ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1970 год Выпуск 39

УДК 681.142.003: 681.142.019.3

ВЛИЯНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОЖИДАЕМЫЙ ДОХОД ПРИ ЕЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Э.Г. Хорошевская

Предлагается методика расчета дохода, приносимого однородными универсальными вычислительными системами (УВС) при их эксплуатации. Устанавливается зависимость дохода от основных показателей системы. Рассматриваются примеры организации УВС, отражающие современное состояние вычислительной техники. Приводится программа, записанная на АЛГОЛе.

Имеется УВС, состоящая из N элементарных машин (ЭМ). Систему обслуживают m, $1 \leqslant m \leqslant N$, восстанавливающих устройств.

Система может находиться в одном из состояний множества $E=\{0,1,\ldots,j,\ldots,N\}$, j – число исправных ЭМ. Требуется вычислить доход $D_j(t)$, который принесет система за время t, если при $t=0$ УВС находилась в состоянии $j \in E$.

Если α_{jj} – доход, который приносит система за единицу времени в течение ее пребывания в состоянии $j \in E$; α_{ji} – доход, который приносит система при переходе из состояния j в состояние i, $i \neq j$, $j, i \in E$, то $D_j(t)$ определится из уравнения [1]:

$$D_j'(t)=\alpha_{jj}+\sum_{i \neq j} \varkappa_{ji}\,\alpha_{ji}+\sum_{i=0}^{N} \varkappa_{ji}\, D_i(t);\ j,\ i \in E . \qquad (1)$$

Здесь æ_{ji} - интенсивность перехода системы из состояния j в состояние i,

$$\text{æ}_{jj} = -\sum_{i \neq j} \text{æ}_{ji}.$$

Величина

$$d_j = d_{jj} + \sum_{i \neq j} \text{æ}_{ji}\, d_{ji}$$

называется нормой выручки.

Для однородных УВС время безотказной работы ЭМ и время восстановления отказавшей ЭМ распределены по экспоненциальным законам с параметрами λ и μ соответственно [2]. Поэтому для них

$$\left.\begin{aligned}
&\text{æ}_{ji} = 0, \quad \text{если} \quad |i-j| > 1,\\
&\text{æ}_{j,j-1} = j\lambda, \quad \text{если} \quad 0 < j \leq N,\\
&\text{æ}_{j,j+1} = \begin{cases} m\mu, & 0 \leq j \leq (N-m),\\ (N-j)\mu, & (N-m) < j \leq N,\end{cases}\\
&\text{æ}_{j,j} = \begin{cases} -j\lambda - m\mu, & 0 \leq j \leq N-m,\\ -j\lambda-(N-j)\mu, & N-m < j \leq N,\end{cases}\\
&d_{jj} = jc_1 - \Delta(m-N+j)(m-N+j)c_2,\\
&d_{ji} = -\Delta(i-j)(i-j)c_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geq 0,\\ 0, & \text{если} \quad x < 0,\end{cases}$$

c_1 - стоимость эксплуатации ЭМ в единицу времени,

c_2 - стоимость содержания одного восстанавливающего устройства в единицу времени,

c_3 - средняя стоимость запасных деталей, расходуемых при восстановлении одной отказавшей ЭМ.

Тогда при подстановке (2) в (I) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&D_j'(t) = d_j + j\lambda D_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)D_j(t) + m\mu D_{j+1}(t),\\
&\qquad 0 \leq j \leq N-m,\\
&D_j'(t) = d_j + j\lambda D_{j-1}(t) - [j\lambda + (N-j)\mu]D_j(t) + (N-j)\mu D_{j+1}(t),\\
&\qquad N-m < j \leq N,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где норма выручки

$$d_j = jc_1 - m\mu c_3, \quad j \leq N-m,$$

$$d_j = jc_1 - (j-N+m)c_2 - (N-j)\mu c_3, \quad j > N-m.$$

Решая (3) при начальных условиях $D_j(0) = 0, j \in E$, получим

$$D_j(t) = \frac{\tilde{\Delta}_N(0)}{\Delta_{N+1}'(0)} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\tilde{\Delta}_N(-\alpha_i)(e^{-\alpha_i t} - 1)}{-\alpha_i \cdot \Delta_{N+1}'(-\alpha_i)},$$

где

$$\tilde{\Delta}_N(s) = \delta_{N-j}(s)\sum_{k=0}^{j} d_k \Delta_k(s)\lambda^{j-k}\frac{j!}{k!} + \Delta_j(s)\sum_{k=j+1}^{N} d_k \delta_{N-k}(s)\sigma_k^{-j}\mu^{k-j},$$

$$\Delta_k(s), \quad k = 0, 1, \ldots, j;\ N+1,$$

вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\Delta_{k+1}(s) = (k\lambda + m\mu + s)\Delta_k - k\lambda m\mu\Delta_{k-1}(s), \quad 0 \leq k \leq N-m,$$

$$\Delta_{k+1}(s) = [k\lambda + (N-k)\mu + s]\Delta_k(s) - (N-k+1)\mu k\lambda\Delta_{k-1}(s), \quad N-m < k \leq N,$$

$$\Delta_{-1}(s) = 0, \quad \Delta_0(s) = 1;$$

$$\delta_i(s) = \delta_{N-k}(s), \quad k = j, j+1, \ldots, N,$$

вычисляются по формулам:

$$\delta_{i+1}(s) = [s + (N-i)\lambda + i\mu]\delta_i(s) - (N-i+1)\lambda i\mu\delta_{i-1}(s), \quad i < m,$$

$$\delta_{i+1}(s) = [s + (N-i)\lambda + m\mu]\delta_i(s) - (N-i+1)\lambda m\mu\delta_{i-1}(s), \quad i \geq m,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, N-k-1, \quad \delta_0(s) = 1, \quad \delta_{-1}(s) = 0,$$

$$\sigma_k^j = \begin{cases} \dfrac{(N-j)!}{(N-k)!}, & j \geq N-m, \\ m^{k-j}, & j < N-m,\ k < N-m, \\ \dfrac{m^{N-m-j}\, m!}{(N-k)!}, & j < N-m,\ k > N-m, \end{cases}$$

$-\alpha_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$, – корни многочлена $\Delta_{N+1}(S)$, которые находятся с помощью следующих свойств [3].

I. Все корни $\Delta_k(S)$, $k \in E$, различны и отрицательны, один корень многочлена $\Delta_{N+1}(S)$ равен нулю.

2. Корни соседних многочленов $\Delta_{k-1}(S)$ и $\Delta_k(S)$ чередуются, $k-1, k \in E$.

3. Сумма корней многочлена $\Delta_k(S)$ равна

$$-A_k = -\frac{k(k-1)}{2}\lambda - mk\mu, \text{ если } k \leq N-m,$$

$$-A_k = -\frac{k(k-1)}{2}\lambda - km\mu - \frac{(m+k-N)(m+k-N+1)}{2}\mu, \text{ если } k > N-m.$$

Из (2) видно, что при расчете дохода $D_j(t)$ учитывались издержки на простаивание восстанавливающих устройств и на восстановление отказавшей ЭМ. Если к тому же учитывать издержки, связанные с простаиванием отказавших ЭМ в очереди на восстановление, то

$$d_{jj} = jC_1 - \Delta(m-N+j)(m-N+j)C_2 - \Delta(N-j-m)(N-j-m)C_1.$$

В заключение приведем примеры, отражающие зависимость дохода $D_j(t)$, $j \in E$, от основных показателей системы.

Известно [2], что для системы "Минск-222" λ = 0,024 I/час, μ = 0,7 I/час, C_1 = 20 руб/час, C_2 = II руб/час, C_3 = 70 руб.

На рис. I приведены $D_j(t)$ для N = I,2,...,I0,20,30 при условии, что $j = N$, $m = 1$. На рис. 2 показана зависимость $D_j(t)$ от начального состояния системы; здесь N = I0, m = I, j = 0, I,2,...,I0.

В табл. I приведен доход системы (в рублях) в зависимости от числа восстанавливающих устройств. Из таблицы видно, что для системы, состоящей из I0 ЭМ, достаточно одно восстанавливающее

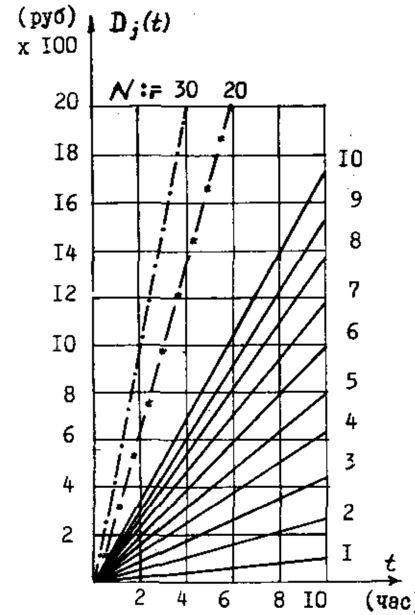

Рис. I

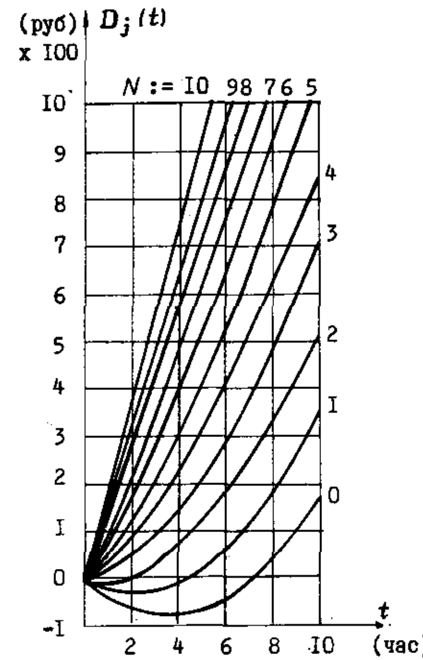

Рис. 2

Таблица I

N	m \ t	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
I0	I	I84	36I	534	706	876	I045	I2I4	I383	I55I	I7I9
	2	I72	338	500	660	820	979	II38	I297	I455	I6I4
20	I	336	672	I008	I343	I680	20I6	2352	2688	3024	3359
	2	323	652	98I	I3I3	I647	I98I	23I6	2652	2989	3326
30	I	462	945	I440	I944	2453	2964	3478	3992	4507	5022
	2	55I	I096	I635	2I70	2700	3226	3748	4268	4784	5300
	3	672	I323	I950	2552	3I30	3684	42I3	47I8	5200	5658

устройство. Из 20 ЭМ в ближайшее время больший доход будет приносить система, имеющая одно восстанавливающее устройство, но в дальнейшем – система, имеющая два восстанавливающих устройства; аналогично, система из 30 ЭМ будет приносить большую прибыль при 3- восстанавливающих устройствах.

Зависимость $D_j(t)$ от λ и μ при $N = 10$, $j = N$, $m = 1$ видна из табл. 2 и 3; для табл. 2 μ = 0,7 1/час, для табл. 3 λ = 0,024 1/час.

Таблица 2

λ \ t	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
0,024	I84	36I	534	706	876	I045	I2I4	I383	I55I	I7I9
0,0I	I87	370	553	734	9I5	I096	I277	I458	I638	I8I9
0,005	I89	375	56I	746	93I	III6	I30I	I486	I670	I855

Таблица 3

μ \ t	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
0,7	I84	36I	534	706	876	I045	I2I4	I383	I55I	I7I9
I,0	I82	357	530	70I	87I	I04I	I2II	I380	I550	I7I9
2,0	I79	352	523	694	865	I037	I208	I379	I550	I720

Таким образом, меняя параметры систем, а также организацию обслуживания УВС, можно обеспечить максимальную экономическую эффективность при эксплуатации систем.

Программа

для расчета дохода $D_j(t)$ записана на языке АЛГОЛ. Вводятся следующие исходные данные:

- N – число ЭМ в системе;
- m – число восстанавливающих устройств;
- λ – интенсивность отказов в ЭМ;
- μ – интенсивность восстановлений ЭМ;
- $\gamma 1$ – стоимость эксплуатации ЭМ в один час;
- $\gamma 2$ – стоимость содержания одного восстанавливающего устройства в час;
- $\gamma 3$ – средняя стоимость запасных деталей, расходуемых при восстановлении одной отказавшей ЭМ;
- τ – конечное время;
- Δ – шаг по времени;
- ϵ – степень точности счета корней полиномов;
- j – число исправных ЭМ в системе при $t = 0$.

На печать выдаются значения:

$$\Delta, D_j(\Delta); 2\Delta, D_j(2\Delta), \ldots, \tau, D_j(\tau).$$

```
begin integer N,m,j,k,i,r; real λ,μ,γ1,γ2,γ3,τ,Δ,ε,c1,c2, Σ ,S,
      φ1,φ2, d,f,a,b,X,ρ,t,W;
 read(N,m,λ,μ,γ1,γ2,γ3,τ,Δ,ε,j);
begin real array  P1[0:N-I], P2[0:N], P3[0:N+1], α[0:N+1],
      β[1:N+1];
for  i:=2 step I until (N+1) do P3[i]:= 0;k:=0; P1[0]:=P2[0]:=
P3[0]:= I;  P2[I]:= P3[I]:= m x μ;  Σ:= α[I]:= -m x μ; α[0]:=0;
H: k:= k+I,  if k ≤ N-m  then cI:= k x λ x m x μ  else  cI :=
k x λ x μ x (N-k+I);  if k ≤ N-m  then c2 := k x λ + m x μ else
c2 := k x λ + (N-k) x μ; for i:=0 step 1 until k do P3[i+1]:=
P3 [i+I] + c2 x P2 [i]; for i:=0 step 1 until (k-1) do P3[i+2]:=
P3 [i+2] - cI x PI[i];  if k ≤ N-m  then Σ:= Σ - kλ - mμ  else
Σ:= Σ - kλ - (N-k) x μ; S:= 0;  φ1:= P3[k+1]; i:= 0; if N = 1
then begin α[1]:=Σ ; β[1]:= 1; P2[1]:= P3[1]; r:= 0; go to R
end; if k=N then begin β [1]:= 0; a:= α[1]; φ1:=P3[0];for r:=1
step I until (N+I) do  φI:= φI x a + P3[r];  i:= I end;
П:  a:= α[i];  b:= α[i+I];  φ2 := P3 [0];  for r:= I step I un-
til (k+I) do φ2 := φ2 x b + P3 [r];  d:= φ2 ;  D: X:= (a+b)/2 ;
f:= P3 [0];  for  r:= I  step I until (k+I) do f:=f x X+P3[r];
if  f= 0  then go to A;  if (X-b) < ε  then go to A else  if
sign ( φI) = sign (f) then go to B else go to C; A: β[i+I]:= X;
S:= S+X;  φI:= d;  i:= i+I;  if i < k  then go to П  else  go
to Φ ;  B:  a:= X;  φI:= f;  go to D;  C:  b:= X; φ2 := f;  go
to D;    Φ: β[k+I]:= Σ-S;  for i:= I  step I until (k+I)  do
α[i]:= β[i];  if k ≤ N- I  then begin for i:= 0 step I until k
do P1[i]:= P2[i]; for i:=0 step 1 until (k+1) do P2[i]:=P3[i];
go to H end; for i:= 0 step I until (N-I) do P3 [i]:= P3 [i]
x (N -i);  for i:= I  step I until N do α[i]:= α[i+I]; P2[N] :=
```

```
P3 [N]; for r:= I step I until N do begin X:= α[r];f:=P3[0];
for i:= I step I until (N-I) do f:= f x X + P3 [i]; β[r]:= f
end; r:= 0; R: X:= α[r]; k:= 0; d:= -m x μ x γ3 ; φI:=0;
φ2 := I; f:= I;ρ:= I; for i:= I step I until j do ρ:=ρ x λ
x i; P3 [r]:= d x f x ρ; if j = 0 then begin P3 [r]:= d; go
to Q end; Y: if k ≤ N-m then f := (k x λ + m x μ + X) x φ2 -
k x λ x m x μ x φI else f:= (k x λ + N x μ - k x μ x X) x φ2
- (N - k +I) x μ x k x λ x φI; φI:= φ2; φ2 := f; k:= k+I;
if k ≤ N-m then d:= k x γI - m x μ x γ3 else d:= k x (γ1
- γ2) +γ2 x (N - m) - (N - k) x μ x γ3; ρ:= ρ/(k x λ);
P3 [r]:= P3[r] + d x f x ρ; if k < j then go to Y; Q: b:=
φI:= 0; a:= f; φ2:= f:= I; if j=N then go to Z; k:= N;
ρ:= I; d:= N x γI - m x γ2; if j≥ N - m then begin for
i:= I step I until (N-j) do ρ:= ρ x i x μ end else begin
for i:= I step I until m do ρ:= ρ x i; ρ:= ρ x m↑ (N-m-j) x
μ↑(N-j) end; i:= 0; b:= d x f xρ; F: k:= k-I; if i < m
then f:= (X + N x λ - i x λ + i x μ) x φ2 - (N - i + I) x λ
x i x μ x φI else f:= (X + N x λ - i x λ + m xμ ) x φ2 -
(N - i + 1) x λ x m x μ x φ1; φ1:= φ2; φ2:= f; if k ≤ N-m
then d:= k x γ1 - m x μ x γ3 else d:= k x (γ1 - γ2) +γ2
x (N-m) - (N-k) x μ x γ3; i:= i+1; if j ≥ N-m then ρ :=
ρ /(μ x i) else if k > N-m then ρ := ρ /(μ x i) else
ρ := ρ /(m x μ ); b:= b + d x f x ρ; if k > j+1 then go to
F; if i < m then f:= (X+N x λ - i x λ + i x μ ) x φ2 - (N -
i+1) x λ x i x μ x φ1 else f:= (X + N x λ - i x λ + m x μ )
x φ2 - (N-i+1) x λ x m x μ x φ1; Z: P3[r]:= P3[r] x f+a x b;
r:= r+1; if r ≤ N then go to R; P3[0]:= P3[0]/P2[N]; t:=
0; T: t:= t + Δ ; W:= P3[0]x t; for r:= 1 step 1 until
N do W:= W+P3[r]/(α [r] ↑ 2 x β [r]) x (exp (α [r] x t)-1);
print (t,W); if t< τ then go to T
                                   end end;
```


ЛИТЕРАТУРА

I. Р.А. ХОВАРД. Динамическое программирование и марковские процессы. М., "Сов.радио", I964.

2. В.Г. ХОРОШЕВСКИЙ. Некоторые вопросы стоимости однородных универсальных вычислительных систем. - Вычислительные системы, Новосибирск, "Наука" СО, I968, вып.3I,стр.4I-54.

3. Б.В. ГНЕДЕНКО, Ю.К. БЕЛЯЕВ, А.Д. СОЛОВЬЕВ. Математические методы в теории надежности. М., "Наука", I965.

Поступила в редакцию
I6.IУ.I969 г.