

УДК 621.3.061:681.142.353

МЕТОДЫ АНАЛИЗА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ КРИОТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Н.И. Назаров

В настоящей работе проводится исследование быстродействия криотронной вычислительной среды [1], целью которого является установление закономерностей переходных процессов при работе устройств, реализованных в этой среде, и получение аналитических и численных методов определения их быстродействия.

Задача о быстродействии и ее упрощение. Криотронная вычислительная среда представляет собой однородную структуру, участок которой показан на рис.1. Все ветви структуры обладают индуктивностями; предположим, что они одинаковы и равны L . Все ветви, соединяющие вертикальные и горизонтальные шины (за исключением ветвей, являющихся углами контуров), имеют, кроме того, сопротивления R . На рис. 1 показан контур АБВГА. В ветви, соединяющей углы контура со средой, соответствующей настройкой элементов среды включают сопротивления (иногда их включение необязательно); две ветви должны оставаться сверхпроводящими для подвода к контуру тока питания (шины J).

Работа устройства в среде сводится к переключению тока в контурах. Например, если ток источника проходил по левой ветви АБ, то при включении в эту ветвь сопротивления он будет пере-

включаться в правую ветвь БВГА. Задача состоит в определении характеристик этого процесса, влияния параметров контура и окружающей структуры на переключение тока. Удобнее рассматривать

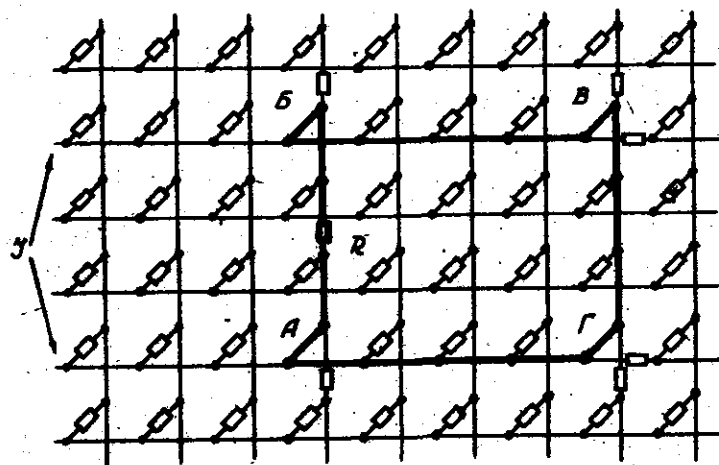


Рис. 1

задачу не о переключении, а о затухании тока в контуре АБВГА при включении в контур сопротивления. Такая замена правомерна ввиду линейности описывающей процесс системы дифференциальных уравнений для контурных токов и отсутствия сопротивления в ветви контура, в которую переключается ток. Полученные в результате решения контурных уравнений токи ветвей для случаев переключения и затухания будут одинаковыми за исключением ветви контура БВГА, где ток отличается на константу (величину тока питания).

В [2] приводится результат численного решения контурных уравнений, описывающих исходную структуру, для случая затухания тока в контуре. Ограниченность подобного метода очевидна, так как число контурных уравнений при увеличении участка среды очень быстро возрастает, и система уравнений становится практически неразрешимой. Тем не менее результат численного анализа переходных процессов в небольших участках среды можно использовать для установления закономерностей в больших средах.

Пусть в контуре на рис. 1 записан ток, равный единице. В

момент времени $t = 0$ в левую ветвь включается сопротивление R . Решая на ЦВМ контурные уравнения (контур расположен в середине участка среды, имеющего 90 контуров, ввиду симметрии достаточно решить 50 уравнений), получим величины контурных токов, а по ним токи ветвей. На рис. 2 показано распределение токов в ветвях среды в переходном процессе в один из моментов времени (величины токов указаны тремя знаками после запятой).

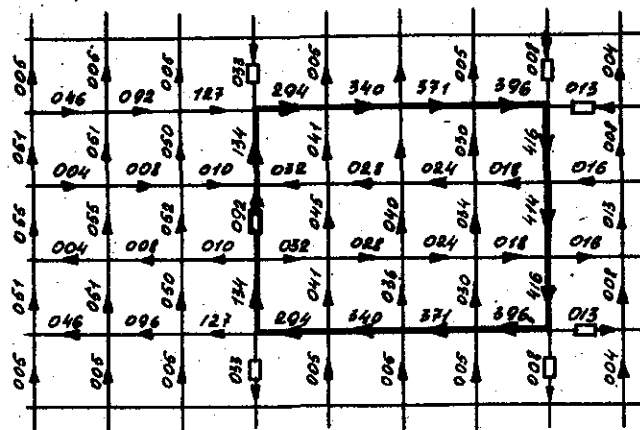


Рис. 2

Подобное распределение (его вид сохраняется при увеличении участка среды) устанавливается вскоре после начала переходного процесса и в дальнейшем качественно не меняется. Отсюда видно, что не все ветви среды играют одинаковую роль в шунтировании контура и что ток контура замыкается, главным образом, через поперечные ветви, соединяющие сверхпроводящие нити для подвода тока. На рис. 3 основные шунтирующие цепи, имеющие вид $\angle R$ - цепочек, изображены отдельно. Решение контурных уравнений для этого случая показывает, что выделенные цепи действительно являются основными шунтирующими цепями к схеме на рис. 2 и 3 эквивалентны по отношению к процессу затухания тока в контуре. Последняя схема имеет гораздо более простую структуру и допускает возможность аналитического исследования.

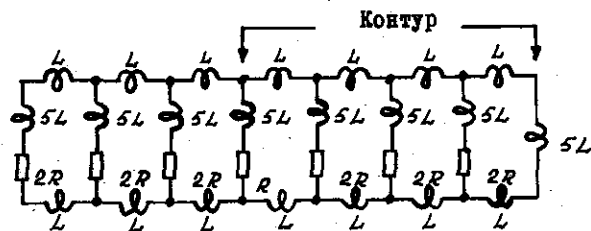


Рис. 3

От эквивалентной схемы на рис. 3 можно перейти к двум схемам, удобным для анализа: 1) к модели с сосредоточенными параметрами, в которой поперечные ветви внутри контура предполагаются разомкнутыми (рис. 4а), mL — индуктивность сверхпроводящей

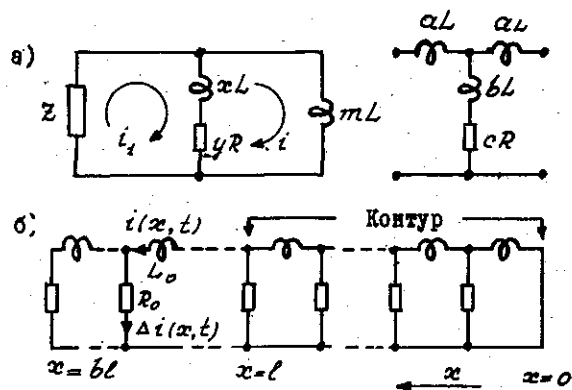


Рис. 4.

ветви контура между точками присоединения его к цепочке, Z — входное сопротивление бесконечной цепочки, элемент которой показан справа; 2) к модели с распределенными параметрами (рис. 4б), получающейся в предположении, что индуктивности поперечных ветвей цепочки равны нулю. Правомомерность обоих предположений будет

показана ниже. Рассмотрим подробно обе модели, так как каждая из них позволяет получить часть результатов, которые нельзя получить в другой модели.

Модель с сосредоточенными параметрами. Задача о затухании тока в контуре, реализованном в среде, свелась к следующему: в начальный момент времени $t = 0$ контурный ток $i = 1$ (рис. 4а) и включается сопротивление yR ; необходимо определить закон затухания тока $i(t)$.

Переходный процесс в схеме на рис. 4а описывается системой из двух уравнений в операторной форме:

$$\begin{aligned} (m\rho L + x\rho L + yR)i - (x\rho L + yR)i_1 &= (m + x)L; \\ -(x\rho L + yR)i + (x\rho L + yR + Z)i_1 &= -xL. \end{aligned} \quad (1)$$

Входное сопротивление цепочки Z может быть определено различными способами и равно:

$$Z = \sqrt{\rho L} \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha b)\rho L + 2acR}.$$

Исключая i_1 из (1) и обозначая $(\alpha^2 + 2\alpha b) = \alpha$, $2ac = \beta$, $LR^{-1} = \tau$, получаем:

$$i(\rho) = \tau \cdot \frac{m\gamma + x\tau\rho\tau + (m+x)\sqrt{\rho\tau}\sqrt{\alpha\rho\tau + \beta}}{\sqrt{\rho\tau} [m\gamma\sqrt{\rho\tau} + x\tau\rho\tau\sqrt{\rho\tau} + (\tau\rho\tau + x\rho\tau + \gamma)\sqrt{\alpha\rho\tau + \beta}]}. \quad (2)$$

Ввиду сложности (2) найти оригинал по изображению $i(\rho)$ затруднительно. Кроме того, нет необходимости определять поведение переходного тока во всем интервале времени $t > 0$. Как и во многих задачах о переходных процессах, когда представляет интерес прежде всего длительность процесса, достаточно определить поведение тока только при больших t .

Затухание при больших t определяется положением полюсов изображения тока на комплексной плоскости, имеющих максимальную величину действительной части. Самым правым полюсом явля-

ется точка $\rho=0$ с особенностью $(\sqrt{\rho})^{-1}$. Разлагая (2) в сходящийся ряд в окрестности $\rho=0$ и преобразуя его почленно, можно получить асимптотический ряд для $i(t)$ [3]. Первый член ряда имеет вид:

$$i(t) = \frac{m}{\sqrt{\pi\beta}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \quad (3)$$

Определяя отсюда длительность переходного процесса, получаем:

$$t = \frac{m^2}{\pi\beta i^2} \tau \quad (4)$$

Формулы (3), (4) справедливы при $t > m^2\beta^{-1}\tau$ или, что то же самое, при $i < (\sqrt{\pi})^{-1}$, что следует из условия возможности разложения (2) в ряд.

Формулы (3), (4) отображают несколько важных закономерностей: 1) асимптотическое поведение тока не зависит ни от величины включаемого в контур сопротивления, ни от величины индуктивности ветви контура с сопротивлением, находящейся между точками присоединения цепочечной схемы; 2) длительность переходного процесса зависит квадратично от индуктивности сверхпроводящей ветви контура; 3) длительность переходного процесса обратно пропорциональна квадрату величины тока в сверхпроводящей ветви контура; 4) асимптотическое поведение тока не зависит от индуктивностей поперечных ветвей цепочки (этот результат час-тично известен [4] и оправдывает второе из принятых ранее предположений); 5) асимптотическое поведение тока зависит только от β , произведения индуктивностей продольных ветвей ячеек на сопротивление поперечных.

На рис. 5 приведена полученная решением контурных уравнений зависимость изменения тока ветви АБ от времени в цепочке, показанной на том же рисунке, а также кривая, построенная по (3). По вертикальной оси откладывается отрицательный логарифм тока, что дает возможность отличать экспоненциальный процесс от какого-либо иного. Формула (3) применима при $t > m^2\beta^{-1}\tau \approx 30\tau$ и дает в этой области высокую точность. Отклонение при

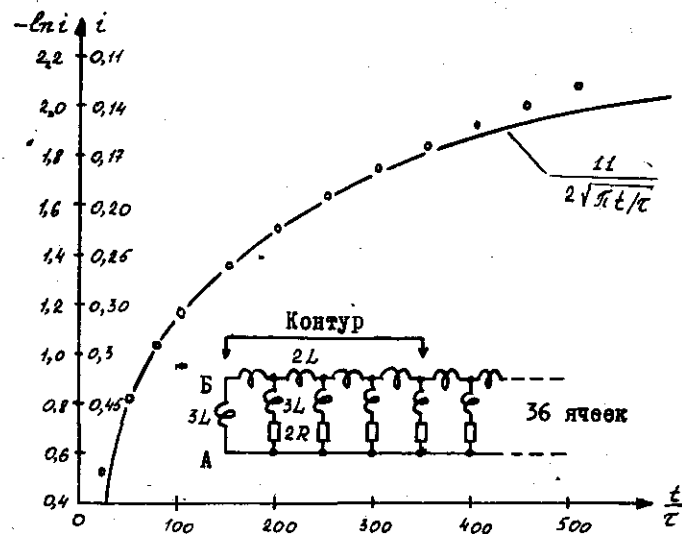


Рис. 5

больших t объясняется конечностью цепочки, вследствие чего процесс становится близким к экспоненциальному.

Из рис. 5 также видно, что наличие внутри контура трех дополнительных ветвей с сопротивлениями не меняет асимптотического поведения тока; это можно показать и аналитически, если рассчитать переходный процесс в схеме на рис. 4а при наличии дополнительных ветвей внутри контура. Первое из принятых предположений, следовательно, также оправдано.

Распределенная модель. В распределенной модели LR -цепочка представляет собой структуру, состоящую из одинаковых ячеек (рис. 4б). Длину цепочки будем измерять числом ячеек. Поперечные ветви с координатами $x=0$ и $x=l$ при $t < 0$ имеют нулевые сопротивления и вместе с верхней и нижней продольными ветвями цепочки образуют сверхпроводящий контур, в котором может циркулировать незатухающий ток

$i(t < 0) = 1$. При включении сопротивления в момент времени $t = 0$ в поперечную ветвь с координатой $x = \ell$ ток контура будет затухать, и закономерности этого процесса следует определить. Полную длину цепочки обозначим в виде $b\ell$, где $1 \leq b \leq \infty$, т.е. b имеет смысл относительной длины.

Распределение тока продольных ветвей $i(x, t)$ в переходном процессе описывается уравнением теплопроводности [5]:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (5)$$

где $\tau = L_0 R_0^{-1}$.

Определим начальные и граничные условия. Начальное распределение тока $i(x, 0)$ очевидно: ток равен единице в интервале $0 < x \leq \ell$ и нулю в интервале $x > \ell$. Граничные условия можно определить, пользуясь аналогией с нагретым стержнем: замкнутый конец цепочки соответствует теплоизолированному концу стержня, и производная от тока по координате должна быть равна нулю, другой конец цепочки соответствует концу стержня, находящемуся при постоянной (нулевой) температуре. Удобнее решать симметричную задачу, для этого продолжим цепочку (рис. 4б) симметрично в область $x < 0$, что не меняет условия в начале координат. Тогда для (5) получим начальные и граничные условия:

$$i(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \ell, \\ 0, & \ell < |x| \leq b\ell; \end{cases} \quad (6)$$

$$i(-b\ell, t) = i(b\ell, t) = 0.$$

Решение (5) с условиями (6) имеет различный вид в зависимости от конечности или бесконечности цепочки [6]. При $b\ell < \infty$

$$i(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2b\ell} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2b\ell)^2} \frac{t}{\tau} \right], \quad (7)$$

при $b\ell = \infty$

$$i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{S_1}^{S_2} \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (8)$$

где

$$S_1 = \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}}, \quad S_2 = \left(\frac{x}{\ell} + 1 \right) \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}}.$$

Интеграл в (8) можно записать в виде разности двух интегралов вероятности.

Выражения (7), (8) могут быть значительно упрощены, если рассматривать переходный процесс при больших t .

В случае $b\ell < \infty$ и $t \gg \frac{1}{3} \left(\frac{2b\ell}{\pi} \right)^2 \tau$ пренебрегаем всеми членами ряда (7), кроме первого:

$$i(x, t) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2b} \cos \frac{\pi x}{2b\ell} \exp \left[-\left(\frac{\pi}{2b\ell} \right)^2 \frac{t}{\tau} \right]. \quad (9)$$

Как следует из (9), при больших t ток убывает по экспоненциальному закону с эффективной постоянной времени

$$\tau_{\text{эф}} = \left(\frac{2b\ell}{\pi} \right)^2 \tau,$$

квадратично зависящей от длины цепочки $b\ell$, но не зависящей от длины контура ℓ . Амплитуда тока зависит от координаты точки и от относительной длины цепочки. Наиболее медленно ток затухает в начале цепочки. В [4] исследована конечная цепочка при $b=1$ и получены сходные результаты.

На рис. 6 изображены следующие графики: 1, 3 - рассчитанные на ЦВМ решения контурных уравнений кривые изменения тока в начале координат в цепочке из 30 ячеек при $\ell = 10$ и $\ell = 30$ соответственно; 2, 4 - кривые, построенные по формуле (9) для соответствующих случаев. Графики иллюстрируют высокую точность формулы (9) в областях t , где эта формула справедлива. Соответствующие области по току достаточно велики, чтобы представлять интерес.

Рассмотрим теперь переходный процесс в контуре, шунтированном бесконечной цепочкой. Формула (8) может быть упрощена, если воспользоваться теоремой о среднем для интегралов:

$$i(x, t) = \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \exp(-\xi_0^2),$$

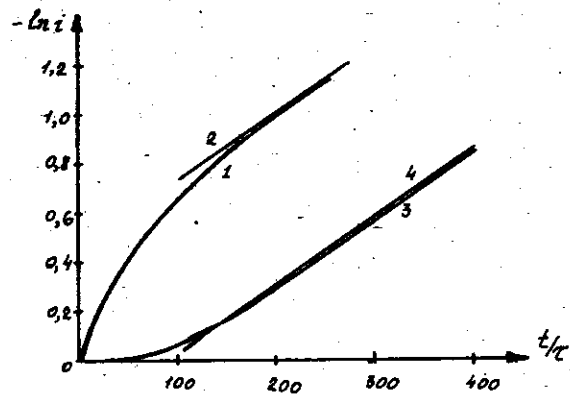


Рис. 6.

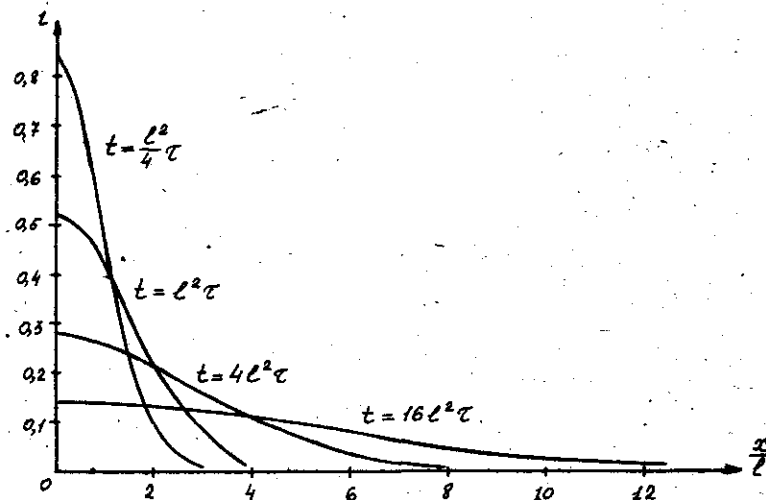


Рис. 7.

где ξ_0 — точка в интервале интегрирования в (8). Считая t достаточно большим ($t \gg \frac{\tau^2}{4}$) и учитывая гладкость подынтегральной функции, за ξ_0 можно взять середину интервала интегрирования:

$$\xi_0 = \frac{\tau}{2} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{t}}$$

Таким образом, асимптотическое выражение для тока продольных ветвей будет иметь вид:

$$i(x, t) = \frac{L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\tau^2} \cdot \frac{\tau^2}{4t}\right). \quad (10)$$

В начале цепочки ток контура убывает по закону

$$i(0, t) = \frac{L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}}. \quad (11)$$

Выражение (10) при больших t ($t \gg \frac{\tau^2}{4}$) практически переходит в (11), т.е. величина тока продольных ветвей в определенном интервале, увеличивающемся с ростом t , почти не зависит от x ; одновременно с затуханием тока его распределение вдоль цепочки становится все более равномерным. Это подтверждается графиками на рис. 7, построенными по формуле (8) для четырех моментов времени.

Формула (11) аналогична (3), и они легко преобразуются друг в друга. Зависимость длительности переходного процесса от длины контура и величины тока контура получается такая же, как и (4).

Возникает вопрос о том, в каких случаях цепочку следует рассматривать как конечную, а в каких как бесконечную. Чтобы ответить на него, определим токи поперечных ветвей цепочки как разность токов продольных ветвей двух соседних ячеек, используя (8), предположение о больших t и теорему о среднем для интегралов. После ряда преобразований получим:

$$L \Delta i(x, t) = \frac{L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \cdot \operatorname{sh}\left(-\frac{x}{\tau} \cdot \frac{\tau^2}{2t}\right) \cdot \exp\left[-\left(\frac{x^2}{\tau^2} + 1\right) \cdot \frac{\tau^2}{4t}\right]. \quad (12)$$

Эта зависимость показана на рис. 8 для $t = \ell^2 \tau$ и $t = 4\ell^2 \tau$.

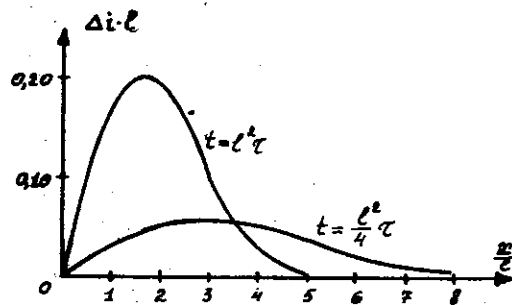


Рис. 8.

на рис. 8 имеют точки максимумов, которые можно использовать для определения мультирующей длины цепочки $x_{ш}$.

Для определения координат точек максимумов x_{max} из (I2) получим трансцендентное уравнение:

$$\frac{x_{max}}{\ell} \cdot th \left(\frac{x_{max}}{\ell} \cdot \frac{\ell^2 \tau}{2t} \right) = 1. \quad (I3)$$

Поскольку координаты точек максимума в интересующие нас моменты времени обычно лежат на расстоянии, большем нескольких ℓ , то гиперболический тангенс в (I3) — малая величина.

Используя один член его разложения в ряд, получим:

$$\frac{x_{max}}{\ell} \approx \frac{\sqrt{2}}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{t}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{i(x=0)} \quad (I4)$$

Формула (I4), во-первых, показывает, что чем продолжительнее переходный процесс, тем больший участок цепочки охватывается им; во-вторых, позволяет определить координату точки максимума, а мультирующую длину цепочки можно принять, например, $x_{ш} = (2 \div 2,5) x_{max}$. Сравнение длин мультирующей цепочки и фактической позволяет сделать заключение о конечности цепочки в каждом из конкретных случаев. Обычно середина переходного процесса описывается формулами для бесконечной цепочки, а конец — формулами для конечной.

Переходный процесс в контуре, реализованном в среде. Аналитические результаты, полученные при исследовании LR — цепочек, с большой или меньшей точностью применимы для определения характеристик процессов в контурах, расположенных в среде.

Если имеется контур простой формы (рис. I) и только две сверхпроводящие ветви, соединяющие контур со средой, то основные мультирующие цепи и их параметры определяются легко, а переходный процесс в контуре с высокой точностью описывается полученными выше формулами.

Если форма контура сложная, а количество сверхпроводящих ветвей больше двух, то выделение основных мультирующих цепей, имеющих простую структуру, часто становится невозможным. Применение полученных формул в этих случаях носит характер приближенной оценки.

Численное исследование переходных процессов в среде. После того, как численный анализ переходных процессов в небольших участках среды позволил выделить основные мультирующие цепи и тем самым значительно упростить структуру схемы, стало возможным их аналитическое исследование. В свою очередь, результаты последнего позволяют повысить эффективность численного анализа и сделать его возможным в больших средах.

При рассмотрении сосредоточенной модели было установлено, что длительность переходного процесса зависит только от произведения индуктивностей продольных ветвей на сопротивления поперечных ветвей цепочки. А это значит, что если соединить несколько элементов цепочки в один, как показано на рис. 9, то

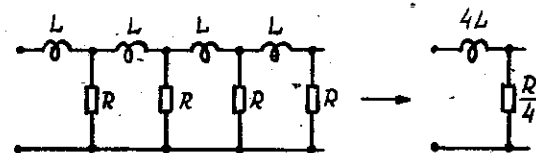


Рис. 9

характеристики переходных процессов в контуре, шунтированном цепочкой, не изменятся. Этот вывод может быть сделан и из (II). Результатом преобразования является уменьшение числа независимых контурных токов.

Если контур расположен в среде, то объединение элементов соответствует объединению горизонтальных или вертикальных шин. При объединении шин уменьшаются индуктивности ветвей вертикальных шин и увеличиваются индуктивности ветвей горизонтальных шин, при объединении горизонтальных — наоборот; индуктивности и сопротивления соединительных ветвей уменьшаются в обоих случаях. На рис. 10а показана исходная структура (параметры ветвей обозначены единицами), на рис. 10б показана та же структура после объединения двух горизонтальных шин в одну и двух вертикальных; число независимых контуров уменьшилось с девяти до четырех.

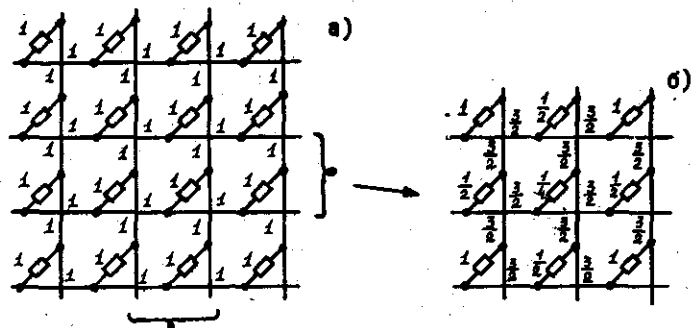


Рис. 10.

Практически почти в любом случае объединением шин можно уменьшить число независимых контуров до величины, доступной для решения на ЦМ, исключение составляют контуры очень сложной формы, так как шины, участки которых являются ветвями контуров, нельзя объединять с другими, и число уравнений после объединения может оставаться очень большим.

Число шин, которое можно объединить в одну, зависит от длины контура и от величины переходного тока контура, до которой мы предполагаем исследовать переходный процесс. Если вернуться к одномерной цепочке, то число объединяемых шин определяется

следующим образом: ограничившись исследованием участка длиной, равной шунтирующей длине, объединяем поперечные ветви так, чтобы в конечной структуре получилось 5-6 контуров при однородности шунтирующей цепочки. При объединении шин в среде следует исходить из тех же соображений.

Проверка метода объединения шин на нескольких примерах показала его высокую точность.

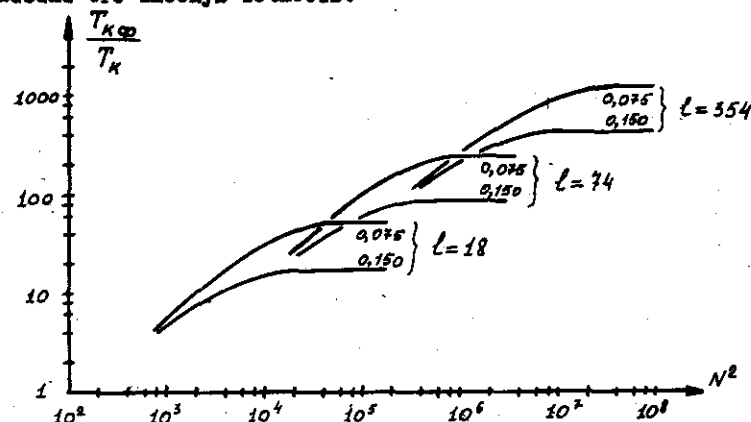


Рис. 11.

Для иллюстрации закономерностей переходных процессов в среде на рис. 11 приведен график, по горизонтальной оси которого отложено число элементов квадратного участка среды со стороной N , по вертикальной — отношение длительности переходного процесса в контуре, расположенном в середине участка, T_{ksp} к длительности процесса в контуре такой же длины при отсутствии шунтирования T_k . Кривые (рис. 11) рассчитаны для трех контуров: 4×3 элементов с длиной $l = 18$ (рис. 1), 20×15 ($l = 74$) и 100×75 ($l = 354$); длительности рассчитывались из условия затухания тока до 0,150 и 0,075 первоначальной величины. Чем больше длина контура и чем меньше переходный ток, тем больше возможное относительное замедление; увеличение участка среды замедляет процесс только до определенного предела. В частности, при затухании тока до 0,075 в контуре с $l = 74$, расположенном в среде из $6 \cdot 10^5$ элементов, длительность переходного процесса увеличивается в 240 раз и достигает величины $2 \cdot 10^4 \tau$; если

$\tau = 50$ нсек (ячейочные криотроны), то $T_{КСР} \approx 1$ мсек, при
 $\tau = 50$ псек (проволочные криотроны) $T_{КСР} \approx 1$ сек.

Основные результаты работ:

- 1) Предложен способ упрощения задачи переходных процессов в контурах в среде для их аналитического исследования.
- 2) Исследованы переходные процессы в контурах, мультиразвязанных LR - цепочками.
- 3) Получена зависимость характеристик переходных процессов в среде от её параметров и параметров контуров.
- 4) Предложен метод численного анализа переходных процессов в больших средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. АЧАСОВА, О.И. БАНДМАН, В.Ф. ГУРКО, Е.Г. МАКСИМОВА, Н.И. НАЗАРОВ. Исследование работы криотронной вычислительной среды. - Вычислительные системы. Материалы ко II Всесоюзной конференции по вычислительным системам и средам. Секция П и У, Новосибирск, 1969.
2. Н.И. НАЗАРОВ. Быстродействие криотронной вычислительной среды. - Вычислительные системы, Новосибирск, "Наука" СО, 1969, вып.33.
3. Г. КОРН, Т. КОРН. Справочник по математике. М., "Наука", 1968.
4. R.W. ANTONS. Calculation of speed of ladder network for superconductive associative memories, IEEE Trans. Electr. Comp., EC-14, 2, 1965, pp.267-270.
5. D.W. DAVIES. Parallel binary adders using the crossed-film cryotrons, Proc. Inst. Electr. Eng., pt.B, vol.110, June 1963, pp. 999-1007.
6. А.Н. ТИХОНОВ, А.А. САМАРСКИЙ. Уравнения математической физики. Наука, 1966.

Поступила в редакцию
5.I.1969 г.