

УДК 621.3.06I: 681.142.353

ФОРМАЛЬНЫЙ МЕТОД ЗАПИСИ  
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ КРИОТРОННЫХ АВТОМАТОВ ПО ИХ ЛОГИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ

С.М.Ачесов

Работе посвящена формализация процесса записи дифференциальных уравнений для криотронных схем звуковых автоматов. Динамические процессы в таких автоматах изучались в [1, 2, 3].

Рассматриваются автоматы, реализованные в криотронной вычислительной среде по графу состояний или каноническим уравнениям [1]. Методы синтеза, разработанные в [4,5,6], использует метрическую форму представления логических функций. Результатом синтеза является матрица инциденций, состоящая из единиц и нулей, построенная либо по графу состояний (матрица  $R$ ), либо по каноническим уравнениям (матрица  $S$ ) [6]. Матрица инциденций полностью определяет конкретную схему, реализующую данный автомат в среде, благодаря чему можно непосредственно по матрице инциденций записать уравнения Кирхгофа для криотронной схемы автомата, не вникая в саму схему.

Подобная операция, носящая формальный характер, состоит в преобразовании матриц и позволяет избежать трудоемких для больших автоматов процесс составления и преобразования уравнений движения по контурам схемы и, что самое существенное, автома-

тимировать этот процесс.

Таким образом, исследование криотронной схемы, реализующей автомат, удобно начать с логического описания автомата, т.е. с графа его состояний или канонических уравнений, и затем совершить формальный переход к уравнениям движения. Численное решение этих уравнений и последующий анализ характера фазовых траекторий дает возможность определить области устойчивости стационарных состояний автомата.

#### Характер дифференциальных уравнений криотронных автоматов

В статье имеется в виду автоматы без выходов; процессы переключения токов в цепях, соответствующих входным переменным не изучаются.

Асинхронный автомат, заданный графом состояний, реализуется в криотронной вычислительной среде каскадным способом; автомат, заданный каноническими уравнениями, — непосредственным способом [4,5]. Эти схемы описываются следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}X &= \Phi(X, Y)X, \\ \dot{\Sigma}Y &= \Phi(X, Y)Y. \end{aligned} \quad (I)$$

Система (I) записана в векторной форме для безразмерных переменных, соответствующих токам в схеме, нормированным к току питания (в дальнейшем эти переменные будут называться токами); при этом использованы следующие обозначения:

$X = \|x_i\| (i=1, \dots, p)$  — вектор токов в цепях обратной связи, компоненты его соотвествуют внутренним переменным автомата;  
 $Y = \|y_j\| (j=1, \dots, s)$  — вектор токов в цепях, реализующих конъюнкции.

$\Sigma = \|\delta_{ij}\| (i=1, \dots, s; j=1, \dots, s)$  — диагональная матрица, ненулевые элементы которой являются индуктивностями в цепях с токами  $Y$ , нормированными к величине индуктивности сетки криотрона  $\ell_c$ ;

$\dot{\Sigma} = \|\ell_{ij}\| (i=1, \dots, p; j=1, \dots, p)$  — диагональная матрица, ненулевые элементы которой являются нормированными к  $\ell_c$  индуктивностями в цепях с токами  $X$ .

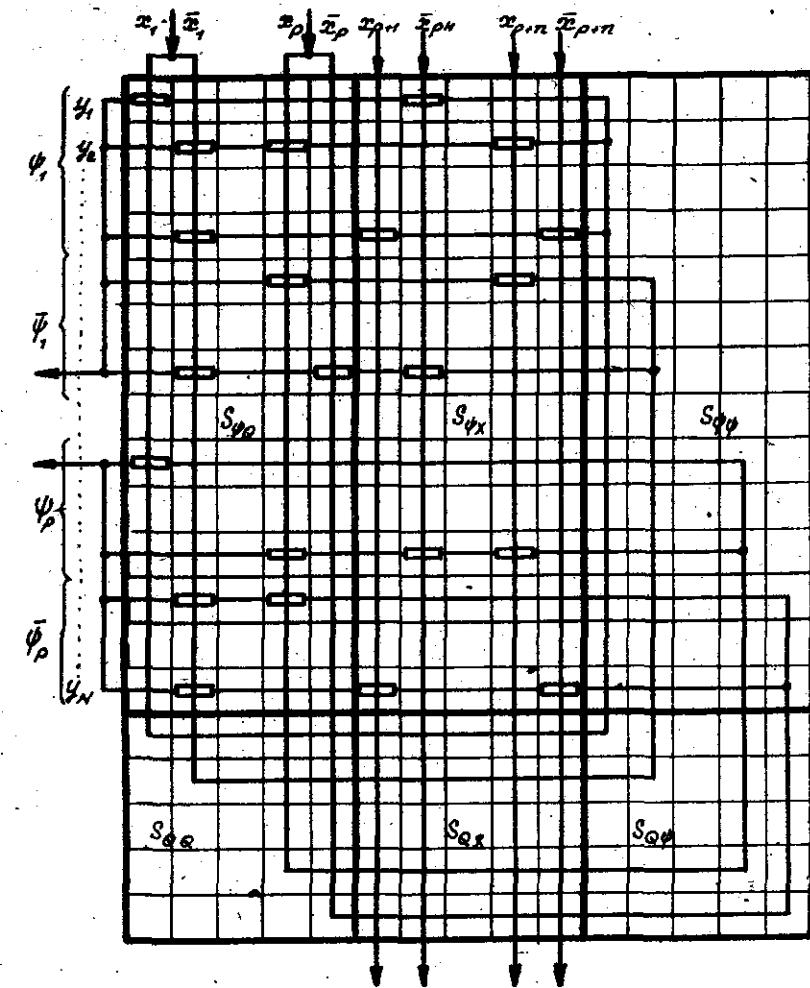


Рис. I

Порядок системы (I) легко определить либо по матрице инцидентий автомата, либо непосредственно по графу состояний или каноническим уравнениям.

С помощью рис. 1 нетрудно подсчитать количество узлов и ветвей в схеме, построенной по каноническим уравнениям, и по общей формуле "число ветвей - число узлов + I" определить порядок системы дифференциальных уравнений для такой схемы:

$$m = N - p, \quad (2)$$

где  $N$  - суммарное число строк в подматрицах  $S_{yQ}$  и  $S_{yX}$  или число конъюнкций в д.н.ф. всех функций и их отрицаний;

$p$  - половина числа строк подматрицы  $S_{yX}$  или число внутренних переменных.

Аналогичным подсчетом количества ветвей и узлов на рис. 2 определяется порядок системы (I) для схемы, построенной по графу состояний автомата:

$$m = M + p - 1, \quad (3)$$

где  $M$  - число строк в подматрице  $R_{cx}$  [6], или количество входных состояний, обозначенных на петлях графа;

$p$  - половина столбцов подматрицы  $R_{cq}$ , или число промежуточных переменных.

В криотронных схемах автомата имеются контуры, содержащие индуктивности сеток криотронов и контуры без них. В каскадных схемах -  $(M-h)$  контуров, не содержащих  $l_c$ , где  $h$  - число столбцов в подматрице  $R_{cd}$ , или количество вершин в графе состояний. В схемах, полученных непосредственным способом, в контурах, реализующих д.н.ф., не содержится сеток криотронов, таких контуров  $N - 2p$ .

Если предположить, что индуктивности контуров, не содержащих  $l_c$ , много меньше, чем  $l_c$ , т.е.

$$\sigma_{ii} \ll 1, \quad (4)$$

то криотронная схема автомата может рассматриваться как релаксационная система, в которой все процессы разделяются на "быстрые" и "медленные". "Медленными" являются процессы переключения токов в цепях, содержащих сетки криотронов, "быстрыми" - в цепях без них.

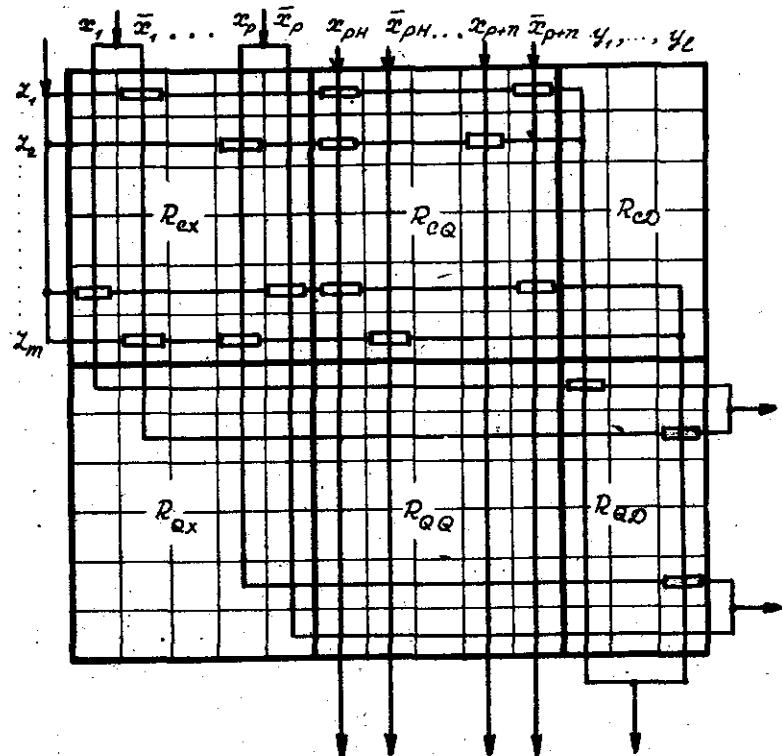


Рис. 2

Поскольку интерес представляют в основном "медленные" движения, то процессы переключения токов в схеме автомата можно изучать с помощью вырожденной системы уравнений, описывающей "медленные процессы", т.е. более низкого порядка по сравнению с (I) [8]. Вырожденная система получается из (I) при  $\sigma_{ii} = 0$ . При этом для каскадных схем порядок (I) снижается до  $(p+h-1)$ , а для схем, реализованных непосредственным способом, до  $p$ .

Вырожденные системы имеют вид для схем с непосредственной обратной связью:

$$\begin{aligned} L\dot{X} &= \Phi_1(X, Y) \cdot X, \\ \Phi_2(X, Y) \cdot Y &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

для каскадных схем:

$$\begin{aligned} L\dot{X} &= \Phi_1(X, Y, Z) \cdot X, \\ \hat{\Sigma} \cdot Y &= \Phi_2(X, Y, Z) \cdot Y, \\ \Phi_3(X, Y, Z) \cdot Z &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\hat{\Sigma}$  - часть матрицы  $\Sigma$ , для которой не выполняется условие (4), размерность  $\hat{\Sigma}$  равна  $(h-1) \times (h-1)$ ;  
 $Z$  - вектор токов в контурах, не содержащих  $I_c$ , размерностью  $(M-h)$ .

#### Переход от канонических уравнений к дифференциальным

От матрицы инцидентий  $S$ , построенной по каноническим уравнениям автомата, осуществляется переход сразу к вырожденной системе уравнений вида (5), т.е. к системе,ключающей в себе  $p$  дифференциальных и  $(N-2p)$  трансцендентных уравнений. При этом исходными являются следующие матрицы:

- 1)  $S_\psi$  - матрица, объединяющая  $S_{\psi Q}$  и  $S_{\psi X}$ . Размерность  $S_\psi$  равна  $N \cdot 2(p+n)$ , где  $n$  - число входных переменных. Кроме того, будут использоваться матрицы  $S_{\psi_i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ), все элементы которых, кроме принадлежащих  $i$ -ой строке, равны 0. Элементы  $i$ -х строк матрицы  $S_\psi$  и  $S_{\psi_i}$  совпадают.
- 2)  $S_{\psi Q}$  - матрица размерностью  $N \cdot 2p$ .
- 3)  $S_{\psi \psi}$  - матрица размерностью  $N \cdot 2p$ .
- 4)  $X$  - вектор токов, соответствующих  $2p$  внутренним и  $2n$  входным переменным и их отрицаниям, размерностью  $2(p+n)$ , компоненты этого вектора сопоставлены столбцам матрицы  $S_\psi$  (рис.1).
- 5)  $X$  - вектор токов, соответствующих только промежуточным переменным и их отрицаниям, размерность его  $2p$ .
- 6)  $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ .
- 7)  $Y$  - вектор токов в цепях, реализующих конъюнкции, размерностью  $N$ . Компоненты его поставлены в соответствие строкам матрицы  $S_\psi$ .

8)  $F$  - матрица сопротивлений криотронов в схеме размерностью  $N \cdot 2(p+n)$ . Элемент матрицы  $F$  равен:

$$f_{ij} = \| (S_\psi)_{ij} \| \cdot \arctg \frac{r}{\pi} (x_i + \alpha y_i - \beta) + 0.5, \quad (i=1, \dots, 2(p+n); j=1, \dots, N),$$

где  $x_i$  - сеточный ток криотрона,  $y_i$  - вентильный ток,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  - параметры криотрона [4]. Кроме того, будут использоваться матрицы  $F_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), все элементы которых, кроме принадлежащих  $i$ -ой строке, равны нулю. Элементы  $i$ -х строк матриц  $F$  и  $F_i$  совпадают.

9)  $\Gamma$ ,  $\Gamma_X$ ,  $\Gamma_Y$  - вспомогательные матрицы, состоящие из единиц и нулей.

Каждая внутренняя переменная и её отрицание реализуются в параллельно-последовательном контуре, изображенном на рис.3. В

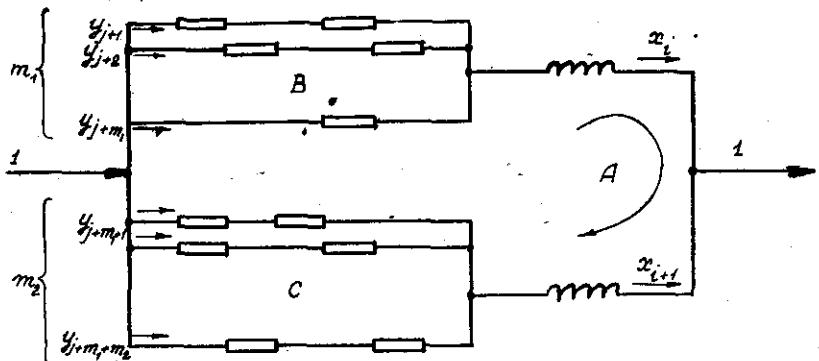


Рис. 3

ветвях этого контура, составляющих параллельные цепи  $B$  и  $C$  в соответствии с принятым условием (4) индуктивности не учитываются. Каждая из этих цепей заменяется эквивалентной ветвью с активным сопротивлением, определяемым по формуле:

$$P^m = (S_{\psi \psi}^m)^T \left( \sum_{k=j+1}^{j+2m_j} (F_k \cdot S_{\psi k}^T)^{-1} S_{\psi \psi}^m \right)^{-1}, \quad (7)$$

где  $m = 1, \dots, p$ ; матрицы с индексом  $m$  являются частями исходных матриц, соответствующими  $m$ -ой внутренней переменной.

$P'''$  - это диагональная матрица  $2 \times 2$ , ненулевые элементы которой являются суммарными сопротивлениями цепей  $B$  и  $C$ , включавших в себя  $m_1$  и  $m_2$  параллельных ветвей соответственно.

Ветви с токами  $x_i$  и  $x_{i+1}$  содержат только индуктивности, которые для каждой ветви равны сумме элементов столбца матрицы  $S_{\psi Q}$  с соответствующим номером.

В соответствии с законами Кирхгофа, выражением (7) и замечанием об индуктивности ветвей с токами  $x_i$  и  $x_{i+1}$  уравнение переходного процесса в контуре  $A$  можно записать следующим образом:

$$(\Gamma'')^T (P''' X''' + (S_{\psi Q})^T \dot{X}''' = 0, \quad (8)$$

где  $\Gamma'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ . С помощью матрицы  $\Gamma''$  приравниваются напряжения верхней и нижней ветвей контура  $A$ .

К уравнению (8) нужно присоединить выражение зависимости между  $x_i$  и  $x_{i+1}$  - элементами вектора  $X'''$ . Из рис. I видно, что эта зависимость такова

$$\Gamma_X''' X''' = 1, \quad (9)$$

$$\text{где } \Gamma_X''' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Трансцендентные уравнения для цепей  $B$  и  $C$  записать несложно:

$$(F''' Y''' )^T \Gamma_Y''' = 0, \quad (10)$$

$$(S_{\psi \psi}''' )^T Y''' = X'''.$$

Элемент столбца  $\Gamma''' Y'''$  это напряжение ветви с соответствующим номеру элемента током  $y_k$ . С помощью матрицы  $\Gamma_Y'''$  приравниваются напряжения в соседних параллельных ветвях, эта матрица имеет размерность  $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2 - 2)$ , и структура её такова:

$$\Gamma_Y''' = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline \dots & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline \end{array} \right) \quad \begin{matrix} m_1 \\ \\ \\ \\ m_2 \end{matrix}$$

Второе уравнение в системе (10) устанавливает зависимость между токами  $X'''$  и  $Y'''$ .

Схема автомата состоит из  $P$  контуров типа  $A$ , не связанных гальванически между собой. Аналогично тому, как были записаны уравнения для одного контура, нетрудно записать их для всей схемы:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^T (S_{\psi \psi}^T) (\sum_{i=1}^N F_i S_{\psi i}^T)^{-1} S_{\psi \psi}^T)^{-1} X + S_{\psi Q}^T \dot{X} = 0, \\ \Gamma_Y^T (F Y) = 0, \\ \Gamma_X^T X = \mathcal{E}, \\ S_{\psi \psi}^T Y = X. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

В системе (II)  $\mathcal{E}$  - столбец, все элементы которого равны единице, матрица  $\Gamma$  равна прямому произведению единичной матрицы размерности  $P \times P$  и  $\Gamma'''$ , матрица  $\Gamma_Y$  есть прямая сумма матриц  $\Gamma_Y''' (m_1 = 1, \dots, P)$ ,  $\Gamma_X$  равна прямому произведению единичной матрицы  $P \times P$  и  $\Gamma_X'''$ .

### 3. Переход от графа состояний автомата к системе уравнений для его криогенной схемы

От матрицы инциденций  $R$ , построенной по графу состояний, совершается переход к системе уравнений вида (6) для каскадной схемы. Система уравнений содержит  $h+p-1$  дифференциальных уравнений и  $M-h$  трансцендентных.

Для построения системы уравнений используются следующие матрицы:

1)  $R_{cx}$ ,  $R_{cq}$ ,  $R_{cd}$ ,  $R_{qd}$ , причем  $R_{cx}$  и  $R_{cq}$  будут рассматриваться как отдельные матрицы,  $R_c$  как одна. Кроме того, будут использоваться матрицы  $R_c^i (i=1, \dots, M)$ , все элементы которых, кроме принадлежащих  $i$ -ой строке, равны нулю. Элементы  $i$ -х строк матриц  $R_c$  и  $R_c^i$  совпадают.

2)  $\dot{X}$  - вектор токов, соответствующих  $2p$  промежуточных переменных и их отрицаний и  $2n$  входных переменных и их отрицаний. Компоненты вектора  $X$  поставлены в соответствие столбцам матрицы  $R_c$  (рис. 2).

3)  $X$  - вектор токов, соответствующих промежуточным переменным и их отрицаниям. Компоненты его соответствуют столбцам матрицы  $R_{CD}$  и строкам матрицы  $R_{QD}$ .

$$4) \dot{X} = \frac{dX}{dt}.$$

5)  $Y$  - вектор токов в ветвях, относящихся к первому каскаду схемы и содержащих сетки криотронов, компоненты вектора соответствуют столбцам матрицы  $R_{CD}$  (рис. 2).

$$6) \dot{Y} = \frac{dY}{dt}.$$

7)  $Z$  - вектор токов в ветвях первого каскада схемы, не содержащих сеток криотронов, компоненты его соответствуют строкам матрицы  $R_C$  (рис. 2).

8)  $F^I$ ,  $F^E$  - матрицы сопротивлений криотронов в I и во II каскадах схемы. Их элементы равны:

$$f_{ij}^I = (z_c)_{ij} \cdot (\arctg \frac{\beta}{\pi} (x_j + \alpha z_i - \beta) + 0.5),$$

$$f_{jk}^E = (z_{CD})_{jk} \cdot (\arctg \frac{\beta}{\pi} (y_k + \alpha x_j - \beta) + 0.5).$$

Кроме того, будут использоваться матрицы  $E_i^I$  ( $i = 1, \dots, M$ ), определенные так же, как  $R_C^I$ , и  $E_{CD}^E$  соответствующая  $R_{CD}$ .

9)  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_X$ ,  $I_Z$  - вспомогательные матрицы, состоящие из единиц и нулей.

Первый каскад схемы, реализующий автомат по графу состояний, представляет собой параллельно-последовательную схему, изображенную на рис. 4. Каждая ветвь с током  $y_k$  может быть соединена

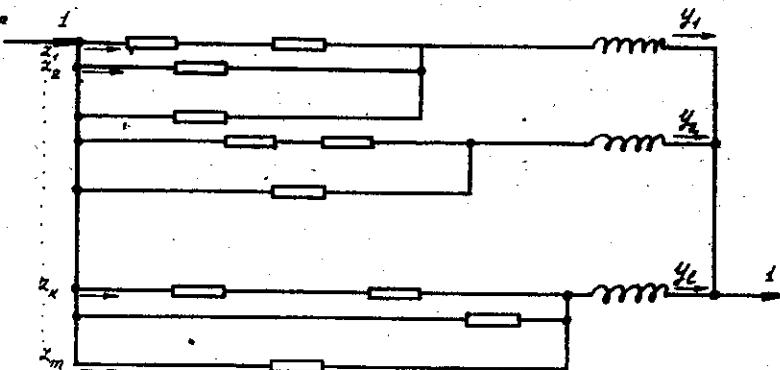


Рис. 4.

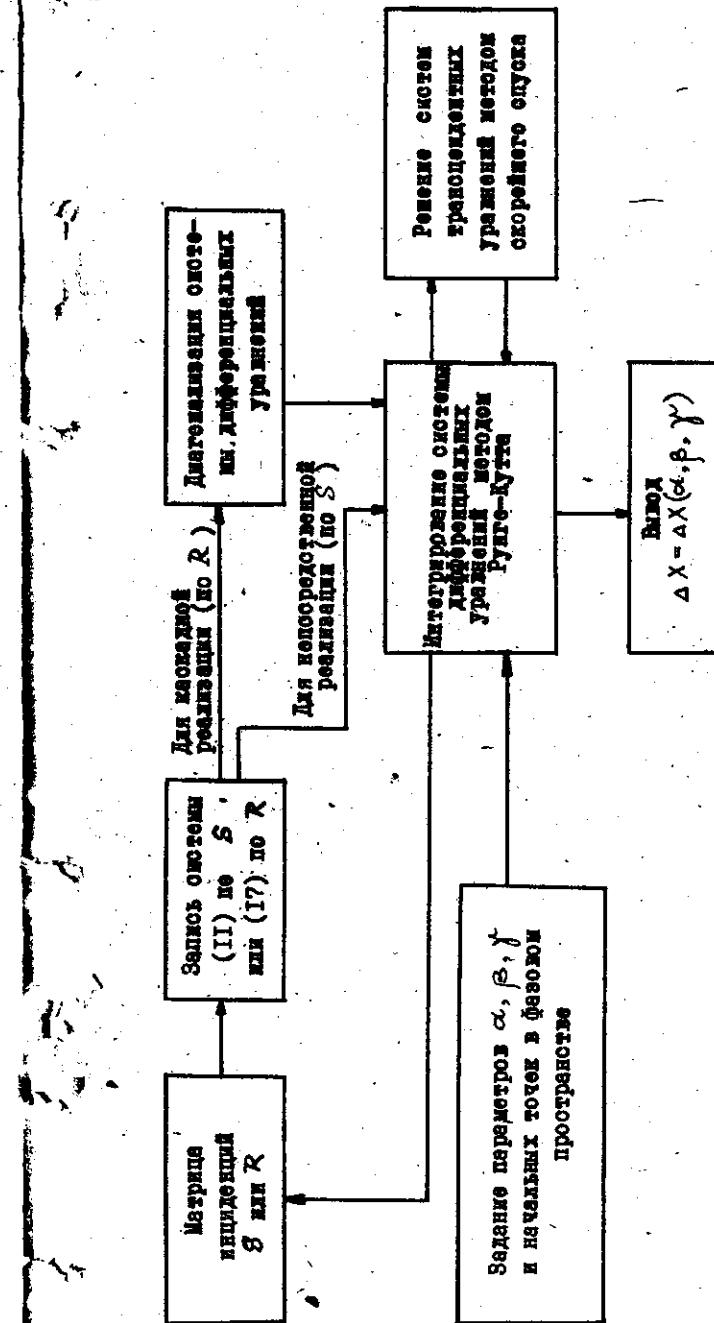


Рис. 6

нена с группой параллельных ветвей, индуктивность которых по принятому условию (4) равна нулю. Параллельные ветви с токами  $x_i$  эквивалентны  $\ell$  ветвям, обладающим активным сопротивлением.

Диагональная матрица этих сопротивлений получается следующим образом:

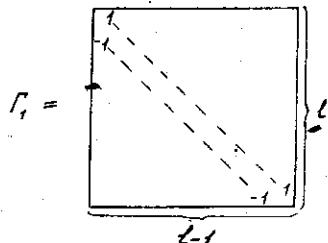
$$P = (R_{CD}^T \left( \sum_{i=1}^M F_i^T (R_{CX}^i)^T \right)^{-1} R_{CD})^{-1}, \quad (I2)$$

где  $M$  — количество ветвей с токами  $x$ .

Дифференциальные уравнения для контуров с токами  $Y$  и  $Z$  записываются таким образом:

$$\begin{aligned} F_1^T (PY + R_{QD}^T \dot{Y}) &= 0, \\ F_2^T (F^T Z) &= 0. \end{aligned} \quad (I3)$$

Где



Второй каскад схемы автомата состоит из  $P$  контуров виде рис. 5.

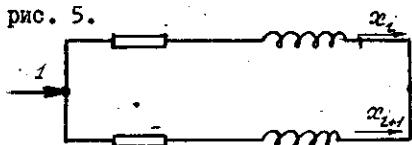


Рис. 5.

Дифференциальные уравнения для этих контуров совместно с (I2), (I3) и зависимостью между токами  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  составят полную систему

уравнений для каскадной схемы:

$$F_1^T \left( (R_{CD}^T \left( \sum_{i=1}^M F_i^T (R_{CX}^i)^T \right)^{-1} R_{CD})^{-1} Y + R_{QD}^T \dot{Y} \right) = 0;$$

$$F_2^T (F^T X + R_{QD}^T \dot{X}) = 0;$$

$$F_3^T (F^T Z) = 0; \quad E^T Y = 1;$$

$$R_{CD}^T Z = Y; \quad F_4^T X = E.$$

где матрицы  $F_x$ ,  $F_x$  и  $E$  совпадают по структуре с аналогичными матрицами из пункта 2.

### Заключение

Формальный метод записи уравнений движения для криотронных схем автоматов используется в алгоритме анализа динамики таких схем на ЦМ. Блок-схема этого алгоритма дана на рис. 6. Исходной информацией об автомате является матрица инциденций, в результате для заданных значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f$  [3] получается величина области устойчивости  $\Delta X$ .

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. З.В. ЕФРЕМОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Вычислительные системы высокой производительности, Новосибирск, 1966.
2. Б.И. ФОМЕЛЬ. Динамика триггера в криотронной вычислительной среде. — Вычислительные системы, Новосибирск, Наука, 1967, вып. 26, стр. 107.
3. Б.И. ФОМЕЛЬ. Вопросы динамики асинхронных автоматов. — Вычислительные системы, Новосибирск, 1969, вып. 33, стр. 57.
4. С.И. АЧАСОВА. Исследование устойчивости криотронного автомата на ЦМ. — Вычислительные системы, Новосибирск, 1969, вып. 33, стр. 74.
5. О.Л. БАНДМАН. Реализация автоматов в криотронной вычислительной среде. — Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, Новосибирск, 1968, вып. 33, стр. 126.
6. О.Д. БАНДМАН. Реализация автоматов в криотронной вычислительной среде по заданному графу состояний. — Вычислительные системы, Новосибирск, 1969, вып. 33, стр. 44.
7. О.Л. БАНДМАН. Методы реализации автоматов в криотронной вычислительной среде. — Труды I межвузовской конференции по цифровым интегрирующим структурам и вычислительным средам, Таганрог, 1969 г.
8. А.А. АНДРОНОВ, А.А. БИТТ и С.Э. ХАИКИН. Теория колебаний, М., 1959.

Поступила в редакцию  
10.Л.1970 г.