag{I.26a}$$

Для граничных условий I-III $(\alpha_0 = \beta_N = 0)$ матрица является трехдиагональной, а в периодическом случае присутствуют недиагональные члены $\alpha_0 \neq 0$ и $\beta_N \neq 0$.

ТЕОРЕМА I.I. Для любых значений функции $f(x)$ на некоторой последовательности точек x_i существует и притом единственный кубический многозвенник $S(x)$, интерполирующий ее в заданных узлах x_i $(i = 0, 1, \dots, N)$ и удовлетворяющий на концах условиям одного из типов I - IУ. При этом в случаях I-III предполагается существование производных функции $f(x)$ на концах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы матрицы Q_2 удовлетворяют условиям Адамара [IO] (гл. XIУ) (см. также [II] гл. 6):

$$|q_{ii}| - \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^{N} |q_{ij}| > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N), \tag{I.27}$$

иначе говоря, диагональные элементы являются доминирующими. Действительно, в (I.26) $q_{ii} = 2$, а $\sum_{j=0, j\neq i}^{N} |q_{ij}| < 2$ для любого типа условий I-IУ.

Такая матрица является невырожденной, и существует обратная ей матрица Q_2^{-1}. Но тогда система уравнений (I.26) имеет единственное решение. Соотношения (I.9) и (I.IO) однозначно определяют остальные коэффициенты кубического многозвенника. Теорема доказана.

В 8 эта теорема (теорема 2.9.I) формулируется для более общих непериодических граничных условий. Но тогда на коэффициенты приходится наложить ограничения $|\beta_0| < 4$, $|\alpha_N| < 4$. Кстати, это верно только при $N > 1$; при $N = 1$ из (I.I2) следует, что матрица вырожденная, если $\beta_0 \alpha_N = 4$.

В правых частях уравнений (I.26) стоят вторые разделенные разности и их аналоги с повторяющимися аргументами, которые не меняются, если вместо $f(x_i)$ взять $f(x_i) + kx_i + c$ и соответственно $f'(x_i)$ заменить на $f'(x_i) + k$ $(i = 0, N)$. Но тогда $\alpha_2^{(i)}$ тоже сохраняют свои значения, а вместе с ними и $\alpha_3^{(i)}$ (I.9), $\alpha_1^{(i)}$ изменяются на k; $\alpha_0^{(i)}$ - на $kx_i + c$. В результате вместо $S(x)$ получаем кубический многозвенник $S(x) + kx + c$. В периодическом случае непериодический член kx присутствовать не может. Таким образом, одна и та же система уравнений дает решение задач для двупараметрического семейства непериодических функций $f(x)$ или однопараметрического семейства периодических функций.

§ 2. Алгоритм построения интерполяционного кубического многозвенника

По исходным данным: массивам $x_i,\ f(x_i)\ (i=0,1,\dots,N)$ и условиям на концах формируется матрица Q_2 системы (I.26).

Последняя является частным случаем более общей системы с матрицей Q:

$$Qt=d, \qquad (2.1)$$

или

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-2} & \beta_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-1} & \gamma_{N-1} & \beta_{N-1} \\ \beta_N & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_N & \gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{N-2} \\ t_{N-1} \\ t_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \qquad (2.1а)$$

Систему уравнений (2.I) будем решать методом прогонки. В [I2] (гл. IУ и доп. II) этот метод изложен для систем с трехдиагональной матрицей в случае $\alpha_i>0,\ \beta_i>0,\ \gamma_i<0$ при выполнении условий Адамара $-\gamma_i>\alpha_i+\beta_i$. Метод прогонки обладает устойчивостью в том смысле, что ошибки за счет округления прогрессивно не нарастают. Вариант этого метода для периодических решений разработан в [I3]. Мы дадим обоснование этого варианта для других ограничений на коэффициенты системы уравнений и применим его к решению нашей задачи.

В рассматриваемой задаче интерполирования коэффициенты подчиняются ограничениям:

$$0<\alpha_i<1,\quad 0<\beta_i<1,\quad \gamma_i>1+\alpha_i+\beta_i,\ (i=1,2,\dots,N-1),$$
$$\gamma_i>|\alpha_i|+|\beta_i| \qquad (i=0,N). \qquad (2.2)$$

Представим решение системы (2.I) в виде:

$$t_i=p_i+q_i t_N \qquad (i=0,1,\dots,N), \qquad (2.3)$$

где $p_N=0,\ q_N=1$, и рассмотрим первые N уравнений системы (2.I).

Введем векторы-столбцы $p\{p_0,\dots,p_{N-1}\}$, $q\{q_0,\dots,q_{N-1}\}$, $\tilde d\{d_0,\dots,d_{N-1}\}$. Матрицу первых N уравнений разобьем на

квадратную матрицу $\tilde Q$ из первых N столбцов и вектор-столбец $r\{\alpha_0,0,\dots,0,\beta_{N-1}\}$. Тогда эти уравнения можно записать в виде

$$\tilde Q(p+qt_N)+rt_N=\tilde d.$$

Отсюда, рассматривая t_N как параметр, получаем две системы

$$\tilde Q p=\tilde d;\quad \tilde Q q=-r. \qquad (2.4)$$

Решения этих систем находятся обычным методом прогонки [I2]. Представим p_i и q_i в виде

$$\left.\begin{aligned} p_i &= B_i p_{i+1}+D_i, \\ q_i &= B_i q_{i+1}+A_i, \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\dots,N-1) \qquad (2.5)$$

Подставляя их в (2.4), получим рекуррентные формулы прогоночных коэффициентов

$$A_i=-\frac{\alpha_i A_{i-1}}{\gamma_i+\alpha_i B_{i-1}},\quad B_i=-\frac{\beta_i}{\gamma_i+\alpha_i B_{i-1}},\quad D_i=\frac{d_i-\alpha_i D_{i-1}}{\gamma_i+\alpha_i B_{i-1}}, \qquad (2.6)$$

где $i=0,1,\dots,N$ и формально введены $A_{-1}=1,\ B_{-1}=D_{-1}=0$.

Учитывая, что $p_N=0$ и $q_N=1$, имеем

$$p_{N-1}=D_{N-1},\quad q_{N-1}=B_{N-1}+A_{N-1}, \qquad (2.7)$$

и по формулам (2.5) обратной прогонкой находим все значения p_i и q_i.

Из последнего уравнения исходной системы (2.Iа) вычисляем t_N:

$$t_N=\frac{D_N+B_N p_0}{1-A_N-B_N q_0}. \qquad (2.8)$$

Наконец, по формулам (2.3) вычисляются остальные компоненты решения t_i. Для непериодического случая $\alpha_0=0$ и $A_i=0$ при $i\geqslant 0$; $\beta_N=0,\ B_N=0,\ t_N=D_N$; тогда $t_i=B_i t_{i+1}+D_i$.

Покажем устойчивость этого алгоритма при ограничениях (2.2). Оказывается, здесь это можно проделать проще, чем в [I2], достаточно применить рассуждения, сделанные для одного специального типа систем уравнений в дополнении II к [I2] И.М.Гельфанда и О.В. Локуциевского.

Если $|B_{i-1}|<1$, то $|B_i|<1$, так как из (2.2) очевидно, что $\gamma_i+\alpha_i\beta_{i-1}>1$, а $\beta_i<1$. Но $|B_0|=\frac{\beta_0}{\gamma_0}<1$, следовательно, $|B_i|<1$. Далее, величина

$$C_i=\frac{1}{\gamma_i+\alpha_i B_{i-1}}<1$$

для всех i. Поэтому при прямой и обратной прогонках (формулы (2.6) и (2.5)) погрешность, допущенная в определении величин $A_{i-1}, \mathcal{D}_{i-1}, P_{i+1}, Q_{i+1}$, умножается в процессе счета на величины, по модулю меньшие единицы, т.е. прогрессивного нарастания погрешности не происходит, хотя она может увеличиться за счет операций сложения. Что касается самой величины C_i, то, проварьировав $\mathcal{B}_i$ и C_i, найдем

$$\delta\mathcal{B}_i = \frac{\alpha_i\beta_i\,\delta\mathcal{B}_{i-1}}{(\gamma_i+\alpha_i\mathcal{B}_{i-1})^2}\,, \qquad \delta C_i = -\frac{\alpha_i\,\delta\mathcal{B}_{i-1}}{(\gamma_i+\alpha_i\mathcal{B}_{i-1})^2}\,.$$

Из этих соотношений видно, что погрешности $\delta\mathcal{B}_i$ и δC_i не возрастают при переходе к следующей точке.

Далее, знаменатель в (2.8) в нуль не обращается. Действительно, заметим, во-первых, что если $|A_{i-1}|<1$, то $|A_i|<1$. Во-вторых, если $|A_{i-1}+\mathcal{B}_{i-1}|<1$, то

$$|A_i+\mathcal{B}_i| = \left|\frac{\alpha_i A_{i-1}+\beta_i}{\gamma_i+\alpha_i\mathcal{B}_{i-1}}\right| \leqslant \frac{\alpha_i+\beta_i}{1+\beta_i} < 1 \quad (i=1,\dots,N-1).$$

Но $|A_0+\mathcal{B}_0| = \dfrac{\alpha_0+\beta_0}{\gamma_0}<1$, следовательно, $|A_i+\mathcal{B}_i|<1$ для всех i. Из (2.7) вытекает, что $|Q_{N-1}|<1$, а привлекая (2.5), получаем $|Q_i|<1$. Отсюда следует, что

$$1-A_N-\mathcal{B}_N Q_0>0\,.$$

Таким образом, метод прогонки при ограничениях (2.2) корректен.

§ 3. Случай равноотстоящих узлов

Если узлы интерполяции расположены на одинаковых расстояниях друг от друга

$$h_i = h = const \qquad \text{и} \qquad x_i = x_0+ih\,,$$

то уравнения в задаче интерполирования кубическими многозвенниками упрощаются.

Основная система (I.II) принимает вид:

$$a_2^{(i-1)}+4a_2^{(i)}+a_2^{(i+1)} = 3\,\frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \qquad (i=1,2,\dots,N-1), \tag{3.I}$$

где $\Delta^2 f_i = f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}$ – конечные разности второго порядка.

Граничные условия (I.I6) запишем в прежнем виде:

$$\left.\begin{aligned} &2a_2^{(0)}+\beta_0 a_2^{(1)}+\alpha_0 a_2^{(N)} = (2+\alpha_0+\beta_0)f(x_{i_1};x_{i_0};x_{i_1}),\\ &\beta_N a_2^{(0)}+\alpha_N a_2^{(N-1)}+2a_2^{(N)} = (2+\alpha_0+\beta_0)f(x_{i_{N-1}};x_{i_N};x_{i_{N+1}}). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

В периодическом случае $\alpha_0=\beta_0=\alpha_N=\beta_N=\frac{1}{2}$, а правые части аналогичны правым частям основной системы (3.I).

Уравнения (3.I) с равенствами (3.2) представляют собой частный случай системы

$$\alpha t_{i-1}+\gamma t_i+t_{i+1} = d_i \quad (i=1,2,\dots,N-1) \tag{3.3}$$

где α и γ отличны от нуля, с двумя дополнительными соотношениями между t_0, t_1, t_{N-1}, t_N:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 t_0+\alpha_1 t_1+\alpha_{N-1}t_{N-1}+\alpha_N t_N = d_0\\ &\beta_0 t_0+\beta_1 t_1+\beta_{N-1}t_{N-1}+\beta_N t_N = d_N \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Решение такой системы можно получить в явном виде. В [IO] (стр. 36-37) изложен способ решения бесконечных систем рекуррентных уравнений вида (3.3) с нулевыми правыми частями при заданных t_0 и t_1. В этом способе неизвестные явно выражаются через коэффициенты α и γ. Мы предлагаем видоизменение этого метода для решения конечных систем с произвольными правыми частями.

Рассматривается система (3.3) без уравнений (3.4), но с присоединенными четырьмя тождествами:

$$\left.\begin{array}{lll} t_0 & = t_0 & = d_{-1}\,,\\ t_1+\gamma t_0 & = t_1+\gamma t_0 & = d_0\,,\\ t_2+\gamma t_1+\alpha t_0 & = d_1 & = d_1\,,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\\ t_{i+1}+\gamma t_i+\alpha t_{i-1} & = d_i & = d_i\,,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\\ t_N+\gamma t_{N-1}+\alpha t_{N-2} & = d_{N-1} & = d_{N-1}\,,\\ \gamma t_N+\alpha t_{N-1} & = \gamma t_N+\alpha t_{N-1} & = d_N\,,\\ \alpha t_N & = \alpha t_N & = d_{N+1}\,, \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Умножая равенства (3.5) на τ^i (τ – параметр) и складывая их, получаем

$$T(\tau)(1+\gamma\tau+\alpha\tau^2) = d(\tau)\,, \tag{3.6}$$

где

$$T(\tau)=\sum_{i=0}^{N} t_i \tau^i, \quad \alpha(\tau)=\sum_{i=0}^{N+2} \alpha_{i-1}\tau^i.$$

Учитывая тождество

$$1+\gamma\tau+\alpha\tau^2=(1-s_1\tau)(1-s_2\tau),$$

где s_1^{-1} и s_2^{-1} – корни трехчлена, (3.6) можно переписать в виде:

$$T(\tau)=\frac{\alpha(\tau)}{(1-s_1\tau)(1-s_2\tau)}.$$

Полагая далее $s_1 \neq s_2$, представим

$$T(\tau)=\frac{1}{s_1-s_2}\sum_{i=0}^{N+2}\alpha_{i-1}\left(\frac{s_1}{1-s_1\tau}-\frac{s_2}{1-s_2\tau}\right)\tau^i \qquad (3.7)$$

и разложим каждый член суммы справа $w_i(\tau)$ по степеням τ.

Производные функций $w_i(\tau)$ по τ определяются как производные произведения $w_i(\tau)=u_i(\tau)v_i(\tau)$:

$$w_i^{(\rho)}(\tau)=\sum_{\nu=0}^{\rho} C_\rho^\nu u_i^{(\rho-\nu)}(\tau)v_i^{(\nu)}(\tau),$$

где C_ρ^ν – число сочетаний из ρ по ν и принято, что $C_\rho^0=1$.

Расписывая эту формулу подробнее, находим

$$w_i^{(\rho)}(\tau)=\sum_{\nu=0}^{\rho} C_\rho^\nu(\rho-\nu)!(i)_\nu\left[\left(\frac{s_1}{1-s_1\tau}\right)^{\rho-\nu+1}-\left(\frac{s_2}{1-s_2\tau}\right)^{\rho-\nu+1}\right]\tau^{i-\nu},$$

где $(\rho-\nu)!$ – факториал $(0!=1)$, а $(i)_\nu=i(i-1)\dots(i-\nu+1)$.

Заметим, что $C_\rho^i(\rho-i)!(i)_i=\rho!$. Вычисляя $w_i^{(\rho)}(\tau)$ в точке $\tau=0$, легко видеть, что

$$w_i^{(\rho)}(0)=0 \quad \text{при } \rho<i,$$

$$w_i^{(\rho)}(0)=\rho!(s_1^{\rho-i+1}-s_2^{\rho-i+1}) \quad \text{при } \rho\ge i,$$

и, следовательно,

$$w_i(\tau)=\sum_{\rho=i}^{\infty}(s_1^{\rho-i+1}-s_2^{\rho-i+1})\tau^\rho, \quad (i=0,1,\dots,N+2). \qquad (3.8)$$

Левая часть формулы (3.7) есть полином степени N. Поэтому и правая часть должна быть полиномом N-й степени и при подстановке (3.8) в (3.7) члены, содержащие τ в высших степенях, должны давать нуль. В результате имеем

$$T(\tau)=\frac{1}{s_1-s_2}\sum_{i=0}^{N}\alpha_{i-1}\left[\sum_{\rho=i}^{N}(s_1^{\rho-i+1}-s_2^{\rho-i+1})\tau^\rho\right]. \qquad (3.9)$$

Преобразуем двойную сумму по формуле:

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{\rho=i}^{N} C_{i\rho}=\sum_{j=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{j} C_{\nu j}$$

Тогда получим, сохранив первый индекс i:

$$T(\tau)=\frac{1}{s_1-s_2}\sum_{i=0}^{N}\left[\sum_{\nu=0}^{i}\alpha_{\nu-1}(s_1^{i-\nu+1}-s_2^{i-\nu+1})\right]\tau^i. \qquad (3.10)$$

Приравнивая коэффициенты при τ^i слева и справа, находим

$$t_i=\frac{1}{s_1-s_2}\sum_{\nu=0}^{i}\alpha_{\nu-1}(s_1^{i-\nu+1}-s_2^{i-\nu+1}) \quad (i=0,1,\dots,N). \qquad (3.11)$$

Или, выделяя α_{-1} и α_0, содержащие неизвестные t_0 и t_1, и учитывая, что $s_1+s_2=-\gamma$, $s_1 s_2=\alpha$, получим

$$t_i=\frac{1}{s_1-s_2}\left[-t_0\alpha(s_1^{i-1}-s_2^{i-1})+t_1(s_1^{i}-s_2^{i})+O_i\sum_{\nu=1}^{i-1}\alpha_\nu(s_1^{i-\nu}-s_2^{i-\nu})\right] \qquad (3.12)$$

$$(i=0,1,\dots,N).$$

Здесь мы ввели символ O_i для целочисленных i

$$O_i=\begin{cases}0, & \text{если } i\le 1,\\ 1, & \text{если } i>1.\end{cases}$$

Если $\alpha_\nu=0$ $(\nu=1,2,\dots,N-1)$, то выражения (3.II) (или 3.I2) совпадают с полученными в [I9] для бесконечных систем.

Если $s_1=s_2=s$, то вместо формул (3.I2а) имеют место следующие равенства

$$t_i=-t_0(i-1)s^i+t_1 i s^{i-1}+O_i\sum_{\nu=1}^{i-1}\alpha_\nu(i-\nu)s^{i-\nu-1}. \qquad (3.12a)$$

$$(i=0,1,\dots,N)$$

Решение системы (3.5) выразилось через неизвестные t_0 и t_1. Подставляя t_{N-1} и t_N из (3.I2) (или (3.I2а)) в дополнительные уравнения (3.4), получаем систему для определения t_0 и t_1. Если ранг матрицы этой системы равен 2, то исходная система (3.3) – (3.4) имеет единственное решение. Если он меньше 2, то решение выражается через параметр t_0 или t_0 и t_1.

Для нашей системы (3.I) $\alpha=1$, $\gamma=4$ и s_1 и s_2 – корни уравнения $s^2+4s+1=0$, т.е.

$$s_1 = s_2^{-1} = -2+\sqrt{3}, \quad s_2 = s_1^{-1} = -2-\sqrt{3}. \tag{3.13}$$

Будем ради сокращения записи обозначать

$$\zeta_k = s_1^k - s_2^k$$

и отметим легкопроверяемое тождество:

$$\zeta_k \zeta_\ell - \zeta_{k-1}\zeta_{\ell+1} = \zeta_1 \zeta_{\ell-k+1} \tag{3.14}$$

Тогда $a_2^{(i)}$ выражаются формулами типа (3.12):

$$a_2^{(i)} = \frac{1}{\zeta_1}\Big[-a_2^{(0)}\zeta_{i-1} + a_2^{(1)}\zeta_i + 0_i\sum_{\nu=1}^{i-1}\alpha_\nu \zeta_{i-\nu}\Big] \tag{3.15}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, N)$$

Подставляя отсюда $a_2^{(N-1)}$ и $a_2^{(N)}$ в (3.2), получаем систему для определения $a_2^{(0)}$ и $a_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big(2-\frac{\alpha_0\zeta_{N-2}}{\zeta_1}\Big)a_2^{(0)} + \Big(\beta_0 + \frac{\alpha_0\zeta_{N-1}}{\zeta_1}\Big)a_2^{(1)} = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\zeta_1}\sum_{\nu=1}^{N-2}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu-1} -\\
&-\frac{1}{\zeta_1}(\alpha_N\zeta_{N-2} + 2\zeta_{N-1})a_2^{(0)} + \Big(\beta_N + \frac{\alpha_N\zeta_{N-1}+2\zeta_N}{\zeta_1}\Big)a_2^{(1)} =\\
&\qquad = \alpha_N - \frac{1}{\zeta_1}\Big(\alpha_N\sum_{\nu=1}^{N-2}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu-1} + 2\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu}\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Определитель этой системы $\mathcal{D}$ должен быть отличен от нуля, так как ранг матрицы системы (3.1) – (3.2) равен $N+1$, что следует из теоремы существования и единственности (§ I). Действительно, принимая во внимание (3.14),

$$\mathcal{D} = \frac{4\zeta_N}{\zeta_1} + 2(\alpha_N + \beta_0)\frac{\zeta_{N-1}}{\zeta_1} + 2(\alpha_0+\beta_N) + (\alpha_N\beta_0 - \alpha_0\beta_N)\frac{\zeta_{N-2}}{\zeta_1} \tag{3.17}$$

и ни в одном из случаев I-IУ в нуль не обращается. Из (3.16) находим

$$a_2^{(0)} = \frac{A_0}{\mathcal{D}_1}, \quad a_2^{(1)} = \frac{A_1}{\mathcal{D}_1}, \tag{3.18}$$

где в силу (3.14) $\mathcal{D}_1 = \zeta_1\mathcal{D}$ и

$$A_0 = \alpha_0(2\zeta_N + \alpha_N\zeta_{N-1} + \beta_N\zeta_1) - \alpha_N(\alpha_0\zeta_{N-1} + \beta_0\zeta_1) +$$

$$+ 2\alpha_0\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_\nu + 2\beta_0\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu} + (\alpha_N\beta_0 - \alpha_0\beta_N)\sum_{\nu=1}^{N-2}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu-1},$$

$$A_1 = \alpha_0(2\zeta_{N-1} + \alpha_N\zeta_{N-2}) - \alpha_N(\alpha_0\zeta_{N-2} - 2\zeta_1) + 2\alpha_0\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{\nu-1} -$$

$$-4\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu} - 2\alpha_N\sum_{\nu=1}^{N-2}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu-1}.$$

Тогда из (3.15) и (3.18), учитывая (3.14), находим

$$a_2^{(i)} = \frac{1}{\mathcal{D}_1}\Big[\alpha_0(2\zeta_{N-i} + \alpha_N\zeta_{N-i-1} - \beta_N\zeta_{i-1}) + \alpha_N(-\alpha_0\zeta_{N-i-1} +$$

$$+ 2\zeta_i + \beta_0\zeta_{i-1}) - 2\alpha_0\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{i-\nu} - \frac{2}{\zeta_1}(\beta_0\zeta_{i-1} + 2\zeta_i)\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu} -$$

$$-\frac{1}{\zeta_1}\Big(\zeta_{i-1}(\alpha_N\beta_0 - \alpha_0\beta_N) - \frac{2\alpha_N\zeta_i}{\zeta_1}\Big)\sum_{\nu=1}^{N-2}\alpha_\nu\zeta_{N-\nu-1}\Big] + \frac{0_i}{\zeta_1}\sum_{\nu=1}^{i-1}\alpha_\nu\zeta_{i-\nu} \tag{3.19}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, N).$$

Итак, получены явные формулы для решения в случае равноотстоящих узлов интерполирования сразу для всех типов граничных условий. В [8] аналогичные формулы выведены непосредственно вычислением определителей в формулах Крамера для каждого типа граничных условий в отдельности.

§ 4. Оценки остаточных членов

I. В в о д н ы е з а м е ч а н и я. При использовании интерполяционных формул нужно знать погрешность интерполяции, иначе говоря, величину остаточного члена

$$R^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x) \tag{4.1}$$

для самой функции $f(x)$ $(r = 0)$ и, быть может, для ее производных, в данном случае не выше третьей (r = 1,2,3). В [8] такая формула выведена для одного класса функций $f(x)$ (формула (3.16.7)), но, как это обычно бывает, она не удобна для фактического вычисления погрешности и здесь не приводится. Поэтому в работах по интерполированию кубическими многозвенниками ограничиваются оценками сверху остаточных членов и доказывают сходимость процесса [4–9]. Эти вопросы изучаются для функций $f(x)$ классов $C^\nu[a, b]$ (ν = 0,1,2,3,4).

В данном параграфе выводятся оценки. Для многозвенников с условиями типов I, II и IV мы получаем либо новые оценки, либо улучшаем уже имеющиеся. Условия типа III изучались в [8] в рамках более общих граничных условий, но там явных оценок получено не было, и здесь они представлены впервые. Кроме того, мы выражаем оценки через изменения функций $f^{(\nu)}(x)$ на интервалах $[x_{i-1}, x_i]$, а не через их модуль непрерывности, так как это удобнее для фактического вычисления погрешностей. Модуль непрерывности будет использоваться лишь при доказательстве сходимости в § 5.

Предварительно напомним некоторые понятия линейной алгебры и теории функций.

Пусть имеется $N+1$ -мерное векторное пространство. Каждый его вектор t характеризуется **н о р м о й** ; будем использовать "кубическую" норму

$$\| t \| = \max_i |t_i| .$$

Пусть в этом пространстве задано линейное преобразование векторов с матрицей Q

$$s = Qt .$$

Тогда **н о р м у м а т р и ц ы** можно определить как (см. [10], гл. XIV, а также [11], гл. 6)

$$\| Q \| = \sup_{t \neq 0} \frac{\| Qt \|}{\| t \|} ,$$

и показать, что

$$\| Q \| = \max_i \sum_{j=0}^{N} |q_{ij}| ,$$

где q_{ij} - элементы матрицы Q.

Если Q - невырожденная матрица, то существует ей обратная Q^{-1}, для которой

$$\| Q^{-1} \| = \sup_{t \neq 0} \frac{\| t \|}{\| Qt \|} .$$

Попутно отметим полезное неравенство

$$\| t \| \leq \| Q^{-1} \| \cdot \| Qt \| .$$

Предположим теперь, что Q имеет доминирующие диагональные элементы. Пусть k таково, что $\| t \| = |t_k|$. Тогда

$$\| Qt \| = \max_i \Big| \sum_{j=0}^{N} q_{ij} t_j \Big| \geq \Big| \sum_{j=0}^{N} q_{kj} t_j \Big| \geq \Big(|q_{kk}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N} |q_{kj}| \Big) \| t \| \geq$$

$$\geq \min_i \Big(|q_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} |q_{ij}| \Big) \| t \| .$$

Следовательно,

$$\| Q^{-1} \| \leq \Big[\min_i \Big(|q_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} |q_{ij}| \Big) \Big]^{-1} . \qquad (4.2)$$

Для матрицы Q_2 системы уравнений (I.16), а также матрицы Q_1 системы (I.18) (с условиями (I.19) или условиями периодичности) будут верны неравенства:

$$\| Q_\ell^{-1} \| \leq \max \left[1, (2 - |\alpha_0| - |\beta_0|)^{-1}, (2 - |\alpha_N| - |\beta_N|)^{-1} \right] \quad (\ell = 1, 2) \qquad (4.3)$$

В случае периодических многозвенников $\alpha_0 + \beta_0 = 1$, $\alpha_N + \beta_N = 1$. Для непериодических многозвенников с условиями на концах типов I и II $\alpha_0 + \beta_0 \leq 1$, $\alpha_N + \beta_N \leq 1$. Тогда в указанных случаях

$$\| Q_\ell^{-1} \| \leq 1 \quad (\ell = 1, 2) . \qquad (4.3a)$$

Функция $f(x)$ будет рассматриваться на отрезке $[a', b']$. Он совпадает с $[a, b]$ для периодических многозвенников и многозвенников с условиями I и II. Если же на конце задано условие III (I.5), то $[a', b']$ совпадает с расширенным отрезком, то есть $a' = x_0$ или x_{-1}, а $b' = x_N$ или x_{N+1}.

Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a', b']$. Будем рассматривать ее изменение на интервалах $[x_{i-1}, x_i]$

$$|\delta_i f| = \max_{x_{i-1} \leq x', x'' \leq x_i} |f(x'') - f(x')| ,$$

а также

$$\nabla f = \max_i |\delta_i f|$$

при фиксированном разбиении промежутка $[a, b]$.

Относительно разбиения в некоторых случаях будет предполагаться, что

$$\frac{H}{\min_i h_i} \leq K < \infty , \quad H = \max_i h_i . \qquad (4.4)$$

В других случаях будут рассматриваться ограниченные отношения

$$\frac{1}{\rho} < \frac{h_{i+1}}{h_i} < \rho , \quad 1 \leq \rho < \infty . \qquad (4.5)$$

2. **О ц е н к и д л я н е п р е р ы в н ы х ф у н к ц и й (к л а с с C^0).** Для непрерывных функций оценка остаточного члена при условии (4.4) рассматривалась в работах [7] и [8]. Мы получаем более сильную оценку в смысле порядка при том же условии (4.4), а также оценку при условии (4.5).

Пусть $f(x)$ - непрерывная на $[a', b']$ функция. Она интерполируется периодическим многозвенником или многозвенником типа III при $\rho = 0$. Из (4.I) и (I.2I) на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$

$$R(x)=f(x)-u_{i-1}(x)\alpha_i^{(i-1)}+v_{i-1}(x)\alpha_i^{(i)}-w_{i-1}(x)f(x_{i-1};x_i)-\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]. \qquad (4.6)$$

Отсюда

$$|R(x)|\le\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{w_{i-1}(x)}{h_{i-1}}\right)[f(x)-f(x_{i-1})]\right|+\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{w_{i-1}(x)}{h_{i-1}}\right)[f(x)-f(x_i)]\right|+|u_{i-1}(x)\alpha_i^{(i-1)}-v_{i-1}(x)\alpha_i^{(i)}|. \qquad (4.7)$$

Для оценки членов, входящих в это неравенство, рассмотрим систему уравнений (I.18) (с условиями (I.19) или условиями периодичности):

$$Q_i\alpha_i=C. \qquad (4.8)$$

Компоненты вектора C определяются в (I.18) для внутренних точек и граничных точек в периодическом случае. Если многозвенник непериодический, то из (I.14), (I.19) и (I.20) при $\rho=0$ имеем

$$C_0=(2+\alpha_0)\left[\beta^{(0)}\frac{\Delta f_{-1}}{h_{-1}}+\alpha^{(0)}\frac{\Delta f_0}{h_0}\right],$$
$$C_N=(2+\beta_N)\left[\beta^{(N)}\frac{\Delta f_{N-1}}{h_{N-1}}+\alpha^{(N)}\frac{\Delta f_N}{h_N}\right], \qquad (4.9)$$

где $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ — конечные разности первого порядка. Величины $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\alpha^{(N)}$ и $\beta^{(N)}$ выпишем сразу для $\rho=0,1$, чтобы не повторять этого в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^{(0)}=\frac{[3(2)_\rho h_0+2(3)_\rho h_{-1}]h_{-1}}{(1)_\rho h_0^2+3(2)_\rho h_0h_{-1}+2(3)_\rho h_{-1}^2},\quad \beta^{(0)}=1-\alpha^{(0)},\\ &\alpha^{(N)}=\frac{(1)_\rho h_{N-1}^2}{(1)_\rho h_{N-1}^2+3(2)_\rho h_{N-1}h_N+2(3)_\rho h_N^2},\quad \beta^{(N)}=1-\alpha^{(N)}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Будем рассматривать далее два случая, соответствующие ограничениям а) (4.4) и б) (4.5), которые распространяем и на h_{-1}, h_N.

а) В силу (I.18) и (4.9) для любых многозвенников можно записать, что

$$\|C\|\le\max(3,2+\alpha_0+\beta_0,2+\alpha_N+\beta_N)\frac{\Delta f}{\min\limits_i h_i}. \qquad (4.11)$$

Из (4.8), (4.3а) и (4.11) очевидно следующее:

$$\|\alpha_i\|\le\|Q_i^{-1}\|\,\|C\|\le\max\left(3,\frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-\alpha_0-\beta_0},\frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-\alpha_N-\beta_N}\right)\frac{\nabla f}{\min\limits_i h_i} \qquad (4.12)$$

Здесь учтено, что в системе (4.8) $\alpha_0,\beta_0,\alpha_N,\beta_N\ge 0$

Из (I.22) нетрудно видеть, что

$$u_{i-1}(x)\ge 0,\ v_{i-1}(x)\ge 0,\ -\frac{1}{2}h_{i-1}\le w_{i-1}(x)\le\frac{1}{2}h_{i-1}$$
$$\max_{x_{i-1}\le x\le x_i}(u_{i-1}(x)+v_{i-1}(x))=\frac{1}{4}h_{i-1}.$$

Тогда из (4.7), (4.4) и (4.12) следует, что

$$|R(x)|\le A_0\nabla f, \qquad (4.13)$$

где

$$A_0=1+\frac{1}{4}K\max\left(3,\frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-\alpha_0-\beta_0},\frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-\alpha_N-\beta_N}\right).$$

Учитывая, что в периодическом случае $\alpha_0+\beta_0=\alpha_N+\beta_N=1$, а в непериодическом $\beta_0=\alpha_N=0$ и α_0, β_N (I.20) при $\rho=0$ равны

$$\alpha_0=\frac{2h_{-1}}{h_{-1}+h_0},\quad \beta_N=\frac{2h_N}{h_{N-1}+h_N}, \qquad (4.14)$$

приведем A_0 к виду:

$$A_0=1+\frac{1}{4}K\max(3,1+2\delta_0,1+2\delta_N), \qquad (4.15а)$$

где $\delta_0=\delta_N=1$ для периодических многозвенников и

$$\delta_0=\frac{h_{-1}}{h_0},\quad \delta_N=\frac{h_N}{h_{N-1}}$$

для непериодических.

б) Вначале исследуем периодический случай. Разделим i-е уравнение системы (4.8) на $\beta_i h_{i-1}^{-1}+\alpha_i h_i^{-1}$ и перейдем к новым неизвестным

$$\bar{\alpha}_i^{(i)}=\frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}\alpha_i+h_i\beta_i}\alpha_i^{(i)}. \qquad (4.16)$$

При $i=0$ индекс -1 переходит в N, а при $i=N$ $N+1$ переходит в 0.

Система принимает вид:

$$\bar{Q}\bar{\alpha}_i=g_0,\quad g_{0i}=\frac{C_i}{\beta_i h_{i-1}^{-1}+\alpha_i h_i^{-1}}. \qquad (4.17)$$

Матрица $\bar{Q}_i$ сохраняет структуру матрицы Q_i, только α_i,β_i заменяются на

$$\bar{\alpha}_i=\alpha_i\frac{h_{i-1}}{h_{i+1}}\cdot\frac{h_i\alpha_{i+1}+h_{i+1}\beta_{i+1}}{h_{i-1}\alpha_i+h_i\beta_i},\quad \bar{\beta}_i=\beta_i\frac{h_i}{h_{i-2}}\cdot\frac{h_{i-2}\alpha_{i-1}+h_{i-1}\beta_{i-1}}{h_{i-1}\alpha_i+h_i\beta_i}.$$

Диагональные члены матрицы $\bar{Q}_i$ уже не будут, вообще говоря, доминирующими. Чтобы это имело место, т.е. выполнялись условия Адамара, должно быть $2-\bar{\alpha}_i-\bar{\beta}_i > 0$, или

$$\mathcal{F}_i \equiv 2-\frac{1}{h_{i-1}^2+h_i^2}\left[\frac{h_i^2(h_{i-2}^2+h_{i-1}^2)}{h_{i-2}(h_{i-2}+h_{i-1})}+\frac{h_{i-1}^2(h_i^2+h_{i+1}^2)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}\right]>0$$

$$(i=0,1,\dots,N).$$

Это налагает ограничения на расстояния h_i между узлами интерполирования. В частности, если $h_i=H=const$ для всех i, то неравенства выполняются. Если h_{i-2} достаточно мало, так что $-h_{i-2}^2+2h_{i-2}h_{i-1}+h_{i-1}^2>0$, то $\partial\mathcal{F}_i/\partial h_{i-2}>0$. Но тогда, если неравенство выполняется при наименьшем $h_{i-2}=\frac{1}{\rho}h_{i-1}$, то оно останется верным и при больших h_{i-2}. Так же обстоит дело с h_{i+1} по сравнению с h_i. Заменяя h_{i-2} и h_{i+1} наименьшими значениями требуем, чтобы

$$\mathcal{F}_i \geqslant \frac{1+2\rho-\rho^2}{1+\rho}>0.$$

Это условие выполняется, если числитель положителен при $\rho \geqslant 1$, откуда следует $\rho<1+\sqrt{2}$. Но при таком ρ $\frac{\partial\mathcal{F}_i}{\partial h_{i-2}}$ и $\frac{\partial\mathcal{F}_i}{\partial h_{i+1}}$ остаются положительными и при больших $h_{i-2}=\rho h_{i-1}$ и $h_{i+1}=\rho h_i$. Следовательно, полученное неравенство является единственным условием невырожденности матрицы $\bar{Q}_i$.

Тогда согласно (4.2) имеем

$$\|\bar{Q}^{-1}\| \leqslant \frac{1+\rho}{1+2\rho-\rho^2}. \tag{4.I8}$$

Из (I.I8) и (4.I7) следует, что

$$\|g_0\| \leqslant 3\,\nabla f, \tag{4.I8'}$$

$$\|\bar{\alpha}_i\| \leqslant 3\cdot\frac{1+\rho}{1+2\rho-\rho^2}\nabla f. \tag{4.I8''}$$

Тогда из (4.I6) следует, что

$$|\alpha_i^{(i)}| \leqslant \frac{1+\rho^2}{H_i(1+\rho)}\|\bar{\alpha}_i\|, \tag{4.I9}$$

где $H_i=max(h_{i-1},h_i)$.

Для непериодических многозвенников общие формулы (4.I6) сохраняем лишь для внутренних узлов i = I,2,..., $N-1$. Граничные уравнения (I.I8) делим на $3^{-1}(2+\alpha_0)(\beta^{(0)}h_{-1}^{-1}+\alpha^{(0)}h_0^{-1})$ и $3^{-1}(2+\beta_N)(\beta^{(N)}h_{N-1}^{-1}+\alpha^{(N)}h_N^{-1})$ соответственно и вводим

$$E_0=\frac{(2+\alpha_0)(h_1\alpha^{(0)}+h_0\beta^{(0)})}{3h_{-1}h_0},\quad E_N=\frac{(2+\beta_N)(h_{N-1}\alpha^{(N)}+h_N\beta^{(N)})}{3h_{N-1}h_N},$$

а также

$$\bar{\alpha}_1^{(0)}=\frac{h_0(1+\rho)}{1+\rho^2}\alpha_1^{(0)},\quad \bar{\alpha}_1^{(N)}=\frac{h_{N-1}(1+\rho)}{1+\rho^2}\alpha_1^{(N)}. \tag{4.I6a}$$

Это не изменяет по сравнению с периодическим случаем условий Адамара для второго и ($N-1$)-го уравнений, куда войдут $\bar{\alpha}_1^{(0)}$ и $\bar{\alpha}_1^{(N)}$. Граничные уравнения (I.I9) примут вид:

$$\frac{1+\rho^2}{h_0(1+\rho)E_0}\left[2\bar{\alpha}_1^{(0)}+\alpha_0\frac{1+\rho}{h_1(1+\rho^2)}(h_0\alpha_1+h_1\beta_1)\bar{\alpha}_1^{(1)}\right]=\frac{C_0}{E_0},$$

$$\frac{1+\rho^2}{h_{N-1}(1+\rho)E_N}\left[\beta_N\frac{1+\rho}{h_{N-2}(1+\rho^2)}(h_{N-2}\alpha_{N-1}+h_{N-1}\beta_{N-1})\bar{\alpha}_1^{(N-1)}+2\bar{\alpha}_1^{(N)}\right]=\frac{C_N}{E_N}.$$

Условия Адамара для них будут:

$$\mathcal{F}_0 \equiv \frac{3(1+\rho^2)h_{-1}}{(1+\rho)(2+\alpha_0)(h_{-1}\alpha^{(0)}+h_0\beta^{(0)})}\left[2-\alpha_0\frac{1+\rho}{1+\rho^2}\frac{h_0^2+h_1^2}{h_1(h_0+h_1)}\right]>0,$$

$$\mathcal{F}_N \equiv \frac{3(1+\rho^2)h_N}{(1+\rho)(2+\beta_N)(h_{N-1}\alpha^{(N)}+h_N\beta^{(N)})}\left[2-\beta_N\frac{1+\rho}{1+\rho^2}\frac{h_{N-2}^2+h_{N-1}^2}{h_{N-1}(h_{N-2}+h_{N-1})}\right]>0.$$

Как и выше в периодическом случае, здесь следует заменить h_1 на $\frac{h_0}{\rho}$ и h_{N-2} на $\frac{h_{N-1}}{\rho}$. Тогда в квадратных скобках получается $[2-\alpha_0]$ и $[2-\beta_N]$. После этого в силу формул (4.I4) и (4.I0) при $\rho=0$ имеем

$$\mathcal{F}_0 \geqslant \frac{3(1+\rho^2)}{1+\rho}\cdot\frac{h_{-1}h_0(h_0+h_{-1})}{h_0^3+3h_0h_1^2+2h_{-1}^2}>0,$$

$$\mathcal{F}_N \geqslant \frac{3(1+\rho^2)}{1+\rho}\cdot\frac{h_{N-1}h_N(h_{N-1}+h_N)}{h_{N-1}^3+3h_{N-1}h_N^2+2h_N^3}>0.$$

Найдем наименьшее значение $\mathcal{F}_0$. Внутри допустимой области $\frac{1}{\rho}\leqslant\frac{h_{-1}}{h_0}\leqslant\rho$ $\mathcal{F}_0$ имеет только максимум при $\frac{h_{-1}}{h_0}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}<1+\sqrt{2}$. Тогда наименьшее значение находится на границе допустимой области, где при $\frac{1}{\rho}=\frac{h_{-1}}{h_0}$ и $\frac{h_{-1}}{h_0}=\rho$ соответственно

$$\mathcal{F}_0 \geqslant \frac{3\rho(1+\rho^2)}{1+3\rho^2+2\rho^3}>0,\qquad \mathcal{F}_0 \geqslant \frac{3\rho(1+\rho^2)}{\rho^3+3\rho+2}>0$$

Очевидно, первое выражение не больше второго, но, как легко проверить, неравенство $\mathcal{F}_0>0$ сильнее, чем $\mathcal{F}_i>0\ (i=1,2,\dots,N-1)$. Аналогичный вывод имеет место и для $\mathcal{F}_N$. Поэтому для $\|\bar{Q}_i^{-1}\|$

по-прежнему верна оценка (4.I8).

Из формул для E_0, E_N и (4.9) следует, что

$$|g_{00}| = \frac{|c_0|}{E_0} \leqslant 3\nabla f, \qquad |g_{0N}| = \frac{|c_N|}{E_N} \leqslant 3\nabla f.$$

Следовательно, оценка (4.I8') справедлива и в этом случае.

Но тогда последовательно получаем оценки (4.I8") и (4.I9), где $H_0 = h_0$, $H_N = h_{N-1}$.

Теперь можно вычислить оценку $R(x)$ (4.7). Если учесть замечания о функциях $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$, сделанных при выводе формулы (4.I3), то из (4.7) и (4.I9) снова вытекает неравенство (4.I3), только A_0 будет другим, а именно:

$$A_0 = 1 + \frac{3}{4}\,\frac{1+\rho^2}{1+2\rho-\rho^2}, \quad \rho < 1+\sqrt{2}. \tag{4.I5б}$$

Оценка для этого случая получена впервые.

2. Оценки для функций класса $C^1[a,b]$. Оценки для функций класса $C^1[a,b]$, интерполируемых многозвенниками с условиями типов I и IУ, рассматривались в работах [7] и [8]. Мы получим улучшенные оценки, причем справедливые и для условий типа Ш при $\rho = 0, 1$.

Пусть $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные первые производные на $[a', b']$. Тогда из (4.I) и (I.2I) следует, что на $[x_{i-1}, x_i]$.

$$R'(x) = f'(x) - u'_{i-1}(x)\,a_1^{(i-1)} + v'_{i-1}(x)\,a_1^{(i)} - w'_{i-1}(x)\,f(x_{i-1};x_i). \tag{4.20}$$

Отсюда

$$|R'(x)| \leqslant |f'(x) - f'(\xi)| + |u'_{i-1}(x)|\left[|f'(x_{i-1}) - a_1^{(i-1)}| + |f'(\xi) - f'(x_{i-1})|\right] +$$

$$+ |v'_{i-1}(x)|\left[|f'(x_i) - a_1^{(i)}| + |f'(\xi) - f'(x_i)|\right] + |w'_{i-1}(x)|\,|f'(\xi) - f(x_{i-1};x_i)|, \tag{4.21}$$

так как, согласно (I.22),

$$u'_{i-1}(x) - v'_{i-1}(x) + w'_{i-1}(x) = 1.$$

Чтобы оценить члены в правой части, в системе уравнений (4.8) перейдем к переменным

$$b_1^{(i)} = a_1^{(i)} - f'(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, N). \tag{4.22}$$

Тогда (4.8) переходит в систему с той же матрицей Q_1, но другими правыми частями:

$$Q_1 b_1 = c - Q_1 f' = g_1. \tag{4.23}$$

Рассмотрим вектор g_1. Воспользуемся зависимостью

$$f(x_{i-1}; x_i) = f'(\xi_{i-1,i}), \quad \xi_{i-1,i} \in [x_{i-1}, x_i]$$

и теоремой о промежуточном значении непрерывной функции, взятой в форме

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha+\beta) f(c), \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

Тогда для периодических многозвенников

$$g_{1i} = \beta_i\left[f'(\xi_{i-1,i}) - f'(x_{i-1})\right] + 2\left[f'(\xi_{i-1,i+1}) - f'(x_i)\right] + \alpha_i\left[f'(\xi_{i,i+1}) - f'(x_{i+1})\right] \tag{4.24}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, N$. Отсюда

$$\|g_1\| \leqslant 3\nabla f'. \tag{4.25а}$$

В случае непериодических многозвенников общие формулы (4.24) верны лишь для внутренних точек. При $i = 0, N$ c_0 и c_N выражаются формулами типа (4.9), где первые разделенные разности нужно заменить производными. Тогда можно видеть, что

$$g_{10} = (2+\alpha_0)\beta^{(0)} f'(\xi_{-1,0}) + \left[(2+\alpha_0)\alpha^{(0)} - \alpha_0\right] f'(\xi_{0,1}) - 2f'(x_0) + \alpha_0\left[f'(\xi_{0,1}) - f'(x_1)\right],$$

$$g_{1N} = \beta_N\left[f'(\xi_{N-1,N}) - f'(x_{N-1})\right] + \left[(2+\beta_N)\beta^{(N)} - \beta_N\right] f'(\xi_{N-1,N}) - 2f'(x_N) + (2+\beta_N)\alpha^{(N)} f'(\xi_{N,N+1}).$$

Согласно (I.20) и (4.I0) коэффициенты при двух первых членах в выражении g_{10} больше нуля, а в сумме равны 2. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции эти члены в сумме дают $2f'(\xi_{-1,1})$. Аналогичные рассуждения остаются в силе и для g_{1N}. Отсюда

$$|g_{10}| \leqslant (2+\alpha_0)\nabla f', \quad |g_{1N}| \leqslant (2+\beta_N)\nabla f'.$$

Тогда и для периодических и непериодических многозвенников

$$\|g_1\| \leqslant \max(3, 2+\alpha_0+\beta_0, 2+\alpha_N+\beta_N)\nabla f'. \tag{4.25}$$

Из (4.23), (4.3) и (4.25) следует, что

$$\|b_1\| \leqslant \max\left(3, \frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-\alpha_0-\beta_0}, \frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-\alpha_N-\beta_N}\right)\nabla f'. \tag{4.26}$$

Обращаясь к оценке остаточного члена $R'(x)$ (4.2I), положим ξ таким, чтобы $f'(\xi) = f(x_{i-1}; x_i)$. Имея в виду (I.22), нетрудно показать, что

$$\max(|u'_{i-1}(x)| + |v'_{i-1}(x)|) = \max(|u'_{i-1}(x) + v'_{i-1}(x)|, |u'_{i-1}(x) - v'_{i-1}(x)|) = 1.$$

Тогда из (4.21), (4.22) и (4.26) следует, что

$$|R'(x)| \leq A_1 \nabla f', \qquad (4.27)$$

где

$$A_1 = 2 + max\left(3, \frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-\alpha_0-\beta_0}, \frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-\alpha_N-\beta_N}\right).$$

В случае периодических многозвенников $\alpha_0+\beta_0=\alpha_N+\beta_N=1$, а для непериодических $\beta_0=\alpha_N=0$ и α_0, β_N определяются формулами (I.20). Тогда A_1 можно записать в виде:

$$A_1 = 2 + max(3, 1+2\delta_0, 1+2\delta_N), \qquad (4.28)$$

где $\delta_0=\delta_N=1$ для периодических многозвенников,

$$\delta_0 = \frac{(2)_\rho h_0 + (3)_\rho h_{-1}}{(1)_\rho h_0 + (2)_\rho h_{-1}} \cdot \frac{h_{-1}}{h_0}, \quad \delta_N = \frac{(2)_\rho h_{N-1} + (3)_\rho h_N}{(1)_\rho h_{N-1} + (2)_\rho h_N} \cdot \frac{h_N}{h_{N-1}}$$

для непериодических.

Далее, так как $R(x_{i-1}) = R(x_i) = 0$, то из (4.27) интегрированием получаем

$$|R(x)| \leq \left|\int_{x_k}^{x} R'(x)dx\right| \leq \left|\int_{x_k}^{x} |R'(x)|dx\right| \leq A_1 \nabla f' |x - x_k|, \qquad (4.29)$$

где $k = i-1$ или i. Очевидно, $\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |x - x_k|$ будет достигаться на середине интервала и равен $\frac{1}{2} h_{i-1}$. Объединяя формулы (4.27) и (4.29) в одну, имеем

$$|R^{(r)}(x)| \leq A_1 \nabla f' \left(\frac{h_{i-1}}{2}\right)^{1-r}, \quad (r = 0, 1), \qquad (4.30)$$

где A_1 определено формулой (4.28).

Для периодических многозвенников $A_1 = 5$. Такое же значение A_1 имеет для граничных условий типа I $(\rho = 1, h_{-1} = h_N = 0, \delta_0 = \delta_N = 0)$. В [8] для этих случаев получено $A_1 = 21/2$, и, кроме того, $|x - x_k|$ заменялось более грубо на h_{i-1}. Для многозвенников с условиями типа Ш с $\rho = 0,1$ $A_1 = 5$, если $\delta_0 \leq 1$, $\delta_N \leq 1$. Это имеет место, если при $\rho = 0$ $h_{-1} \leq h_0$, $h_N \leq h_{N-1}$, а при $\rho = 1$ $h_{-1} \leq \frac{1}{3} h_0$, $h_N \leq \frac{1}{3} h_{N-1}$.

3. Оценки для функций класса $C^2[a, b]$. Интерполирование функций $f(x) \in C^2[a, b]$ кубическими многозвенниками – это один из наиболее важных случаев. Функциями класса C^2 являются, в частности, точные решения задачи о равновесии стержня [16] (§ 3). Получаемые оценки остаточных членов будут давать порядок приближения линеаризованного решения.

Оценки для $f(x) \in C^2[a', b']$ получены во многих работах по

интерполированию кубическими многозвенниками [3,5,7-9]. Мы даем ниже улучшенные оценки.

Из (4.I) и (I.17) следует, что на $[x_{i-1}, x_i]$

$$R''(x) = f''(x) - 2\left(a_2^{(i-1)} \frac{x_i - x}{h_{i-1}} + a_2^{(i)} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}\right). \qquad (4.31)$$

Отсюда

$$|R''(x)| \leq |f''(x) - f''(x_k)| + \left|f''(x_k) - 2\left(a_2^{(i-1)} \frac{x_i - x}{h_{i-1}} + a_2^{(i)} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\right|,$$

где $k = i-1$ или i. Второй член справа как линейная функция достигает наибольшего значения на одном из концов интервала. Беря x_k на соответственном конце, получаем

$$|R''(x)| \leq |f''(x) - f''(x_k)| + |f''(x_k) - 2a_2^{(k)}|. \qquad (4.32)$$

Чтобы оценить второй член в правой части, преобразуем основную систему уравнений (I.26). Обозначим

$$b_2^{(i)} = a_2^{(i)} - \frac{1}{2} f''(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, N). \qquad (4.33)$$

Тогда (I.26) можно представить в виде:

$$Q_2 b_2 = \alpha - \frac{1}{2} Q_2 f'' = g_2. \qquad (4.34)$$

Рассмотрим вектор g_2. С этой целью представим функцию $f^{(\rho)}(x)$ $(\rho = 0,1,2,3)$ в виде разложения по степеням $(x - x_i)$ в окрестности точки x_i с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f^{(\rho)}(x) = \frac{f(x_i)}{(0-\rho)!}(x - x_i)^{0-\rho} + \frac{f'(x_i)}{(1-\rho)!}(x - x_i)^{1-\rho} + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-\rho)!}(x - x_i)^{n-\rho},$$

где $x_i \leq \xi \leq x$. При этом принимается $(x - x_i)^{\lambda-\rho}/(\lambda-\rho)!$ равным I, если $\lambda - \rho = 0$, и равным 0, если $\lambda - \rho < 0$.

Для периодических многозвенников в компонентах вектора α заменяем $f(x_{i-1})$ и $f(x_{i+1})$ их разложениями по указанной формуле с $n = 2$. Имеем

$$f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) = \frac{1}{2}\left[\alpha_i f''(\xi_{i-1,i}) + \beta_i f''(\xi_{i,i+1})\right] = \frac{1}{2} f''(\xi_{i-1,i+1}), \qquad (4.35)$$

где $\xi_{i-1,i} \in [x_{i-1}, x_i]$.

Тогда компоненты вектора g_2 в (4.34) можно представить в виде:

$$g_{2i} = \left[f''(\xi_{i-1,i+1}) - f''(x_i)\right] + \frac{1}{2}\alpha_i\left[f''(\xi_{i-1,i}) - f''(x_{i-1})\right] + \frac{1}{2}\beta_i\left[f''(\xi_{i,i+1}) - f''(x_{i+1})\right], \qquad (4.36)$$

откуда

$$\| g \| \le \frac{3}{2} \nabla f'' \qquad (4.37а)$$

Для непериодических многозвенников формулы (4.35) верны лишь для $i = 1,2,\dots,N-1$. К ним нужно добавить выражения $f(x_{i_{-1}}; x_{i_0}; x_{i_1})$ и $f(x_{i_{N-1}}; x_{i_N}; x_{i_{N+1}})$ из (I.14), которые отличаются от (4.35) тем, что α_0, β_0 и α_N, β_N заменяются на

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{(0)} &= \frac{(2)\rho h_{-1}}{(2)\rho h_1 + (1)\rho h_0}, \quad \beta^{(0)} = \frac{(1)\rho h_0}{(2)\rho h_{-1} + (1)\rho h_0}, \\ \alpha^{(N)} &= \frac{(1)\rho h_{N-1}}{(1)\rho h_{N-1} + (2)\rho h_N}, \quad \beta^{(N)} = \frac{(2)\rho h_N}{(1)\rho h_{N-1} + (2)\rho h_N} \end{aligned}\right\} \qquad (4.38)$$

В этом случае

$$g_{20} = \left(1+\frac{\beta_0}{2}\right)\alpha^{(0)} f''(\xi_{-1,0}) + \left[\left(1+\frac{\beta_0}{2}\right)\beta^{(0)} - \frac{\beta_0}{2}\right] f''(\xi_{0,1}) - f''(x_0) + \frac{\beta_0}{2}\left[f''(\xi_{0,1}) - f''(x_1)\right], \qquad (4.36а)$$

$$g_{2N} = \frac{\alpha_N}{2}\left[f''(\xi_{N-1,N}) - f''(x_{N-1})\right] + \left[\left(1+\frac{\alpha_N}{2}\right)\alpha^{(N)} - \frac{\alpha_N}{2}\right] f''(\xi_{N-1,N}) + \left(1+\frac{\alpha_N}{2}\right)\alpha^{(N)} f''(\xi_{N,N+1}) - f''(x_N).$$

Согласно (I.13) и (4.38), так как $\beta_0 \le 1, \alpha_N \le 1$, коэффициенты при первых двух членах в g_{20} положительны и в сумме равны I. Но тогда сумма этих членов равна $f''(\xi_{-1,1})$. В результате, так как $\alpha_0 = 0$, g_{20} имеет вид (4.36). Такие же рассуждения можно провести и для g_{2N}. Тогда имеем, что

$$\| g_2 \| \le \frac{1}{2} \max(3, 2+\alpha_0+\beta_0, 2+\alpha_N+\beta_N). \qquad (4.37)$$

Из (4.34), (4.37) и (4.3) следует, что во всех случаях

$$\| b_2 \| \le \frac{1}{2} \max\left(3, \frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-|\alpha_0|-|\beta_0|}, \frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-|\alpha_N|-|\beta_N|}\right). \qquad (4.39)$$

Оценка остаточного члена $R''(x)$ (4.32) теперь получается с помощью (4.33) и (4.39):

$$|R''(x)| \le A_2 \nabla f'', \qquad (4.40)$$

где

$$A_2 = 1 + \max\left(3, \frac{2+\alpha_0+\beta_0}{2-|\alpha_0|-|\beta_0|}, \frac{2+\alpha_N+\beta_N}{2-|\alpha_N|-|\beta_N|}\right). \qquad (4.41)$$

Выведем оценки для $R'(x)$ и $R(x)$. Так как $R(x_{i-1}) = R(x_i) = 0$, то по теореме Ролля на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ существует хотя бы одна точка ξ, в которой $R'(\xi) = 0$. Поэтому можно записать

$$|R'(x)| \le \left| \int_\xi^x |R''(x)|\,dx \right| \le A_2 \nabla f'' |x-\xi|. \qquad (4.42)$$

Интегрируя это неравенство еще раз, получаем

$$|R(x)| \le A_2 \nabla f'' \int_{x_{i-1}}^{x} |x-\xi|\,dx. \qquad (4.43)$$

Наибольшее значение $|R'(x)|$ достигается при расположении ξ и x на противоположных концах интервала $[x_{i-1}, x_i]$, когда $|x-\xi| = h_{i-1} \le H$ (рис. 2). Но тогда легко видеть, что при $\xi = x_{i-1}$ или $\xi = x_i$ наибольшего значения, равного $\frac{1}{2} h_{i-1}^2$ достигает и интеграл в (4.43). Так как $R(x_{i-1}) = R(x_i) = 0$, то наибольшей погрешности соответствует значение $\frac{1}{4} h_{i-1}^2$. Тогда все три оценки (4.40), (4.42) и (4.43) можно объединить одной формулой:

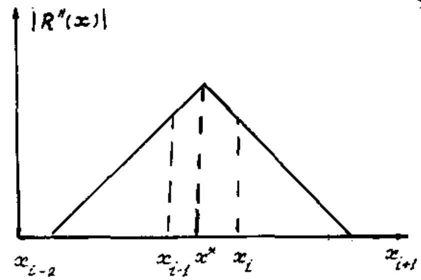

Рис. 2.

$$|R^{(r)}(x)| \le A_2 \nabla f'' \frac{(2)_{2-r}}{(2-r)!} \left(\frac{h_{i-1}}{2}\right)^{2-r} \quad (r = 0,1,2). \qquad (4.44)$$

Для многозвенников с граничными условиями типа I, II и IV $\alpha_0+\beta_0 \le 1$, $\alpha_N+\beta_N \le 1$ и $A_2 = 4$. В работах [7-9] для этих случаев найдено $A_2 = 5$. Кроме того, интеграл в (4.43) заменялся более грубо на $\frac{1}{2} h_{i-1}^2$. Для полигонов с условиями типа III $A_2 = 4$, если $|\beta_0| \le 1$, $|\alpha_N| \le 1$ $(\alpha_0 = \beta_N = 0)$, что, в силу (I.13), имеет место при $h_{-1} \le h_0$, $h_N \le h_{N-1}$.

4. Оценки для функций класса $C^3[a,b]$. Оценки при интерполировании функций класса $C^3[a',b']$ рассматривались в работах [6-8] для многозвенников типа I, II и IV. Ниже

находятся улучшенные оценки, распространенные и на многозвенники с условиями типа Ш.

Из (4.I) и (I.I) следует, что на $[x_{i-1}, x_i]$

$$R'''(x) = f'''(x) - 6a_3^{(i-1)} \qquad (4.45)$$

Отсюда

$$|R'''(x)| \le |f'''(x) - f'''(x_{i-1})| + |f'''(x_{i-1}) - 6a_3^{(i-1)}| . \qquad (4.46)$$

Здесь для оценки членов в правой части воспользуемся системой (I.23). Обозначим

$$b_3^{(i)} = a_3^{(i)} - \frac{1}{3!} f'''(x_i) \quad (i=0,1,\dots,N-1). \qquad (4.47)$$

Тогда (I.23) преобразуется в систему с той же матрицей Q_3, но другой правой частью:

$$Q_3 b_3 = \alpha_3 - \frac{1}{3!} Q_3 f''' = g_3 . \qquad (4.48)$$

Рассмотрим сначала вектор g_3. Как и раньше, выразим входящие в α_3 значения функции $f(x_{i-1}), f(x_{i+1})$ и $f(x_{i+2})$ в виде разложения в точке x_i с $n=3$. Тогда в периодическом случае для всех i имеем:

$$\alpha_{3i} = f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) = \frac{1}{3!}\{\alpha_i h_{i-1} f'''(\xi_{i-1,i}) +$$

$$+ (1+\alpha_i+\beta_{i+1}) h_i f'''(\xi_{i,i+1}) + \beta_{i+1} h_{i+1} f'''(\xi_{i+1,i+2})\} .$$

Выражения компонент вектора g_3 будут:

$$g_{3i} = \frac{1}{3!}\{\alpha_i h_{i-1} [f'''(\xi_{i-1,i}) - f'''(x_{i-1})] + (1+\alpha_i+\beta_{i+1}) h_i \times$$

$$\times [f'''(\xi_{i,i+1}) - f'''(x_i)] + \beta_{i+1} h_{i+1} [f'''(\xi_{i+1,i+2}) - f'''(x_{i+1})]\} . \qquad (4.49)$$

Для непериодических многозвенников при $i=0, N-1$ в α_{3i} нужно заменить α_0 на α_0', α_0'' и β_N на β_N', β_N'', как в формулах (I.24), (I.25). Тогда

$$g_{30} = \frac{1}{3!}\{\alpha_0'' h_{-1} [f'''(\xi_{-1,0}) - f'''(x_0)] + (1+\alpha_0'+\beta_1) h_0 \times$$

$$\times [f'''(\xi_{0,1}) - f'''(x_0)] + \beta_1 h_1 [f'''(\xi_{1,2}) - f'''(x_1)]\}, \qquad (4.49a)$$

$$g_{3N-1} = \frac{1}{3!}\{\alpha_{N-1} h_{N-2} [f'''(\xi_{N-2,N-1}) - f'''(x_{N-1})] + (1+\alpha_{N-1} +$$

$$+ \beta_N') h_{N-1} [f'''(\xi_{N-1,N}) - f'''(x_N)] + \beta_N'' h_N [f'''(\xi_{N,N+1}) + f'''(x_N)]\}.$$

Далее будем рассматривать два случая, отвечающие условиям а) (4.4) и б) (4.5).

а) Вначале исследуем периодический вариант. Обозначим

$$\tilde{b}_3^{(i)} = h_i b_3^{(i)} . \qquad (4.50)$$

Тогда система (4.48) переходит в систему

$$\tilde{Q} \tilde{b}_3 = g_3 , \qquad (4.5I)$$

или

$$\alpha_i \tilde{b}_3^{(i-1)} + (1+\alpha_i+\beta_{i+1}) \tilde{b}_3^{(i)} + \beta_{i+1} \tilde{b}_3^{(i+1)} = g_{3i} .$$

Поскольку диагональные элементы доминирующие, то на основании (4.2) получаем

$$\|\tilde{Q}_3^{-1}\| \le 1 . \qquad (4.52)$$

Из (4.49) следует, что

$$\|g_3\| \le \frac{1}{3!} \max_i (h_{i-1} + h_i + h_{i+1}) \nabla f''' . \qquad (4.53)$$

Тогда из (4.5I) – (4.53) находим, что

$$\|\tilde{b}_3\| \le \frac{1}{6} \max_i (h_{i-1} + h_i + h_{i+1}) \nabla f''' ,$$

а из (4.50) с учетом (4.4), имеем

$$|b_3| \le \frac{1}{2} K \nabla f''' . \qquad (4.54)$$

В случае непериодических многозвенников умножим граничные уравнения (I.24) на

$$E_0 = \frac{h_0 + h_1}{h^{(0)} + h_0 + h_1} , \qquad E_N = \frac{h_{N-2} + h_{N-1}}{h_{N-2} + h_{N-1} + h^{(N)}}$$

соответственно. Они примут вид:

$$E_0 [(1 + \frac{h^{(0)}}{h_0} + \beta_1) \tilde{b}_3^{(0)} + \beta_1 \tilde{b}_3^{(1)}] = E_0 g_{30} ,$$

$$E_N [\alpha_{N-1} \tilde{b}_3^{(N-2)} + (1+\alpha_{N-1} + \frac{h^{(N)}}{h_{N-1}}) \tilde{b}_3^{(N-1)}] = E_N g_{3,N-1} ,$$

где

$$\left. \frac{h^{(0)}}{h_0} = \frac{\alpha_0' h_0 + \alpha_0'' h_{-1}}{h_0} = \frac{(2)\rho h_0 + (3)\rho h_{-1}}{(1)\rho h_0 + (2)\rho h_{-1}} \quad \frac{h_{-1}}{h_0} = \sigma_0 , \right\} \qquad (4.55)$$

$$\left.\frac{h^{(N)}}{h_{N-1}}=\frac{\beta_N' h_{N-1}+\beta_N'' h_N}{h_{N-1}}=\frac{(2)\rho h_{N-1}+(3)\rho h_N}{(1)\rho h_{N-1}+(2)\rho h_N}\cdot\frac{h_N}{h_{N-1}}=\delta_N .\right\} \quad (4.55)$$

Условия Адамара для граничных уравнений дают

$$\mathcal{F}_0 \equiv \frac{(1+\delta_0)(1+h_1/h_0)}{1+\delta_0+h_1/h_0}>0, \quad \mathcal{F}_N \equiv \frac{(1+\delta_N)(1+h_{N-2}/h_{N-1})}{1+\delta_N+h_{N-2}/h_{N-1}}>0 .$$

Каждое из этих выражений, очевидно, не меньше I, так как $\delta_0 \geq 0$, $\delta_N \geq 0$. Но тогда для $\|\tilde{Q}_3^{-1}\|$ сохраняется оценка (4.52).

Из формул для E_0, E_N и (4.49а) для правых частей гранич - ных уравнений верны неравенства

$$|E_0 g_{30}| \leq \frac{1}{3!}(h_0+h_1)\nabla f''', \quad |E_N g_{3N-1}| \leq \frac{1}{3!}(h_{N-2}+h_{N-1})\nabla f''',$$

и снова имеет место оценка (4.53), а следовательно, и (4.54).

Теперь для обоих случаев (периодического и непериодического) из (4.46), (4.47) и (4.54) получаем

$$|R'''(x)| \leq A_3 \nabla f''', \qquad (4.56)$$

где

$$A_3 = 1+3K . \qquad (4.57)$$

б) Снова рассмотрим сначала периодические многозвенники. Поделим i-е уравнение (4.48) на $h_{i-1}+h_i+h_{i+1}$ и перейдем к новым неизвестным

$$\bar{b}_3^{(i)}=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}\, b_3^{(i)} \qquad (i=0,1,\ldots,N-1). \qquad (4.58)$$

Тогда система (4.48) переходит в систему:

$$\bar{Q}_3 \bar{b}_3 = \bar{g}_3 \qquad (4.59)$$

или

$$\alpha_i \frac{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}\bar{b}_3^{(i-1)}+(1+\alpha_i+\beta_{i+1})\bar{b}_3^{(i)}+$$

$$+\beta_{i+1}\frac{h_i+h_{i+1}+h_{i+2}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}\bar{b}_3^{(i+1)}=\frac{g_{3i}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}=\bar{g}_{3i} .$$

Диагональные элементы матрицы, вообще говоря, уже не являются доминирующими. Условия Адамара приводят к неравенствам:

$$\mathcal{F}_i \equiv 1+\frac{h_{i-1}(h_{i+1}-h_{i-2})}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})}+\frac{h_{i+1}(h_{i-1}-h_{i+2})}{(h_i+h_{i+1})(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})}>0 \qquad (4.60)$$

$$(i=0,1,\ldots,N-1) .$$

По условию формулы (4.5) предполагается, что существует $\rho=\max_i\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}, \frac{h_{i-1}}{h_i}\right)$. Найдем границу значений ρ, при которых $\mathcal{F}_i>0$. Так как $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial h_{i-2}}<0$ и $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial h_{i+2}}<0$, то заменим h_{i-2} и h_{i+1} наибольшими значениями $h_{i-2}=\rho h_{i-1}$, $h_{i+2}=\rho h_{i+1}$. Обозначим $s=h_{i-1}/h_i$, $t=h_{i+1}/h_i$ так, как $\frac{1}{\rho}\leq s, t\leq\rho$. Тогда (4.60) можно представить так:

$$\mathcal{F}_i \geq 1+\frac{s(t-\rho s)}{(1+s)(1+s+t)}+\frac{t(s-\rho t)}{(1+t)(1+s+t)}>0 .$$

При $\rho=1$ $(s=t=1)$ $\mathcal{F}_i \geq 1$, и неравенство выполняется. Будем увеличивать ρ, расширяя тем самым квадрат $\left(\frac{1}{\rho}\leq s, t\leq\rho\right)$, и находить наименьшее значение ρ, при котором $\mathcal{F}_i$ достигает нуля на стороне квадрата. В силу симметричности функции $\mathcal{F}_i(s,t)$ достаточно исследовать две смежные стороны $t=\frac{1}{\rho}$, $s=\rho$ или $s=\frac{1}{\rho}$, $t=\rho$.

При

$$\mathcal{F}_i \equiv 1+\frac{s(1-\rho^2 s)}{(1+s)[(1+s)\rho+1]}+\frac{\rho(s-1)}{(1+\rho)[(1+s)\rho+1]}>0 .$$

Полагая $s=s(\rho)$ видим, что с увеличением ρ равенство $\mathcal{F}_i=0$ может быть впервые достигнуто либо при $s=\frac{1}{\rho}$, либо при $s=\rho$. При $s=\frac{1}{\rho}$ легко проверить, что $\mathcal{F}_i>0$ при любом значении ρ. При $s=\rho$ получаем условие

$$\mathcal{F}_i \geq \frac{1+\rho+2\rho^2-\rho^3}{1+\rho+\rho^2}>0 . \qquad (4.6I)$$

Числитель убывает с ростом ρ. Полином третьей степени имеет один вещественный корень $\mathcal{F}_i>2{,}55$, т.е. условие эквивалентно $\rho<2{,}55$.

При $s=\rho$ имеем

$$\mathcal{F}_i \geq 1+\frac{\rho(t-\rho)^2}{(1+\rho)(1+\rho+t)}+\frac{\rho t(1-t)}{(1+t)(1+\rho+t)} .$$

Равенство $\mathcal{F}_i=0$ может достигаться при $t=\frac{1}{\rho}$, что снова дает условие (4.6I), или при $t=\rho$, что приводит к

$$\mathcal{F}_i \geq \frac{1+3\rho+4\rho^2-2\rho^3}{(1+\rho)(1+2\rho)}>0$$

Проверкой можно убедиться, что выражение $\mathcal{F}_i$ больше, чем в

(4.6I) при всех ρ . Поэтому условие $\rho < 2{,}55$ будет обеспечивать выполнение и этого неравенства.

В результате из (4.2) и (4.6I) получаем

$$\| \bar{Q}_3^{-1} \| \le \frac{1+\rho+\rho^2}{1+\rho+2\rho^2-\rho^3} . \qquad (4.62)$$

Из (4.49) и выражений $\bar{g}_{3i}$ следует, что

$$\| \bar{g}_3 \| \le \frac{1}{6} \nabla f''' . \qquad (4.63)$$

В случае непериодических многозвенников формулы (4.58) сохраняем лишь для внутренних узлов $i=1,2,\dots,N-2$. Граничные уравнения поделим на $h^{(0)}+h_0+h_1$ и $h_{N-2}+h_{N-1}+h^{(N)}$ соответственно и введем

$$\bar{b}_3^{(0)} = \frac{h_0}{(1+\rho)h_0+h_1} b_3^{(0)}, \quad \bar{b}_3^{(N-1)} = \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}+(1+\rho)h_{N-1}} b_3^{(N-1)} . \qquad (4.58\text{a})$$

Это не влияет по сравнению с периодическим случаем на выполнение условий Адамара для второго и (N-2)-го уравнений, куда входят $\bar{b}_3^{(0)}$ и $\bar{b}_3^{(N-1)}$. Граничные уравнения преобразуются в следующие:

$$\frac{1}{h^{(0)}+h_0+h_1} \left[(1+\delta_0+\beta_1)((1+\rho)h_0+h_1)\bar{b}_3^{(0)} + \beta_1 (h_0+h_1+h_2)\bar{b}_3^{(1)} \right] = \frac{g_{30}}{h^{(0)}+h_0+h_1} = \bar{g}_{30} ,$$

$$\frac{1}{h_{N-2}+h_{N-1}+h^{(N)}} \left[\alpha_{N-1}(h_{N-3}+h_{N-2}+h_{N-1})\bar{b}_3^{(N-2)} + (1+\alpha_{N-1}+\delta_N)(h_{N-2} + (1+\rho)h_{N-1})\bar{b}_3^{(N-1)} \right] = \frac{g_{3,N-1}}{h_{N-2}+h_{N-1}+h^{(N)}} = \bar{g}_{3,N-1} .$$

Условия Адамара для них суть

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{h^{(0)}+h_0+h_1} \left[(1+\delta_0)((1+\rho)h_0+h_1) + \frac{h_1(\rho h_0 - h_2)}{(h_0+h_1)} \right] > 0, \qquad (4.60)$$

$$\mathcal{F}_{N-1} = \frac{1}{h_{N-2}+h_{N-1}+h^{(N)}} \left[(1+\delta_N)(h_{N-2}+(1+\rho)h_{N-1}) + \frac{h_{N-2}(\rho h_{N-1} - h_{N-3})}{h_{N-2}+h_{N-1}} \right] > 0.$$

Как и выше в периодическом случае (4.60), в эти выражения подставим $h_2 = \rho h_1$, $h_{N-3} = \rho h_{N-2}$. Обозначая $s = \frac{h_{N-2}}{h_{N-1}}$ и $t = h_1/h_0$, имеем

$$\mathcal{F}_0 \ge \frac{1}{1+\delta_0+t} \left[(1+\delta_0)(1+\rho+t) + \frac{\rho t(1-t)}{1+t} \right] > 0 ,$$

$$\mathcal{F}_{N-1} \ge \frac{1}{1+\delta_N+s} \left[(1+\delta_N)(1+s+\rho) + \frac{\rho s(1-s)}{1+s} \right] > 0 .$$

Эти неравенства выполняются при $\rho = 1$ $(s=t=1)$. Рассматривая $s=s(\rho)$ и $t=t(\rho)$, будем увеличивать ρ . Тогда при $s=t=\frac{1}{\rho}$

$$\mathcal{F} \ge \frac{1}{1+\rho+\delta\rho} \left[(1+\delta)(1+\rho+\rho^2) + \frac{\rho-1}{\rho+1} \right] > 0 ,$$

а при $s=t=\rho$

$$\mathcal{F} \ge \frac{1}{\delta+1+\rho} \left[(\delta+1)(1+2\rho) + \frac{\rho^2(1-\rho)}{1+\rho} \right] > 0 ,$$

где $\delta=\delta_0$, δ_N и $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_N$. Эти неравенства сильнее, чем неравенства (4.6I) при любом δ . Следовательно, оценка (4.62) остается справедливой и здесь.

Из (4.49а) и формул $\bar{g}_{30}$ и $\bar{g}_{3N-1}$ видно, что $|\bar{g}_{30}| \le \frac{1}{6}\nabla f'''$ и $|\bar{g}_{3N-1}| \le \frac{1}{6}\nabla f'''$, а потому оценка (4.63) тоже остается в силе. Из (4.59) имеем, что $\|\bar{b}_3\| \le \|\bar{Q}_3^{-1}\| \|\bar{g}_3\|$, а из (4.58) и (4.58а) получаем, что

$$|b_3^{(i)}| \le (1+2\rho)\|\bar{b}_3\| \le (1+2\rho)\|\bar{Q}_3^{-1}\| \|\bar{g}_3\| \qquad (4.64)$$

Наконец, из (4.46), (4.62) – (4.64) снова получаем формулу (4.56), но с другим A_3 :

$$A_3 = 1 + \frac{(1+2\rho)(1+\rho+\rho^2)}{1+\rho+2\rho^2-\rho^3}, \quad 1 \le \rho \le 2{,}55 . \qquad (4.65)$$

Мы получили две оценки остаточного члена, соответствующие двум ограничениям (4.4) и (4.5).

Выведем оценки для $R^{(r)}(x)$ (r = 0, I,2). Как уже отмечалось, на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ существует по теореме Ролля точка ξ, где $R'(\xi)=0$. Но тогда на любых двух смежных интервалах существует точка ξ_1, в которой $R''(\xi_1)=0$. Отсюда на $[x_{i-1}, x_i]$

$$|R''(x)| \le \left|\int_{\xi_1}^{x} |R'''(x)|\,dx\right| \le A_3 \nabla f''' |x-\xi_1|, \tag{4.66}$$

где $\xi_1 \in [x_{i-2}, x_i]$ или $\xi_1 \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Наихудший случай будет, когда $\xi_1 = x_{i-2}$ или $\xi_1 = x_{i+1}$ (рис.3). Очевидно, $\max|x-\xi_1|$ достигается в пересечении прямых $|x-\xi_1| = x - x_{i-2}$, если $x \le x^*$ и $|x-\xi_1| = x_{i+1} - x$, если $x \ge x^*$ где $x^* = \frac{1}{2}(x_{i-2}+x_{i+1})$. $\max|x-\xi_1| \le \frac{3}{2} h^*_{i-1}$, если $h^*_{i-1} = \max(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i)$.

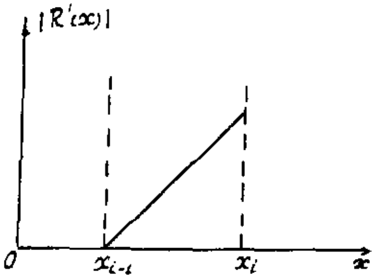

Рис. 3.

Интегрируя (4.66) еще раз с указанной подынтегральной функцией, получаем

$$|R'(x)| \le A_3 \nabla f''' \mathcal{Y}_1(x),$$

$$\mathcal{Y}_1(x) = \left|\int_{\xi}^{x} |x-\xi_1|\,dx\right|, \tag{4.67}$$

где $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. Очевидно, что $\max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} \mathcal{Y}_1(x)$ будет достигаться при $\xi = x_{i-1}$ или $\xi = x_i$. Возьмем $\xi = x_{i-1}$ и вычислим интеграл:

$$\mathcal{Y}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2 + h_{i-2}(x-x_{i-1}); & \text{если } x \le x^*; \\ \frac{1}{2}(x^*-x_{i-1})^2 + h_{i-2}(x^*-x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_i-x^*)^2 - & \\ -\frac{1}{2}(x_i-x)^2 + h_i(x-x^*), & \text{если } x \ge x^* . \end{cases}$$

Вычислив $\mathcal{Y}_1(x_{i+1})$, нетрудно найти $\max\limits_{i} \mathcal{Y}_1(x_{i+1}) = \frac{7}{4} h^{*2}_{i-1}$, который достигается при $h_{i-2} = h_{i-1} = h_i = h^*_{i-1}$. Но так как на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ имеется еще хотя бы одна точка, где $R'(\xi) = 0$, то наибольшей погрешности $|R'(x)|$ соответствует $7/8\, h^{*2}_{i-1}$. Такой же результат в силу симметричности задачи будет, если взять $\xi = x_i$.

Интегрируя (4.67) еще раз, получаем

$$|R(x)| \le A_3 \nabla f''' \mathcal{Y}_0(x), \quad \mathcal{Y}_0(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} \mathcal{Y}_1(x)\,dx,$$

$$\mathcal{Y}_0(x_i) = \frac{1}{6}(x^*-x_{i-1})^3 + \frac{1}{2} h_{i-2}(x^*-x_{i-1})^2 + \left[\frac{1}{2}(x^*-x_{i-1})^2 + \right. \tag{4.68}$$

$$\left. + h_{i-2}(x^*-x_{i-1})\right](x_i - x^*) + \frac{1}{3}(x_i-x^*)^3 + \frac{1}{2} h_i (x_i - x^*)^2 .$$

Наибольшее значение $\mathcal{Y}_0(x_i)$ достигается, как можно показать, при $h_{i-2} = h_{i-1} = h_i = h^*_{i-1}$ и равно $\frac{5}{8} h^{*3}_{i-1}$. Но так как $R(x_i) = 0$, то наибольшей погрешности отвечает значение $\frac{5}{16} h^{*3}_{i-1}$.

Учитывая сказанное, можно объединить формулы (4.56), (4.66)–(4.68) в одну:

$$|R^{(r)}(x)| \le A_3 \nabla f''' \frac{2^{4-r}-1}{(3-r)!} \left(\frac{h^*_{i-1}}{2}\right)^{3-r} \quad (r=0,1,2,3). \tag{4.69}$$

Сравним полученные оценки с лучшими из имевшихся ранее. Таковы оценки $|R'''(x)|$ для многозвенников типа I и IУ в работе [7]. В ней получено $A_3 = 1+K(1+K)^2$ больше нашего (4.57) для любого $K \ge 1$, а также $A_3 = 1+(1+\rho)^2(2-\rho)^{-1}$, что также больше найденного здесь (4.65) и, кроме того, пригодно для $\rho^* < 2$ по сравнению с нашим $\rho^* < 2{,}55$. Отметим еще, что в [7] оценки для $R^{(r)}(x)$ $(r=0,1,2)$ неверны. Полученные нами оценки распространены на типы II и III.

5. **Выбор узлов интерполирования.** В этом пункте, не претендуя на полноту изложения, мы дадим рекомендации, которые помогут при практическом применении интерполирования кубическими многозвенниками.

Полученные оценки (4.13), (4.30), (4.44) и (4.69) дают величину погрешности интерполяции для самой функции и её производных при заданных узлах x_i $(i=0,1,\dots,N)$. Но не менее важен и другой вопрос: как обеспечить требуемую точность при возможно меньшем числе узлов? Другими словами, для каждого интервала $[x_{i-1}, x_i]$ должно быть:

$$|R^{(r)}(x)| \le B_{\nu r} \nabla f^{(\nu)} h_{i-1} \le \varepsilon_r \qquad (\varepsilon_r > 0), \tag{4.70}$$

где ν - показатель класса функции $f(x)$, $B_{\nu z} = A_\nu \varphi(\nu-z)$ (вид $\varphi(\nu-z)$ ясен из оценочных формул). Решение этой задачи в общем случае весьма затруднительно. Его легко можно получить, если $f^{(\nu)}(x)$ - линейная функция. Тогда промежутки можно взять равными, и изменения $|\delta_i f^{(\nu)}|$ на них тоже будут равными.

Вычислим полную вариацию линейной функции $f^{(\nu)}(x)$ на $[a,b]$:

$$\nabla_0 f^{(\nu)} = |f^{(\nu)}(b) - f^{(\nu)}(a)|.$$

Очевидно,

$$|\delta_i f^{(\nu)}| = \nabla f^{(\nu)} = \frac{1}{N}\nabla_0 f^{(\nu)}; \quad h_i = H = \frac{1}{N}(b-a). \tag{4.71}$$

Подставляя эти выражения в (4.70), находим, что

$$N \geq \left[\frac{B_{\nu z}\ \nabla f_0^{(\nu)}(b-a)^{\nu-z}}{\varepsilon_z}\right]^{\frac{1}{\nu-z+1}}. \tag{4.72}$$

При этом, если в выражение $B_{\nu z}$ входят k или ρ (формулы (4.13) и (4.69), то последние равны I.

Итак, если число узлов $N+1$ и N - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству (4.72), то при интерполировании функции $f(x)$ для $f^{(2)}(x)$ заданная точность ε_z обеспечивается, и мы имеем решение поставленной задачи.

В чистом виде оно имеет значение, если $f(x)$ - полином четвертой степени, т.е. $f'''(x)$ - линейная функция, к которой и применяются приведенные рассуждения. В остальных случаях, если это имеет место при $\rho<3$, $f(x)$ будет полиномом не выше третьей степени, и интерполяционный многозвенник $S(x)$ просто совпадает с $f(x)$.

Однако полученный результат может быть полезен для обеспечения заданной точности интерполирования и в более общем случае, хотя и не с минимальным числом узлов, но в некотором смысле приближающемся к нему. Вычислим полную вариацию $\nabla_0 f^{(\nu)}$ функции $f^{(\nu)}(x)$. Это легко сделать, если $f^{(\nu)}(x)$ - непрерывная кусочно-монотонная функция. Тогда $\nabla_0 f^{(\nu)}$ равна сумме модулей приращений на участках монотонности. Определим $\nabla f^{(\nu)}$ и H по формулам (4.71) при N, удовлетворяющем (4.72). Если разделить $[a,b]$ на N равных частей, то на части интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ изменение функции будет больше $\nabla f^{(\nu)}$, и условие (4.70) не будет выполняться. Поэтому возьмем найденные $\nabla f^{(\nu)}$ и H в качестве максимальных, т.е.

$$h_i \leq H, \quad |\delta_i f^{(\nu)}| \leq \nabla f^{(\nu)}, \tag{4.73}$$

и будем разбивать $[a,b]$ с какого-либо конца узлами так, чтобы промежутки h_i были возможно большими, но сохранялись бы условия (4.73). (Практически для этой цели придется вычислить достаточно густую последовательность значений $f^{(\nu)}(x)$. Тогда неравенство (4.70) выполняется, хотя число узлов $N'+1$ будет, вообще говоря, больше необходимого. Оно приближается к минимальному N^*+1, если модуль "скорости" изменения функции $f^{(\nu)}(x)$ на участках монотонности близок к величине $\nabla_0 f^{(\nu)}/(b-a)$. В этом случае N^* в свою очередь близко к N(4.72) и может оказаться даже меньше N. Мы ограничимся этими рассуждениями, так как при машинных вычислениях вопрос об уменьшении числа узлов не является столь существенным, как при ручных.

При пользовании оценками (4.13) и (4.69) в $B_{\nu z}$ входят а) k или б) ρ, определяемые формулами (4.4) и (4.5). При выборе узлов следует предпочесть тот из вариантов а) или б) этих оценок, при котором $B_{\nu z}$ будет меньше. Это зависит от характера функции $f^{(\nu)}(x)$. Если она имеет более или менее однородные участки, то h_i будут мало отличаться между собой, и следует пользоваться оценками через k. Если же $f^{(\nu)}(x)$ содержит различные по характеру звенья, на которых h_i будут сильно отличаться одно от другого, то лучший результат дадут оценки через ρ. В обоих случаях при размещении узлов по указанному выше способу величину k или ρ приходится задавать заранее.

Задача размещения узлов усложняется, если неравенства (4.70) нужно выполнить сразу для двух или более z. Тогда предварительно нужно выяснить, какое из неравенств в нашем смысле является более существенным, т.е. для какого z число N в (4.72) будет больше. Проведя размещение узлов для этого z, проверяют выполнение неравенства (4.70) для других z и, если нужно, вводят дополнительные узлы. Последнее связано с тем, что в общем случае числа $N(z)$ в (4.72) носят только ориентировочный характер.

§ 5. Сходимость интерполяционного процесса

I. Постановка вопроса.

Теоремы сходимости интерполяционного процесса для разных классов функций $f(x)$ и разных типов граничных условий рассматривались в работах [5,6,8]. Мы изучаем этот вопрос, основываясь на полученных в § 4 оценках остаточных членов. Все сказанное об оценках в смысле их улучшения и новизны относится и к теоремам сходимости

Исследуется последовательность Δ_n различных разбиений промежутка $[a,b]$ точками:

$$\Delta_n : a = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,i} < \ldots < x_{n,N_n} = b,\ n = 1,2,\ldots$$

Будем обозначать

$$h_{n,i} = x_{n,i+1} - x_{n,i}\,,\quad H_n = \max_i h_{n,i}\,.$$

Интерполяционный процесс называется сходящимся, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),\quad x\in[a,b],$$

и равномерно сходящимся, если сходимость равномерная.

Прежде чем рассматривать это вопрос, приведем одно понятие теории функций. Модулем непрерывности непрерывной функции $f^{(\nu)}(x)$ на отрезке $[a,b]$ (см., например, [15], стр. 64) называется функция $\omega_\nu(H_n)$:

$$\omega_\nu(H_n) = \max_{|x''-x'|\le H_n} |f^{(\nu)}(x'') - f^{(\nu)}(x')|\,.$$

Так как $f^{(\nu)}(x)$ равномерно непрерывна на замкнутом промежутке, то $\omega_\nu(H_n)$ – непрерывная функция от H_n. Кроме того, она является монотонно возрастающей функцией; при $H_n\to 0$ $\omega_\nu(H_n)\to 0$.

В § 4 мы рассматривали величину $\nabla_n f^{(\nu)}$ при фиксированном разбиении отрезка и $x', x''\in[x_{n,i-1}, x_{n,i}]$. Очевидно,

$$\nabla_n f^{(\nu)} \le \omega_\nu(H_n)\,,$$

так как в выражении $\omega_\nu(H_n)$ x', x'' могут принадлежать и разным интервалам $[x_{n,i-1}, x_{n,i}]$.

2. Сходимость для функций классов C^ν $(\nu = 0,1,2,3)$. В оценках (4.13), (4.30), (4.44) и (4.69) заменим, не нарушая неравенств, $h_{n,i-1}$ на H_n и $\nabla_n f^{(\nu)}$ на $\omega_\nu(H_n)$. Тогда очевидны следующие теоремы:

Из оценки (4.13) вытекает

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a',b']$ и пусть $S_n(x)$ – кубический многозвенник, интерполирующий $f(x)$ на Δ_n, периодический или с граничными условиями III $(\rho = 0)$. Тогда, если $H_n\to 0$ при $n\to\infty$ и для промежутков $h_{n,i}$, включая $h_{n,-1}$ и h_{n,N_n}, выполняется

а) условие (4.4), либо

б) условие (4.5) при $\rho < 1+\sqrt{2}$,

то

$$|f(x) - S_n(x)| \le B_{00}\,\omega_0(H_n) \to 0 \tag{5.1}$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Из оценки (4.30) имеем

ТЕОРЕМУ 5.2. Пусть $f(x)\in C^1[a',b']$ и $S_n(x)$ – кубический многозвенник, интерполирующий $f(x)$ на Δ_n, периодический или с граничными условиями типа I и III $(\rho = 0,1)$. Тогда, если $H\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$\frac{h_{n,-1}}{h_{n,0}} \le K_0 < \infty\,,\qquad \frac{h_{n,N_n}}{h_{n,N_{n-1}}} \le K_N < \infty\,, \tag{5.2'}$$

то

$$|f^{(r)}(x) - S_n^{(r)}(x)| \le B_{1r}\,\omega_1(H_n) H_n^{1-r} \to 0 \quad (r = 0,1) \tag{5.2}$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Из оценки (4.44) следует

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $f(x)\in C^2[a',b']$ и пусть $S_n(x)$ – кубический многозвенник, интерполирующий $f(x)$ на Δ_n с любыми граничными условиями I – IV. Тогда, если $H_n\to 0$ при $n\to\infty$ и выполняются условия (5.2′), то

$$|f^{(r)}(x)-S_n^{(r)}(x)|\le B_{2r}\,\omega_2(H_n)H_n^{2-r}\to 0 \quad (r=0,1,2). \qquad (5.3)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $f(x)\in C^3[a',b']$ и пусть $S_n(x)$ - кубический многозвенник, интерполирующий $f(x)$ на Δ_n с любыми граничными условиями I-IУ. Тогда, если $H_n\to 0$, $h_{n,-1}\to 0, h_{n,N_n}\to 0$ при $n\to\infty$ и выполняется

а) условие (4.4), либо

б) условие (4.5) при $\rho<\rho^*$, где $\rho^*=2{,}55$ - вещественный корень полинома $1+\rho+2\rho^2-\rho^3$, то

$$|f^{(r)}(x)-S_n^{(r)}(x)|\le B_{3r}\,\omega_3(H_n)H_n^{3-r}\to 0 \quad (r=0,1,2,3) \qquad (5.4)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Объединим формулы (5.I)- (5.4) в одну:

$$|f^{(r)}(x)-S_n^{(r)}(x)|\le B_{\nu r}\,\omega_\nu(H_n)H_n^{\nu-r}\to 0 \quad (r\le\nu), \qquad (5.5)$$

где ν - показатель класса функции $f(x)$.

В работе [8] рассмотрена ситуация, когда $f(x)\in C^{\nu}[a,b]$ и $f^{(\nu)}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка $\gamma\,(0<\gamma\le 1)$, т.е.

$$|f^{(\nu)}(x'')-f^{(\nu)}(x')|\le G|x''-x'|^{\gamma},\quad x',x''\in[a,b],$$

а G - постоянная. В этом случае, очевидно,

$$\omega_\nu(H_n)\le G H_n^{\gamma}.$$

Тогда каждая из теорем 5.I - 5.4 имеет такое

СЛЕДСТВИЕ 5.I. В условиях теоремы, если $f^{(\nu)}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка γ, то

$$|f^{(r)}(x)-S_n^{(r)}(x)|\le B_{\nu r}\,G H_n^{\nu-r+\gamma}\to 0 \quad (r\le\nu) \qquad (5.6)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Условием Гельдера можно воспользоваться для фактического вычисления погрешностей.

3. Сходимость для функций класса $C^4[a,b]$. Сходимость для функций $f(x)\in C^4[a,b]$ изучалась в работах [6]и[8]. Мы воспроизводим эти результаты с исправлениями и в более общем виде.

Если $f(x)\in C^4[a',b']$, то

$$\nabla_n f'''\le \omega_3(H_n)\le \max_{a'\le x\le b'}|f^{(4)}(x)|\,H_n.$$

Тогда оценка (4.69) принимает такую форму:

$$|R^{(r)}(x)|\le A_3\max_{a'\le x\le b'}|f^{(4)}(x)|\,\frac{2(2^{4-r}-1)}{(3-r)!}\left(\frac{H_n}{2}\right)^{4-r} \qquad (5.7)$$
$$(r=0,1,2,3),$$

где A_3 определяется формулами (4.57) или (4.65).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. В условиях теоремы 5.4, если $f(x)\in C^4[a',b']$, то

$$|f^{(r)}(x)-S_n^{(r)}(x)|\le B_{3r}\max_{a'\le x\le b'}|f^{(4)}(x)|H_n^{4-r}\to 0 \quad (r\le 3) \qquad (5.8)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Этот результат есть обобщение теоремы 2 работы[6] на многозвенники любого типа. В [6] рассматривался лишь тип I .

В предыдущих анализах предполагалось, что число узлов интерполирования не меньше 2. Ниже будем считать, что их не менее 3, т.е. помимо концов, есть хотя бы одна внутренняя точка.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $f(x)\in C^4[a,b]$ и $S_n(x)$ - кубический многозвенник, интерполирующий $f(x)$ на Δ_n, периодический или с граничными условиями типа I . Если $H_n\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_{n,i}}{h_{n,i-1}}=1 \quad (i=1,\dots,N_n-1), \qquad (5.9)$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_i\left|\frac{S_n'''(x_{n,i}+)-S_n'''(x_{n,i}-)}{H_n}-f^{(4)}(x_i)\right|\right]=0 . \qquad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради простоты индекс n ниже опускается. Преобразуем систему (I.23) , деля i-е уравнение на $h_{i-1}+h_i+h_{i+1}$ и вычитая из последующего уравнения предыдущее, а в периодическом случае еще из первого последнее. Для непериодических многозвенников число уравнений уменьшается на единицу и станет $N-1$.

Обозначим

$$\alpha_4^{(i)} = \frac{\alpha_3^{(i)} - \alpha_3^{(i-1)}}{2(h_{i-1}+h_i)}, \tag{5.11}$$

$$\rho_i = h_{i-1} + h_i + h_{i+1},$$

$$\zeta_i = \frac{h_{i-1}}{\rho_i}, \quad \eta_i = \frac{h_i}{\rho_i}, \quad \theta_i = \frac{h_{i+1}}{\rho_i} \tag{5.12}$$

$$i = 0,1,\ldots,N-1 .$$

Тогда систему уравнений в периодическом случае можно записать в виде:

$$\zeta_{i-1} h_{i-2}\alpha_4^{(i-1)} + [(1-\zeta_i)h_{i-1} + (1-\theta_{i-1})h_i]\alpha_4^{(i)} + \theta_i h_{i+1}\alpha_4^{(i+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}[f(x_{i-1};x_i;x_{i+1};x_{i+2}) - f(x_{i-2};x_{i-1};x_i;x_{i+1})] \tag{5.13}$$

$$(i=0,1,\ldots,N-1).$$

В граничных уравнениях, как обычно, происходит циклическая замена индексов.

Поделим уравнения (5.13) на

$$q_i = h_{i-2}+h_{i-1}+h_i+h_{i+1} .$$

Тогда, обозначая

$$\sigma_i = \frac{h_{i-2}}{q_i}, \quad \tau_i = \frac{h_{i-1}}{q_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i}{q_i}, \quad \psi_i = \frac{h_{i+1}}{q_i}, \tag{5.14}$$

получим систему

$$\sigma_i\zeta_{i-1}\alpha_4^{(i-1)} + [\tau_i(1-\zeta_i)+\varphi_i(1-\theta_{i-1})]\alpha_4^{(i)} + \psi_i\theta_i\alpha_4^{(i+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} f(x_{i-2};x_{i-1};x_i;x_{i+1};x_{i+2}) \quad (i=0,1,\ldots,N-1) . \tag{5.15}$$

В правых частях уравнений стоят половины четвертых разделенных разностей. Распишем их с помощью формулы разложения (§4) до h_i^4:

$$f(x_{i-2};\ldots;x_{i+2}) = \frac{1}{4!}\{\sigma_i\zeta_{i-1}\alpha_{i-1}f^{(4)}(\xi_{i-2,i-1}) + [\tau_i(2+\zeta_{i-1} -$$

$$2\theta_{i-1} - \zeta_i\alpha_i + \eta_{i-1}\beta_i) + \sigma_i\zeta_{i-1}\beta_{i-1}]f^{(4)}(\xi_{i-1,i}) + [\varphi_i(2+\theta_i - 2\zeta_i +$$

$$+ \eta_i\alpha_i - \theta_{i-1}\beta_i) + \psi_i\theta_i\alpha_{i+1}]f^{(4)}(\xi_{i,i+1}) + \psi_i\theta_i\beta_{i+1}f^{(4)}(\xi_{i+1,i+2})\}.$$

Группируя слагаемые в правой части с помощью теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, находим

$$f(x_{i-2};\ldots;x_{i+2}) = \frac{1}{4!}\{(\sigma_i+\tau_i)\zeta_{i-1}f^{(4)}(\xi_{i-2,i}) +$$

$$+ (\tau_i+\varphi_i)(2-\theta_{i-1}-\zeta_i)f^{(4)}(\xi_{i-1,i+1}) + (\varphi_i+\psi_i)\theta_i f^{(4)}(\xi_{i,i+2})\}. \tag{5.16}$$

Для непериодических многозвенников уравнения имеют вид (5.15) только при $i=2,3,\ldots,N-2$. Уравнения, в формировании которых участвуют граничные условия (1.24), записываются так:

$$\left.\begin{aligned}
&[(1-\zeta_1)h_0 + (1-\theta_0)h_1]\alpha_4^{(1)} + \theta_1 h_2\alpha_4^{(2)} = \\
&= \frac12\left[f(x_0;x_1;x_2;x_3) - \frac{f(x_0;x_1;x_2) - f(x_{i_2};x_{i_0};x_{i_1})}{\rho_0}\right], \\
&\zeta_{N-2}h_{N-3}\alpha_4^{(N-2)} + [(1-\zeta_{N-1})h_{N-2} + (1-\theta_{N-2})h_{N-1}]\alpha_4^{(N-1)} = \\
&= \frac12\left[\frac{f(x_{i_{N+1}};x_{i_N};x_{i_{N-1}}) - f(x_{N-2};x_{N-1};x_N)}{\rho_{N-1}} - \right. \\
&\left. - f(x_{N-3};x_{N-2};x_{N-1};x_N)\right] .
\end{aligned}\right\} \tag{5.13a}$$

Здесь и далее в этом параграфе в выражениях ρ_0, ζ_0 и q_1 h_{-1} заменяется на $h^{(0)}$, а в выражениях ρ_{N-1}, θ_{N-1} и q_{N-1} h_N заменяется на $h^{(N)}$, где $h^{(0)}$ и $h^{(N)}$ определяются формулами (4.55).

После деления уравнений (5.13a) на q_1 и q_{N-1} соответственно получаем

$$\left.\begin{aligned}
&[\tau_1(1-\zeta_1)+\varphi_1(1-\theta_0)]\alpha_4^{(1)} + \psi_1\theta_1\alpha_4^{(2)} = \frac12 f(x_{i_1};\ldots;x_3) \\
&\sigma_{N-1}\zeta_{N-2}\alpha_4^{(N-2)} + [\tau_{N-1}(1-\zeta_{N-1}) + \varphi_{N-1}(1-\theta_{N-2})]\alpha_4^{(N-1)} = \\
&= \frac12 f(x_{N-3};\ldots;x_{i_{N+1}})
\end{aligned}\right\} \tag{5.15a}$$

В правных частях этих уравнений стоят аналоги четвертых разделенных разностей. Распишем их через четвертые производные:

$$f(x_{i_1};\ldots;x_3) = \frac{1}{4!}\{\tau_1[2+\zeta_0 - 2\theta_0 - \zeta_1\alpha_1 + \eta_0\beta_1]f^{(4)}(\zeta_{0,1}) +$$

$$+ [\varphi_1(2+\theta_1-2\zeta_1+\eta_1\alpha_1 - \theta_0\beta_1) + \psi_1\theta_1\alpha_2]f^{(4)}(\xi_{1,2}) + \psi_1 Q_1\beta_2 f^{(4)}(\xi_{2,3})\},$$

$$f(x_{N-2};\dots;x_{i_{N+1}})=\frac{1}{4!}\Big\{\sigma_{N-1}\zeta_{N-2}\alpha_{N-2}f^{(4)}(\xi_{N-3,N-2})+$$

$$+[\tau_{N-1}(2+\zeta_{N-2}-2\theta_{N-2}-\zeta_{N-1}\alpha_{N-1}+\eta_{N-2}\beta_{N-1})+\sigma_{N-1}\zeta_{N-2}\beta_{N-2}]$$

$$f^{(4)}(\xi_{N-2,N-1})+\varphi_{N-1}[2+\theta_{N-1}-2\zeta_{N-1}+\eta_{N-1}\alpha_{N-1}-\theta_{N-2}\beta_{N-1}]f^{(4)}(\xi_{N-1,N})\Big\}$$

Перегруппировав слагаемые в этих формулах, получим:

$$f(x_{i-1};\dots;x_3)=\frac{1}{4!}\Big\{\tau_1\zeta_0\ f^{(4)}(\xi_{0,1})+(\tau_1+\varphi_1)(2-\zeta_1-\theta_0)f^{(4)}(\xi_{0,2})+$$

$$+(\psi_1+\varphi_1)\theta_1 f^{(4)}(\xi_{1,3})\Big\};\tag{5.16a}$$

$$f(x_{N-2},\dots;x_{i_{N+1}})=\frac{1}{4!}\Big\{(\sigma_{N-1}+\tau_{N-1})\zeta_{N-1}f^{(4)}(\xi_{N-3,N-1})+(\tau_{N-1}+\varphi_{N-1})\cdot$$

$$\cdot(2-\zeta_{N-1}-\theta_{N-2})f^{(4)}(\xi_{N-2,N})+\varphi_{N-1}\theta_{N-1}\ f^{(4)}(\xi_{N-1,N})\Big\}.$$

С помощью уравнений (5.I5) и формул (5.I6) получим желаемую оценку. Для этого введем новые неизвестные:

$$b_4^{(i)}=a_4^{(i)}-\frac{1}{4!}f^{(4)}(x_i).\tag{5.17}$$

Рассмотрим сначала периодический случай. Из (5.I5) получаем систему с такой же матрицей Q_4 :

$$Q_4 b_4=d_4-\frac{1}{4!}Q_4 f^{(4)}=g_4 .\tag{5.18}$$

Правые части уравнений на основании (5.I6) имеют вид:

$$g_{4i}=\frac{1}{4!}\Big\{\Big[\frac{(\sigma_i+\tau_i)\zeta_{i-1}}{2}f^{(4)}(\xi_{i-2,i})-\sigma_i\zeta_{i-1}f^{(4)}(x_{i-1})\Big]+$$

$$+\Big[(\tau_i+\varphi_i)\Big(1-\frac{\zeta_i+\theta_{i-1}}{2}\Big)f^{(4)}(\xi_{i-1,i+1})-(\tau_i(1-\zeta_i)+\tag{5.19}$$

$$+\varphi_i(1-\theta_{i-1}))f^{(4)}(x_i)\Big]+\Big[\frac{(\varphi_i+\psi_i)\theta_i}{2}f^{(4)}(\xi_{i,i+2})-$$

$$-\psi_i\theta_i f^{(4)}(x_{i+1})\Big]\Big\}\qquad(i=0,1,\dots,N-1).$$

При условии (5. 9) величины ζ_i , η_i , θ_i стремятся в пределе к $\frac{1}{3}$, а σ_i , τ_i , φ_i , ψ_i к $\frac{1}{4}$. При этом матрица Q_4 системы имеет доминирующие диагональные элементы и существует обратная ей матрица. Это свойство сохраняется при условии (4.5) с некоторым $\rho>1$. На основании (4.2)

$$\|Q_4^{-1}\|\le[\min_i(\tau_i+\varphi_i-\tau_i\zeta_i-\psi_i\theta_i-\sigma_i\zeta_{i-1})].\tag{5.20}$$

Из (5.18) следует, что

$$\|b_4\|\le Q_4^{-1}\|\,\|g_4\|.\tag{5.21}$$

Имея в виду, что $a_3^{(i)}=\frac{1}{6}S'''(x_i+)$, $a_3^{(i-1)}=\frac{1}{6}S'''(x_i-)$, из (5.II) и (5.I7) находим оценку

$$\max_i\Big|2\,\frac{S'''(x_i+)-S'''(x_i-)}{h_{i-1}+h_i}-f^{(4)}(x_i)\Big|\le 4!\,\|Q_4^{-1}\|\,\|g_4\|.\tag{5.22}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$. Из (5.20) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_4^{-1}\|\le 6\ .\tag{5,23}$$

В формулах (5.I9) при условии (5.9) координаты у разностей в квадратных скобках в пределе равны между собой. Тогда, очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\|g_4\|\le\frac{1}{2\cdot4!}\lim_{n\to\infty}\nabla_n f^{(4)}\le\frac{1}{2\cdot4!}\lim_{n\to\infty}\omega_4(H_n).\tag{5.24}$$

Так как при $n\to\infty$ $\omega_4(H_n)\to 0$, то из (5.22) - (5.24) вытекает (5.I0)—утверждение теоремы для периодических многозвенников.

Обратимся теперь к непериодическому случаю с граничными уравнениями (5.I5a). В их коэффициенты входят величины $h^{(0)}$ и $h^{(N)}$. Пусть, как и выше, выполняются условия (4.5) и еще $h^{(0)}\le\rho h_0$, $h^{(N)}\le\rho h_{N-1}$.. Тогда диагональные элементы матрицы Q_4 остаются доминирующими, а $\|Q_4^{-1}\|$ ограниченной. При условии (5.9)

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_4^{-1}\|\le\lim_{n\to\infty}\max\Big[6,\frac{3(h^{(0)}+2H)(h^{(0)}+3H)}{H(4h^{(0)}+5H)},\frac{3(h^{(N)}+2H)(h^{(N)}+3H)}{H(4h^{(N)}+5H)}\Big].\tag{5.20a}$$

Выпишем правые части граничных уравнений в системе (5.I8). В силу (5.I5a), (5.I6a) и (5.I7) имеем

$$g_{4,1}=\frac{1}{4!}\Big\{\Big[(\tau_1+\varphi_1)\Big(1-\frac{\zeta_1+\theta_0}{2}\Big)f^{(4)}(\xi_{0,2})-(\tau_1(1-\zeta_1)+\varphi_1(1-\theta_0))f^{(4)}(x_1)\Big]+$$

$$+\Big[\frac{(\psi_1+\varphi_1)\theta_1}{2}f^{(4)}(\xi_{1,3})-\psi_1\theta_1 f^{(4)}(x_2)\Big]-\frac{h_0 h^{(0)}}{2\rho_0 q_1}\ f^{(4)}(\xi_{0,1})\Big\},$$

$$g_{4,N-1}=\frac{1}{4!}\Big\{\Big[\frac{(\sigma_{N-1}+\tau_{N-1})\zeta_{N-2}}{2}f^{(4)}(\xi_{N-3,N-1})-\sigma_{N-1}\zeta_{N-2}f^{(4)}(x_{N-2})\Big]+\tag{5.19a}$$

$$+\Big[(\tau_{N-1}+\varphi_{N-1})\Big(1-\frac{\zeta_{N-1}+\theta_{N-2}}{2}\Big)f^{(4)}(\xi_{N-2,N})-(\tau_{N-1}(1-\zeta_{N-1})+$$

$$+\varphi_{N-1}(1-\theta_{N-2}))f^{(4)}(x_{N-1})\Big]+\frac{h_{N-1}h^{(N)}}{2\rho_{N-1}\,q_{N-1}}\cdot f^{(4)}(\xi_{N-1,N})\Big\}.$$

При условии (5.9) коэффициенты в двух первых слагаемых справа у этих выражений по-прежнему в пределе равны между собой. Из (5.19а) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |q_{4,1}| \le \frac{1}{2\cdot 4!} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2H(2h^{(0)}+3H)}{(h^{(0)}+2H)(h^{(0)}+3H)} \nabla f^{(4)} + C_1 \right],$$

$$\lim_{n\to\infty} |q_{4,N-1}| \le \frac{1}{2\cdot 4!} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2H(2h^{(N)}+3H)}{(h^{(N)}+2H)(h^{(N)}+3H)} \nabla f^{(4)} + C_{N-1} \right]. \tag{5.24a}$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{h_{-1}\, h_0}{\rho_0\, q_1} \; \frac{(2)\rho h_0 + (3)\rho h_{-1}}{(1)\rho h_0 + (2)\rho h_{-1}} f^{(4)}(\xi_{0,1}), \\ C_{N-1} &= \frac{h_N\, h_{N-1}}{\rho_{N-1}\, q_{N-1}} \; \frac{(2)\rho h_{N-1} + (3)\rho h_N}{(1)\rho h_{N-1} + (2)\rho h_N} f^{(4)}(\xi_{N-1,N}). \end{aligned} \right\} \tag{5.25}$$

(индекс n в формулах (5.19а) - (5.25) по-прежнему опущен). По условиям теоремы $\rho = 1$. Тогда при выполнении (5.9) в силу (4.55) $h^{(0)} \to 0$ и $h^{(N)} \to 0$, если $n \to \infty$.

Первые члены в квадратных скобках оказываются равными $\nabla f^{(4)}$. Величины же C_1 и C_{N-1} стремятся к нулю вследствие того, что $h_1 = h_N \to 0$. Но тогда для $\| Q_4^{-1} \|$ по-прежнему верна оценка (5.23), а для $\| g_4 \|$ - (5.24). Из (5.22) снова следует в пределе (5.10), что доказывает теорему и для непериодических полиномов с граничными условиями типа I.

В работе [8] эта теорема (теорема 2.9.5) доказывалась для периодических многозвенников. Но в выкладках была допущена ошибка, что привело к коэффициенту $\frac{1}{2}$ при $f^{(4)}(x_{n,i})$ в формуле (5.10). Кроме того, там же утверждается, что доказательство можно повторить и для любых непериодических многозвенников. Мы провели его для условий типа I. Для типа II $\rho = 2$ $((1)_\rho = 0)$, и C_1 и C_{N-1} в (5.24 а) остаются конечными при $n \to \infty$, и поэтому $\| b_4 \|$ не стремится к нулю, и доказать соотношение (5.10), а следовательно, и теорему не удается. Не имеет особого смысла рассматривать теорему и при условиях типа III. Для ее утверждения в этом случае необходимо, чтобы h_{-1} и h_N стремились к нулю быстрее, чем h_0 и h_{N-1} соответственно, т.е. по существу снова приходим к типам I или II.

ЛИТЕРАТУРА

1. I.J. SCHOENBERG. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. Quart. Appl.Math., 1946, vol.IV, N 1, p. 45 - 99; Part B, N 2, p. 112-141.
2. I.J. SCHOENBERG, A. WHITNEY. On Polya frequency functions, III. Trans.Amer.Math. Soc., 1953, vol. 74, N 2, 246 - 259.
3. J.L. WALSH, F.H.AHLBERG, E.N.NILSON. Best approximation properties of spline fit. F.Math.Mech., 1962, vol.11, N 2, p.225-234.
4. T.N.E.GREVILLE. Numerical procedures for interpolation by spline functions. J.SIAM, Numer.Anal., Ser.B, 1964, vol.1, p.53-68.
5. J.H. AHLBERG, E.N.NILSON. Convergence properties of the spline fit. J.SIAM, 1963, vol.11, N 1, p. 95-104.
6. G. BIRKHOFF, C.de BOOR. Error bounds for spline interpolation. J.Math.Mech., 1964, vol.13, N 5, p.827-835.
7. A. SHARMA, A. MEIR. Degree of approximation of spline interpolation. J.Math.Mech., 1966, vol.15, p. 759-767.
8. J.H. AHLBERG, E.N.NILSON, J.L. WALSH. The theory of splines and their applications. Acad.Press, New York - London, 1967.
9. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Интерполирование функций одной и двух переменных кусочно-полиномиальными функциями. - В сб. "Математические проблемы геофизики", Новосибирск, 1969, вып.I, с.125-141.
10. Ф.О. ГАНТМАХЕР. Теория матриц. М., "Наука", 1966.
11. И.С. БЕРЕЗИН, Н.П. ЖИДКОВ. Методы вычислений, т.I. М., "Наука", 1966.
12. С.К. ГОДУНОВ, В.С. РЯБЕНЬКИЙ. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
13. А.А. АБРАМОВ, В.Б. АНДРЕЕВ. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений. - Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, т.3, № 2, с.377-381.
14. Дж. РИОРДАН. Введение в комбинаторный анализ. М., ИИЛ, 1963.
15. А.О. ГЕЛЬФОНД. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.
16. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении. Данный сборник, с. 3-22.

Поступила в редакцию
15/IX-1969 г.