УДК 681.142.6: 512.95

О ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ПРОИЗВОЛЬНОГО ГРАФА

А.Н. Мелихов, В.М. Курейчик,
В.В. Селянкин, В.А. Тищенко

Введение

Топологическое размещение электронных схем I является одной из важных задач в конструировании вычислительных устройств и автоматизации проектирования (например, печатного монтажа, когда число пересечений проводников было сведено до минимума). Решение данной задачи не зависит от таких характеристик, как размеры и конфигурация элементов, поэтому любую схему можно представить в виде графа, вершины которого соответствуют элементам схемы, а ребра – связям между элементами.

Известно, что существует несколько методов подсчета числа пересечений ребер полных графов [2, 3]. Заметим, что при переходе от электронных схем к графам обычно получаются произвольные (неполные) графы, подсчет числа пересечений которых затруднителен.

В настоящей работе рассматриваются вопросы определения числа пересечений ребер произвольных графов. Приводится формула, позволяющая определить число пересечений ребер геометрической реализации графа на плоскости с заданным фиксированным положением его вершин. Кроме того, предлагается метод подсчета числа пересечений ребер геометрических реализаций произвольных графов по матрице смежности. Вводится понятие матрицы пересечений ребер, и намечается путь получения минимального числа пересечений ребер произвольных графов.

§ I. Число пересечений ребер графа

Пусть дан произвольный неориентированный граф $G=(X,U)$ с гамильтоновым циклом без петель и кратных ребер, где X – множество вершин, U – множество ребер[ж]. Очевидно, можно построить такую геометрическую реализацию графа, что два любых ребра $u_{ij}\in U$ и $u_{kl}\in U$ могут пересекаться друг с другом не более одного раза; ребра графа, инцидентные одной вершине, не пересекаются между собой; ни одно ребро графа не пересекает ребер гамильтонова цикла.

Для простоты изложения предварительно рассмотрим графы с гамильтоновым циклом, а затем результаты распространим на случай произвольных графов.

Перейдем теперь к подсчету числа пересечений ребер графа G. Для этого будем располагать его ребра, не принадлежащие гамильтонову циклу, внутри области, ограниченной этим циклом. Обозначим множество ребер, инцидентных вершине x_i через U_i, а число пересечений, образованное ребрами этого множества, – через P_i.

Очевидно, что при проведении ребер, инцидентных вершине $x_1\in X$, пересечений не образуется[жж]. В этом случае $P_1=0$. Проведем теперь ребра, инцидентные вершине $x_2\in X$, и определим число пересечений этих ребер с ребрами множества U_1. Ребро u_{2n} пересекается со всеми ребрами, инцидентными вершине x_1 (рис. I).

В дальнейшем ребру u_{st} сопоставляется некоторая функция $\varphi(u_{st})$, которая принимает значения

$$\varphi(u_{st})=\begin{cases}1, & \text{если имеется ребро между вершинами } x_s \text{ и } x_t,\\ 0 & \text{– в противном случае,}\end{cases} \qquad (I.I)$$

[ж]) Отметим, что вершины графа не считаются точками пересечений ребер.

[жж]) Речь идет о ребрах, не входящих в гамильтонов цикл.

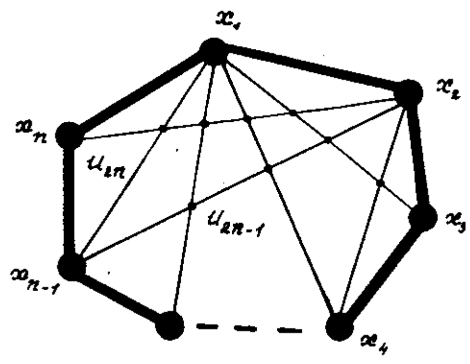

Рис. I

где $s,t\in I=\{1,2,\dots,n\}$, причем n – число вершин графа G.

Нетрудно видеть, что число пересечений, образованное ребром u_{2n}, определяется по формуле

$$P_{2n}=\varphi(u_{2n})\sum_{i=3}^{n-1}\varphi(u_{1i}).$$

Ребро $u_{2(n-1)}$ образует

$$P_{2(n-1)}=\varphi(u_{2(n-1)})\sum_{i=3}^{n-2}\varphi(u_{1i})$$

пересечений.

Аналогично легко определить число пересечений других ребер множества U_2 с ребрами множества U_1, которое будет иметь вид:

$$P_{2j}=\varphi(u_{2j})\sum_{i=3}^{j-1}\varphi(u_{1i}).$$

Общее число пересечений ребер, инцидентных вершине x_2, равно

$$P_2=\sum_{j=4}^{n}P_{2j}$$

Ребра множества U_3 пересекаются с ребрами множеств U_1 и U_2, поэтому можно записать

$$P_{3j}=\varphi(u_{3j})\sum_{i=4}^{j-1}\left[\varphi(u_{1i})+\varphi(u_{2i})\right] \quad \text{и} \quad P_3=\sum_{j=5}^{n}P_{3j}.$$

По индукции определим число пересечений ребер, инцидентных вершине x_k графа G,

$$P_k=\sum_{j=k+2}^{n}P_{kj} \qquad (I.2)$$

Общее число пересечений всех ребер графа G определяется выражением

$$P=\sum_{k=2}^{n-2}P_k. \qquad (I.3)$$

§ 2. Алгоритм определения числа пересечений ребер графа

Непосредственный подсчет числа пересечений ребер графа по формуле (I.3) затруднителен, поэтому для облегчения этого процесса предлагается использовать матрицу смежности графа G, которую представим в следующем виде

$$
R = \left\| \begin{array}{ccccccc}
0 & \times & \varphi(u_{13}) & \varphi(u_{14}) & \cdots & \varphi(u_{1(n-1)}) & \times \\
 & 0 & \times & \varphi(u_{24}) & \cdots & \varphi(u_{2(n-1)}) & \varphi(u_{2n}) \\
 & & 0 & \times & \cdots & \varphi(u_{3(n-1)}) & \varphi(u_{3n}) \\
 & & & 0 & \cdots & \varphi(u_{4(n-1)}) & \varphi(u_{4n}) \\
 & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \times \\
 & & & & & & 0
\end{array} \right\|
$$

Поскольку G – неориентированный граф, то будем использовать только треугольную матрицу. Учитывая, что ребра гамильтонова цикла не образуют пересечений, единицы, соответствующие этим ребрам, заменены крестиками. Для нахождения числа пересечений ребер графа G при задании графа матрицей смежности R поступают следующим образом. Сначала определяют число ρ_{2n} – для чего в матрице смежности R выделяют подматрицу R_{2n}.

$$
R = \left\| \begin{array}{ccccc}
0 & \times & \boxed{\quad R_{2n} \quad} & & \times \\
 & 0 & \times \;\cdot\;\cdot\;\; \cdot & & \varphi(u_{2n}) \\
 & & 0 \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\; \cdot & & \vdots \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & 0 & \times \\
 & & & & 0
\end{array} \right\|
$$

Сумма единичных элементов подматрицы R_{2n} соответствует числу ρ_{2n}. Далее определяется число $\rho_{2(n-1)}$ путем выделения подматрицы $R_{2(n-1)}$ и подсчета суммарного числа единиц в ней и

т.д. Число пересечений ребер, инцидентных вершине x_2, с ребрами, инцидентными вершине x_1, определяется суммой единиц во всех подматрицах R_{2i}. Процесс выделения и подсчета единиц в подматрицах продолжается аналогично до тех пор, пока не будет определено общее число пересечений графа G как сумма единиц всех подматриц от R_{2n} до $R_{(n-2)n}$.

В том случае, когда необходимо подсчитать не только число пересечений ребер графа G, но и знать число пересечений какого-нибудь ребра u_{ij} со всеми остальными ребрами графа, будем выделять в матрице R подматрицы R_{ij} и R'_{ij}

$$
R = \left\| \begin{array}{cccccccc}
0 & \times & \cdot & \boxed{\; R_{ij} \;} & & & & \times \\
 & 0 & \times & \cdot & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & 0 & \times & \boxed{\varphi(u_{ij})} & & \\
 & & & & 0 & \times & \boxed{\; R'_{ij} \;} & \\
 & & & & & \cdot & & \\
 & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \times & \\
 & & & & & & 0 & \times \\
 & & & & & & & 0
\end{array} \right\|
$$

Покажем, что ребро u_{ij} графа G пересекается со всеми ребрами, которым соответствуют единицы в выделенных подматрицах R_{ij} и R'_{ij}. Рассмотрим ребро u_{ij} графа G. Относительно него можно выделить два множества вершин графа X_1 и X_2

$$X_1 = \{x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{i-1}\},$$

$$X_2 = \{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{j-1}\}.$$

Согласно теореме Жордана, с ребром u_{ij} могут пересекаться только те ребра, индексы которых удовлетворяют условию $x_k \in X_1$, $x_\ell \in X_2$ или $x_\ell \in X_1$, $x_k \in X_2$.

Единицы в матрице смежности, соответствующие ребрам, индексы которых удовлетворяют одному из рассмотренных условий, как легко видеть, располагаются в подматрицах R_{ij} и R'_{ij}.

Таким образом, суммарное число единиц подматриц R_{ij} и R'_{ij} определяет количество пересечений ребра u_{ij} со всеми остальными ребрами графа G.

На примере графа, показанного на рис. 2, определим число пересечений ребра u_{36}. Для этого запишем матрицу смежности

$$
R = \left\| \begin{array}{ccccccc}
0 & \times & I & I & 0 & I & \times \\
 & 0 & \times & 0 & I & 0 & I \\
 & & 0 & \times & 0 & I & 0 \\
 & & & 0 & \times & 0 & I \\
 & & & & 0 & \times & 0 \\
 & & & & & 0 & \times \\
 & & & & & & 0
\end{array} \right\| ,
$$

по которой определяем, что число единиц в выделенных подматрицах равно трем. Поэтому ребро u_{36} имеет три пересечения. Если для каждого ребра подсчитать число пересечений и записать это число в соответствующие клетки матрицы смежности, то получим так называемую матрицу пересечений R_p графа G.

Следует заметить, что каждое пересечение образуется наложением двух ребер, поэтому для подсчета общего числа пересечений ребер графа G необходимо просуммировать все элементы матрицы R_p и сумму разделить на два.

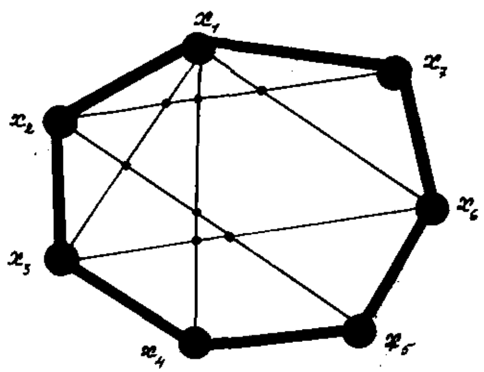

Рис. 2

Для графа, изображенного на рис. 2, матрица пересечений R_p имеет вид:

$$
R_p = \left\| \begin{array}{ccccccc}
0 & \times & 2 & 3 & 0 & 2 & \times \\
 & 0 & \times & 0 & 4 & 0 & 3 \\
 & & 0 & \times & 0 & 3 & 0 \\
 & & & 0 & \times & 0 & 3 \\
 & & & & 0 & \times & 0 \\
 & & & & & 0 & \times \\
 & & & & & & 0
\end{array} \right\|
$$

Подсчитывая полусумму элементов матрицы R_p, находим, что число пересечений графа G равно $P = 10$.

Данный метод подсчета числа пересечений можно распространить и на произвольные графы. Это следует из того, что ребра гамильтонова цикла не образуют пересечений и матрица пересечений R_p при отсутствии части или всех ребер выделенного гамильтонова цикла не меняет свой вид. Для этого вершины располагаются так же, как и в случае графа, имеющего гамильтонов цикл.

На основании предложенного метода построим алгоритм определения числа пересечений ребер произвольного графа G:

1^0. По графу G записываем матрицу смежности R. Переходим к 2^0.

2^0. Для ребра u_{ij} выделяем подматрицы R_{ij} и R'_{ij}. Переходим к 3^0.

3^0. Подсчитываем число единиц в подматрицах R_{ij} и R'_{ij}. Переходим к 4^0.

4^0. Единицу, соответствующую ребру u_{ij}, в матрице смежности R заменяем нулем. Переходим к 5^0.

5^0. В матрице смежности R выбираем единицу, соответствующую ребру u_{kl}. Переходим к 6^0. Если в матрице единиц больше нет, то переходим к 7^0.

6^0. Ребро u_{kl} считаем ребром u_{ij}. Переходим к 2^0.

7^0. Определяем величину $\frac{1}{2}\sum p_{ij}$. Конец работы алгоритма.

Выше рассматривались графы, у которых все вершины соединялись так, что ребра графа находились внутри области, ограниченной существующим или предполагаемым гамильтоновым циклом. Можно располагать ребра графа не только во внутренней области, но и во внешней.

Для определения числа пересечений ребер во внутренней и внешней областях графа G целесообразно составить соответствующие матрицы смежности R_1 и R_2 такие, что

$$R = R_1 \oplus R_2 \ , \qquad (2.I)$$

т.е. для всех элементов матрицы смежности R выполняется условие

$$\varphi(u_{ij}) = \varphi(u_{1ij}) \oplus \varphi(u_{2ij}), \qquad (2.2)$$

где $\oplus$ – сумма по модулю два.

По матрицам смежности R_1 и R_2 можно составить соответствующие матрицы пересечений R_{p_1} и R_{p_2}. Общее число пересечений ребер графа G определяется полусуммой числа пересечений ребер, найденной по матрицам R_{p_1} и R_{p_2}.

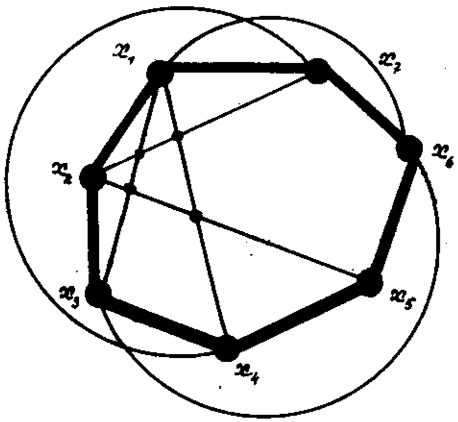

Рис. 3

Определим число пересечений ребер графа G, показанного на рис. 2, при расположении ребер, рассмотренного ранее графа на рис. 3 во внутренней и внешней областях. Матрица смежности R графа G может быть представлена в виде двух матриц R_1 и R_2 :

$$R_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \times & I & I & 0 & 0 & \times \\ & 0 & \times & 0 & I & 0 & I \\ & & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \times & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \times & 0 \\ & & & & & 0 & \times \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix}$$

$$R_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 & I & \times \\ & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \times & 0 & I & 0 \\ & & & 0 & \times & 0 & I \\ & & & & 0 & \times & 0 \\ & & & & & 0 & \times \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix} .$$

По матрицам смежности R_1 и R_2, как было показано выше, построим матрицы пересечений R_{p_1} и R_{p_2}.

$$R_{p_1} = \begin{Vmatrix} 0 & \times & 2 & 2 & 0 & 0 & \times \\ & 0 & \times & 0 & 2 & 0 & 2 \\ & & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \times & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \times & 0 \\ & & & & & 0 & \times \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix}$$

$$R_{p_2} = \begin{Vmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 & I & \times \\ & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \times & 0 & I & 0 \\ & & & 0 & \times & 0 & 2 \\ & & & & 0 & \times & 0 \\ & & & & & 0 & \times \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix} .$$

Общее число пересечений ребер графа G, как нетрудно подсчитать, $P = 6$. Заметим, что плоские графы не имеют пересечений, поэтому для них в матрицах R_{p_1} и R_{p_2} все элементы принимают значение, равное нулю.

§ 3. О минимальном числе пересечений ребер графа

Известно, что каждое ребро графа G, при расположении его во внутренней или во внешней областях, вообще говоря, образует различное число пересечений с другими ребрами. Разделив множество всех ребер графа на два непересекающихся подмножества, расположим последние по обеим сторонам гамильтонова цикла.

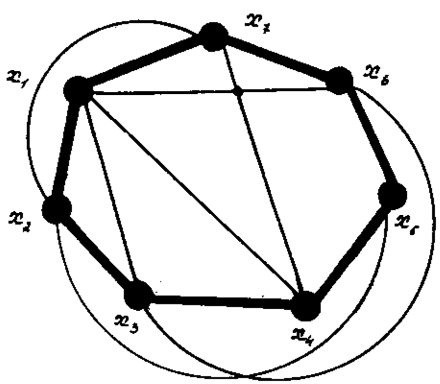

Рис. 4

Уменьшение числа пересечений можно производить путем выбора из матрицы пересечений R_{ρ_1} или R_{ρ_2} ребра, дающего наибольшее уменьшение числа пересечений ребер при помещении его в противоположную область.

Минимум пересечений ребер, полученный при таких построениях, не является абсолютным, но в частном случае может совпадать с ним. Например, разбивая множество ребер графа G (рис. 2) на два подмножества и, помещая их в разные области, как показано на рис. 4, получим число пересечений, равное двум, минимальное для данного графа.

Абсолютный минимум не достигается из-за того, что перестановка некоторых вершин графа позволяет уменьшить число пересечений.

У графа, показанного на рис. 5, имеется четыре пересечения, которые невозможно устранить путем любого переноса ребер из одной области в другую. В то же время перестановка вершин x_5 и x_6 позволяет получить одно пересечение, как показано на рис.6.

Следовательно, можно предложить следующий путь получения минимального числа пересечений ребер графа. Сначала все ребра располагаются во внутренней области. Путем всевозможных перестановок вершин находится наименьшее число пересечений. Далее

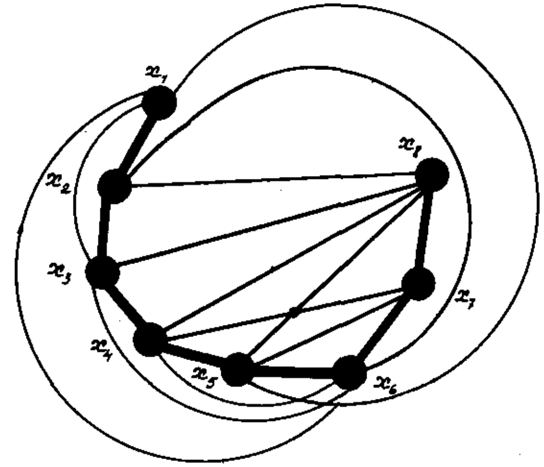

Рис. 5

производится разнесение ребер графа по обеим сторонам образованного или предполагаемого гамильтонова цикла, в результате чего получается изображение графа с минимальным числом пересечений его ребер.

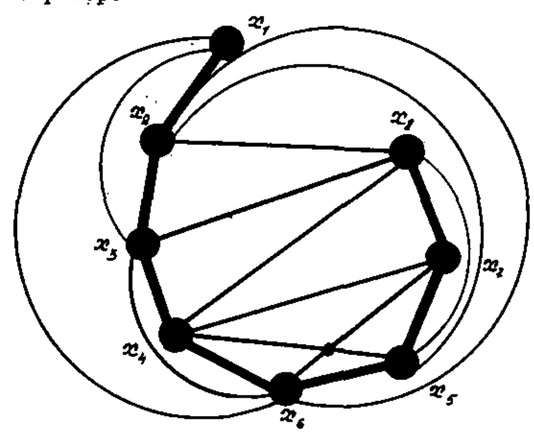

Рис. 6

В заключение отметим, что данный метод можно использовать при подсчете числа пересечений ребер графов, имеющих петли и кратные ребра. При этом функция (I.I) будет иметь вид:

$$\varphi(u_{st}) = \begin{cases} \rho \text{, если имеется } \rho \text{ ребер между вершинами } x_s \text{ и } x_t, \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

где ρ - кратность ребер. В матрице смежности вместо единиц будут стоять значения ρ. Введение петель в граф не меняет число пересечений, так как любую петлю можно провести без пересечений.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Я. МАТЮХИН. Автоматизация проектирования цифровых устройств. - Применение ЦМ для проектирования ЦУ. М., "Советское радио", 1968.

2. F.HARARY and A.HILL. On the number of crossing in a complete graph. Proc.Edinburgh Math. Soc.13 (Aug.1963).

3. А.Н. МЕЛИХОВ, В.М. КУРЕЙЧИК, В.В. СЕЛЯНКИН. О числе пересечений при расположения графа на плоскости. - Известия АН СССР.Техническая кибернетика (в печати).

Поступила в редакцию
5.X.1969 г.