ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1970 год Выпуск 38

УДК 681.142.001.2

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ МОДУЛЕЙ

Т.И. Антипова, С.В. Заграничная, В.А. Тюренков

Некоторые понятия и обозначения. Заданы:

1) некоторое множество модулей;
2) плата, на которой должны быть размещены модули;
3) таблица соединений (Т).

Плата имеет прямоугольную форму. На плате выделены места для модулей. Каждый модуль может быть расположен на любом из этих мест. При расположении модулей их можно ориентировать (поворачивать) различными способами. Способы ориентации модулей будем называть цоколевками.

По краям платы расположены внешние контакты. Выделены некоторые совокупности внешних контактов, называемые внешними контактными полями. Предполагается, что каждое внешнее контактное поле расположено на одном краю платы, причем контакты поля заполняют край платы достаточно "густо"; в силу этих предположений в дальнейшем будем отождествлять внешние контактные поля с краями платы, на которых они расположены.

Таблица соединений T представляет собой перечень пучков [1]. Каждый пучок состоит из внутренних контактов (т.е. из контактов модулей) и внешних контактных полей, причем различные пучки по внутренним контактам не пересекаются.

Допустим, что модули как-то размещены на плате. Способ размещения модулей на плате обозначим через

$$V = [\, i_1^{\sigma_1}, i_2^{\sigma_2}, \ldots, i_m^{\sigma_m} \,] \;,$$

где i_j – номер модуля, стоящего на j - месте, σ_j – цоколевка i_j модуля. Рассматривая плату как прямоугольник, расположенный на евклидовой плоскости с метрикой ρ, внутренние контакты – как точки и внешние контактные поля – как стороны прямоугольника, построим на плате минимальные деревья, каждое из которых соединяет контакты и поля, принадлежащие одному пучку. Обозначим сумму длин ребер этих деревьев, соответствующих таблице соединений T и размещению V модулей, через $\Sigma(T, V)$.

Постановка задачи размещения модулей.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: для заданной таблицы соединений T найти размещение V модулей на плате такое, чтобы величина $\Sigma(T, V)$ была бы квазиминимальной.

Задача решается в два этапа:

а) размещение модулей без их ориентирования;

б) ориентирование модулей.

Постановка задачи размещения модулей без ориентирования отличается от сформулированной постановки только тем, что при вычислении минимальных деревьев координаты контактов заменяются координатами центров соответствующих модулей.

Алгоритмы Розенталя и Линского. Розенталем [2] предложен следующий метод решения задачи размещения неориентированных модулей. Произвольно располагаются модули и подсчитывается величина $\Sigma(T, V)$; модуль с наибольшим количеством проводом переставляется всеми способами и выбирается то место, которое дает максимальное уменьшение величины $\Sigma(T, V)$; то же делается для следующего модуля с максимальным количеством проводов и т.д. После последнего модуля процесс повторяется (начиная с модуля с наибольшим количеством проводов). Розенталь утверждает, что четырехкратное выполнение процесса приводит к такой расстановке модулей, когда следующие выполнения уменьшают величину $\Sigma(T, V)$ менее, чем на 1%.

Алгоритм Розенталя при всей своей простоте требует много машинного времени. Например, если метрика ρ определена как

$$\rho(i,j)=|x_i-x_j|+|y_i-y_j|. \qquad (I)$$

и рассматриваются минимальные деревья без дополнительных вершин (а вершинами являются лишь контакты), то размещение 20 модулей займет ориентировочно I час времени машины "М-20".

В.С. Линский в работе [3] решает задачу размещения неориентированных модулей в предположении, что задан граф связей $\mathcal{G}$ между модулями такой, что расстановка модулей, минимизирующая сумму длин ребер этого графа, минимизирует (квазиминимизирует) одновременно и величину $\Sigma(T,V)$. Тогда задача сводится к минимизации величины

$$S=\sum_i\sum_j c_{ij}\,\tau(i,j), \qquad (2)$$

где $\|c_{ij}\|$ – матрица смежности вершин минимизирующего графа $\mathcal{G}$ и $\tau(i,j)$ – расстояние между центрами i - го и j - го модулей. В.С. Линский рассматривает модули как материальные точки, между которыми действуют силы взаимодействия, и для минимизации суммы (2) предлагает искать устойчивое положение всей системы, соответственно изменяя после каждого решения силы взаимодействия, если это потребуется для соблюдения условий задачи.

Однако нетрудно заметить, что для минимизации суммы (2) можно применить также описанную выше методику Розенталя. Она значительно проще методики В.С. Линского и, по-видимому, в большинстве случаев дает не худшие решения. Если положить

$$\rho(i,j)=|x_i-x_j|+|y_i-y_j|$$

и, исходя из произвольного расположения модулей, применить для минимизации суммы (2) методику Розенталя, то размещение 20 модулей займет ориентировочно 2 минуты времени машины "М-20".

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм объединяет алгоритмы Розенталя и Линского, отличаясь от них следующим:

I) вводится специальная нумерация мест для модулей;

2) в качестве минимизирующего графа используется граф $\mathcal{G}$, являющийся теоретико-множественной суммой полных графов, построенных на пучках [I];

3) выбором начального размещения модулей;

4) используются аналитические зависимости, позволяющие уменьшить число операций при вычислении изменения величины $\Sigma(T,V)$ (при перестановке двух модулей);

5) вводится вспомогательная метрика ρ', позволяющая уменьшить память алгоритма;

6) алгоритм дополняется алгоритмом ориентирования модулей.

А л г о р и т м   р а з м е щ е н и я   н е о р и е н т и р о в а н н ы х   м о д у л е й. Места для модулей нумеруются по неубыванию суммы расстояний от центра места до центров остальных мест и до внешних контактных полей числами I,2,..., m (где m – число мест для модулей), внешние контактные поля нумеруются в произвольном порядке числами $m+1, m+2,\dots,m+n$ (где n – количество внешних контактных полей). Составляется матрица R расстояний между центрами мест для модулей и от центров мест для модулей до внешних контактных полей:

$$R=\|\rho_{ij}\|,$$

где $1\le i\le m$, $1\le j\le m+n$, i -я строка и i - й столбец соответствуют i - му месту модуля, j - й столбец при $j>m$ соответствует j - му внешнему контактному полю.

Каждому пучку p ставится в соответствие граф $\mathcal{G}(p)$, представляющий собой сумму [4] полного графа, соединяющего центры модулей, у которых хотя бы один контакт принадлежит пучку, и звезд, центрами которых являются внешние контактные поля, содержащие контакты пучка (висячими вершинами звезд являются центры модулей, содержащих контакты пучка). Через $\mathcal{G}_{полн}$ обозначается граф, являющийся суммой графов $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathcal{G}_{полн}=\bigcup_p \mathcal{G}(p).$$

Для выбора начального размещения модулей предположим, что модули размещены на плате в соответствии с их номерами (т.е. на i-том месте ($1\le i\le m$) стоит модуль с номером i). Составим матрицу смежности Q для графа $\mathcal{G}_{полн.}$:

$$Q=\|q_{ij}\|,$$

где i - тая строка и i - тый столбец соответствуют i -тому модулю, j - тый столбец при $j>m$ соответствует j - му внешнему контактному полю. Очевидно, что тогда сумма длины ребер графа $\mathcal{G}_{полн}$ будет выражаться формулой:

$$S=\frac{1}{2}R'\otimes Q'+R''\otimes Q'',$$

где $R' = \| \rho_{ij} \| \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m),$

$$Q' = \| q_{ij} \| \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m), \tag{3}$$

$$R'' = \| \rho_{ij} \| \quad (1 \le i \le m,\ m+1 \le j \le m+n),$$

$$Q'' = \| q_{ij} \| \quad (1 \le i \le m,\ m+1 \le j \le m+n),$$

$\otimes$ – скалярное произведение матриц*).

В выражении (3) первый член соответствует внутренним связям модулей между собой, второй член – внешним связям. Обычно при решении задачи компоновки плат минимизируют количество внешних связей. Поэтому второй член выражения (3) мал по сравнению с первым членом и, таким образом, существенной частью задачи минимизации суммарной длины графа $\mathcal{G}_{полн.}$ является нахождение расстановки модулей, минимизирующей скалярное произведение $R' \otimes Q'$. Имеем:

$$R' \otimes Q' = \sum_{j=1}^{m} \rho_{1j} \cdot q_{1j} + \sum_{j=1}^{m} \rho_{2j} \cdot q_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{m} \rho_{mj} \cdot q_{mj} <$$

$$< \sum_{j=1}^{m} \rho_{1j} \cdot \sum_{j=1}^{m} q_{1j} + \sum_{j=1}^{m} \rho_{2j} \cdot \sum_{j=1}^{m} q_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{m} \rho_{mj} \cdot \sum_{j=1}^{m} q_{mj} . \tag{4}$$

В качестве начальной расстановки модулей выберем расстановку, минимизирующую правую часть неравенства (4). Правая часть неравенства (4) представляет собой скалярное произведение векторов

$$\left[\sum_j \rho_{1j}, \sum_j \rho_{2j}, \dots, \sum_j \rho_{mj} \right] \text{ и } \left[\sum_j q_{1j}, \sum_j q_{2j}, \dots, \sum_j q_{mj} \right].$$

Компоненты первого из этих векторов расположены по неубыванию:

$$\sum_j \rho_{1j} \le \sum_j \rho_{2j} \le \dots \le \sum_j \rho_{mj}$$

Нетрудно показать, что скалярное произведение двух векторов будет минимальным, если компоненты одного из них расположены по неубыванию, а компоненты второго – по невозрастанию. Следовательно, на первое место надо поставить модуль с максимальным количеством связей с остальными модулями, на второе – следующий

* Скалярным произведением матриц $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ размерности $m \times n$ называется число

$$A \otimes B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij} .$$

по количеству связей за первым модулем и т.д., т.е. модули должны быть занумерованы так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum_j q_{1j} \ge \sum_j q_{2j} \ge \dots \ge \sum_j q_{mj} .$$

Тогда вектор $V = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ расстановки модулей, у которого i – я компонента равна номеру модуля, стоящего на i – м месте, при начальной расстановке будет иметь такой вид:

$$V = [1, 2, \dots, m] .$$

Применяя далее для минимизации суммы (3) методику Розенталя, в ходе алгоритма необходимо менять местами модули, расположенные на k -м и ℓ -м местах ($1 \le k \le m$; $1 \le \ell \le m$). Нетрудно показать, что при этом (3) изменяется на величину

$$\Delta(\ell, k) = \sum_{j=1}^{m+n} (\rho_{\ell j} - \rho_{kj}) \cdot (q_{v_k v_j} - q_{v_\ell v_j}) + 2 \rho_{\ell k} \, q_{v_\ell v_k} ,$$

где v_j при $j \le m$ – компоненты вектора V, а при $j > m$ $v_j = j$. Отсюда вытекает следующий порядок вычислений. Полагаем последовательно $k = 1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots, m, \dots$ При каждом значении k находим точку минимума ℓ_k функции $\Delta(\ell, k)$ и проверяем выполнение неравенства

$$\Delta(\ell_k, k) < 0 . \tag{5}$$

Если (5) выполняется, то в векторе V меняем местами k -ю и ℓ_k – ю компоненты и точку минимума функции

$$\Delta(\ell, k+1 (mod\ m))^{*)} \tag{6}$$

находим при новых значениях v_i. В противном случае точка минимума функции (6) находится при тех же значениях v_i, что и точка минимума функции $\Delta(\ell, k)$.

Описанный процесс исследования функции $\Delta(\ell, k)$ прекращаем, когда при m последовательных значениях k выполняется неравенство

$$\Delta(\ell, k) \ge 0 .$$

* Здесь через $k+1 (mod\ m)$ обозначается наименьшее положительное число, сравнимое с $k+1$ по модулю m.

Полученные к этому моменту значения компонент вектора V и дают квазиоптимальное размещение модулей: на i -е ($I \leq i \leq m$) место должен быть поставлен модуль, номер которого равен i - й компоненте вектора V . Очевидно, что при полученном размещении сумма длин ребер минимизирующего графа $\mathcal{G}_{полн.}$ не может быть уменьшена перестановкой каких-либо двух моделей.

У м е н ь ш е н и е   п а м я т и   а л г о р и т м а . Во-первых заметим, что при печатном монтаже минимизация величины $\Sigma(T, V)$ необходима в основном для увеличения возможностей выполнения всех необходимых печатных соединений. Во-вторых, при реализации предложенной методики используются лишь расстояния между центрами модулей; количество q различных таких расстояний обычно невелико (это число порядка $\sqrt{m}$). Исходя из сделанных двух замечаний, заданную метрику ρ можно заменить целочисленной метрикой ρ' , где величина ρ'_{ij} зависит от интуитивно определяемой трудности соединения модулей, расположенных на i -м и j -м местах, причем $max\, \rho'_{ij} \sim \sqrt{m}$; это позволит уменьшить память, необходимую для записи матрицы R .

Например, если центры мест для модулей расположены по некоторой квадратной сетке, то можно поступить следующим образом. Выбираем из множества всевозможных значений ρ_{ij} максимальное множество попарно различных значений, располагаем эти значения по возрастанию:

$$\rho_{i_1 j_1} < \rho_{i_2 j_2} < \ldots < \rho_{i_q j_q},$$

а затем заменяем метрику ρ метрикой ρ' такой, что $\rho'_{i_1 j_1} = I$ $\rho'_{i_2 j_2} = 2, \ldots, \rho'_{i_q j_q} = q$, и равным значениям $\rho_{ij} = \rho_{kl}$ в метрике ρ соответствуют равные значения $\rho'_{ij} = \rho'_{kl}$ в метрике ρ'. Очевидно, что $max\, \rho'_{ij} = q \sim \sqrt{m}$, и для записи каждого из чисел ρ'_{ij} достаточно отвести $[\log_2(2q+1)]$ двоичных разрядов памяти ЭВМ[*)]

А л г о р и т м   о р и е н т и р о в а н и я   м о д у л е й .

Для ориентирования модулей предлагается следующий алгоритм. Возможные цоколевки модуля нумеруются: 0-цоколевка, I-цоколевка и т.д. На плате вводится некоторая система координат. Путем переноса начала координат в центр модуля для каждого модуля вводится локальная система координат. Составляются следующие таблицы:

*) А.Н.Мелихов, В.М.Курейчик и В.В. Лисяк в работе [5] предлагают аналогичную метрику для решения задачи размещения графа на плоскости.

1) таблица координат модулей (центров модулей) с указанием начальной цоколевки (за начальную может быть принята любая цоколевка);

2) таблица локальных координат контактов модуля при 0-цоколевке.

Выбирается первый модуль. Используя составленные таблицы и таблицу соединений, подсчитывают суммы расстояний контактов модуля до связанных с ними контактов при различных цоколевках первого модуля. В таблице координат указывается цоколевка, при которой эта сумма оказалась наименьшей (т.е. локально оптимальная цоколевка).

То же проделывается для каждого из остальных модулей. Если при этом хотя бы один модуль изменил цоколевку по сравнению с той, которая была указана в таблице координат модулей, то опять выбирается первый модуль и ищется для него локально-оптимальная цоколевка, затем то же проделывается для второго модуля и т.д.

Алгоритм заканчивает работу, когда процесс изменения цоколевки модулей стабилизируется[*)].

Если каждый модуль имеет две возможных цоколевки, то для платы, содержащей 20 модулей по 30 контактов в каждом, ориентирование модулей по предлагаемому алгоритму будет выполнено на машине "М-20" менее, чем за одну минуту.

П р о г р а м м а   р а з м е щ е н и я   м о д у л е й . По описанному алгоритму составлена на языке ЭПСИЛОН программа размещения модулей. Оттранслированная для машины "М-20" программа занимает 508 ячеек памяти. Для списков отводится 3 503 ячейки. За незначительное машинное время программа дает приемлемые решения задачи размещения модулей. Так, для размещения 20-ти элементов по составленной программе понадобилось I,5 минуты.

*) Легко видеть, что этот процесс сходится.

Литература

1. В.А.ТЮРЕНКОВ. Об одном методе трассировки печатных прово - дов на больших платах, Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Новосибирск, 1968.
2. C.W. ROSENTHAL. Computing machine aids to a development project.-IRE Trans.Electron. Comput.,1961,EC-1,N 3,
3. В.С.ЛИНСКИЙ. Алгоритмическое проектирование вычислительных цифровых устройств, М., 1963 (АН СССР,ВЦ: "Сообщения по вычислительной технике", вып. 2).
4. О. ОРЕ. Теория графов, М., "Наука", 1968.
5. А.Н.МЕЛИХОВ, В.М.КУРЕЙЧИК, В.В.ЛИСЯК. Об одном методе размещения графа на плоскости. В сб."Вычислительные сис - темы", Новосибирск, в печати.

Поступила в редакцию
17/ш - 1970 г.