1971 год ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 41

УДК 681.142.[illegible].72

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

А.Н.Мелихов, В.М.Курейчик, В.В.Лисяк

Введение

При автоматизации проектирования и конструирования схем автоматики и вычислительной техники важное место занимает проблема автоматизации проектирования топологии этих схем, при решении которой приходится сталкиваться с большим кругом комбинаторно-логических задач, связанных с перебором.

Весьма интересной задачей из этого комплекса является минимизация суммарной длины соединений между элементами схемы.

Исходной схеме сопоставляется граф. При этом элементам схемы соответствуют вершины графа, а связям между элементами – ребра графа. Следовательно, минимизация суммарной длины соединений в электронных схемах сводится к минимизации суммарной весовой функции ребер графа.

Существует большое число алгоритмов минимизации суммарной весовой функции ребер графа [1-6], при реализации которых в общем случае достигаются локальные минимумы, в частных случаях совпадающие с абсолютным. Недостатком почти всех алгоритмов является зависимость получаемой величины суммарной длины ребер графа от выбора начального размещения и отсутствие возможности сравнивать алгоритмы по полученным результатам минимумов.

Обычно при реализации вышеуказанных алгоритмов используется представление графа матрицами смежности и расстояний. Последняя необходима для подсчета суммарной длины ребер графа до начала выполнения алгоритма на каждом шаге и в конце работы. Однако хранение матрицы расстояний в машине требует значительно большего числа ячеек памяти ЦВМ, чем хранение матрицы смежности. Поэтому желательно строить такие алгоритмы, которые позволяют проводить минимизацию суммарной весовой функции ребер графа без использования матрицы расстояний.

В данной работе предлагается формула для оценки минимальной суммарной длины ребер графа и дается методика подсчета суммарной длины ребер графа по его матрице смежности.

§ I. Оценка суммарной длины ребер графа

Пусть дан произвольный неориентированный граф $G=(X,U)$ без петель и кратных ребер, где X - множество вершин графа, а U - множество ребер, причем $|U|=k$. Пусть также имеется прямоугольная решетка, шаг которой равен единице.

Граф G отображается в решетку так, что в ее узлы попадают вершины графа. Тогда ребра будут иметь вес I,2,..., C в зависимости от расстояния между вершинами, которым инцидентны указанные ребра. Здесь C - вес наиболее длинного ребра образа графа в решетке. Пусть решетка имеет размеры $m \times n$. Введем понятие стандартного графа $G_\Delta=(X_\Delta, U_\Delta)$ для графа G, отображенного в решетку, у которого $X_\Delta = X$, $|U_\Delta|=k$. Заметим, что, вообще говоря, граф G_Δ не изоморфен графу G.

Граф G_Δ образуется путем вложения графа G в решетку следующим образом. Сначала вершины графа G последовательно отображаются в узлы решетки. Затем заполняются всевозможные связи в решетке, вес которых равен единице, двум и т.д. до тех пор, пока общее число ребер графа G_Δ не станет равным k. Другими словами, граф G "натягивается" на решетку и преобразуется в граф G_Δ.

Общее число ребер графа всегда можно найти, используя локальные степени его вершин. Определим число единичных, с весом, равным двум, и т.д. ребер в полном стандартном графе, считая, что

он располагается в решетке с m вершинами в строке и n -вершинами в столбце.

Нетрудно видеть, что общее число ребер графа G_Δ, вес которых равен единице, определяется выражением

$$f_1 \le n(m-1)+m(n-1) \qquad (I)$$

Число ребер, вес которых равен двум,

$$f_2 \le 2(m-1)(n-1)+(m-2)n+(n-2)m. \qquad (2)$$

Можно показать, что

$$f_\ell \le \sum_{i=1}^{i=\ell-1} 2(n-i)(m-\ell+i)+(m-\ell)n+(n-\ell)m. \qquad (3)$$

Зная, что суммарная длина ребер произвольного графа G, расположенного в решетке, равна

$$L(G)=f_1+2f_2+\ldots+\ell \cdot f_\ell, \qquad (4)$$

можно использовать выражение (3) для нахождения нижней оценки $L(G_\Delta)$ минимальной суммарной весовой функции ребер графа G.

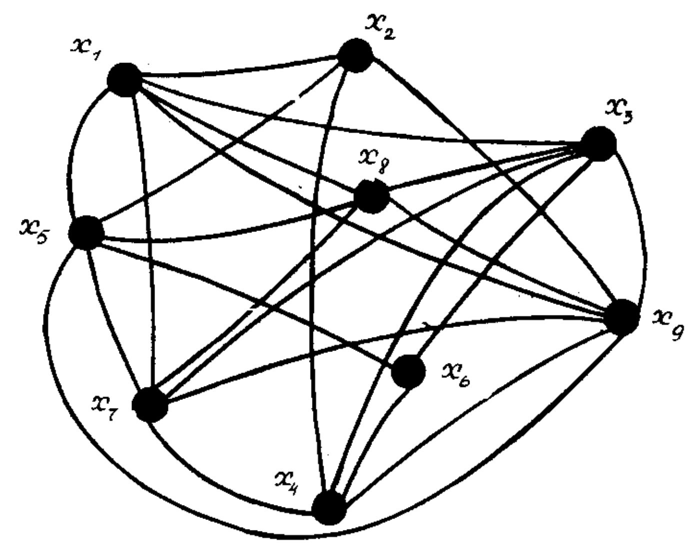

Рис.I.

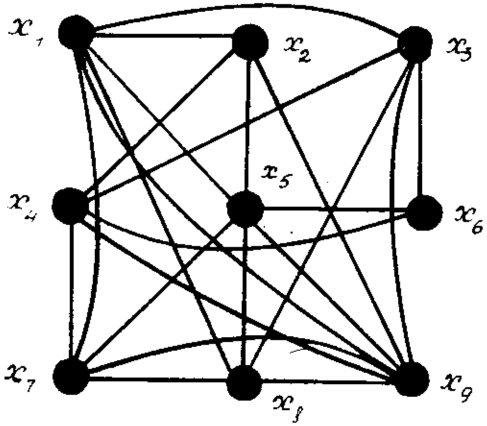

Рис. 2

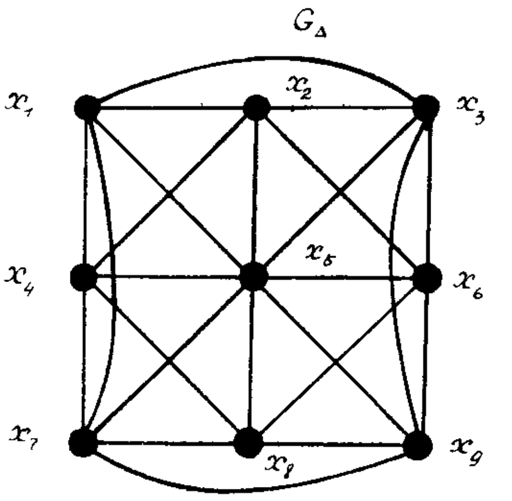

Рис. 3

Очевидно, что справедливо следующее утверждение. Минимальная суммарная длина ребер произвольного графа с p вершинами и k ребрами не может быть меньше суммарной длины ребер стандартного графа G_Δ с тем же числом вершин и ребер.

Основная идея нахождения нижней оценки суммарной длины ребер произвольного графа заключается в следующем.

Сначала подсчитывается число вершин и ребер графа $G=(X,U)$, который отображен в решетку. Далее строится стандартный граф $G_\Delta=(X_\Delta, U_\Delta)$, имеющий такое же число вершин и ребер, как и граф G.

Затем по формуле (4) находится нижняя оценка минимальной суммарной длины графа G. Например, для графа G, показанного на рис.I и отображенного в решетку (рис.2), стандартный граф G_Δ изображен на рис. 3. При этом $L(G_\Delta)=36$.

Назовем отношение суммарной длины $L(G)$ (4) ребер графа G, найденное с помощью произвольного алгоритма, к нижней оцен-

ке $L(G_\Delta)$ для данного графа коэффициентом минимальности

$$K=\frac{L(G)}{L(G_\Delta)}, \qquad (5)$$

используя который можно оценивать результаты применения различных алгоритмов для минимизации суммарной весовой функции ребер определенного класса графов (схем).

§ 2. Подсчет суммарной длины ребер графа по матрице смежности

Рассмотрим теперь подсчет суммарной длины соединений ребер графа непосредственно по матрице смежности без использования матрицы расстояний. Следует учесть, что построение и размещение матрицы расстояний $D=\|d_{ij}\|$,

где $d_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ несмежны},\\ \rho, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ соединены ребром длины } \rho,\end{cases}$

в памяти ЦВМ, как отмечалось выше, требует большего числа ячеек памяти, чем размещение матрицы смежности. Например, при использовании языка ЯЛПАС для составления программы размещения графа на сто вершин потребовалось для размещения матрицы смежности около 160 ячеек в то время как для матрицы расстояний потребуется соответственно около 2000 ячеек.

Пусть граф $G=(X,U)$, где $|X|=p$, задан треугольной матрицей смежности $R=\|r_{ij}\|$, и имеется плоская прямоугольная решетка размерами $r\times q$, в которую производится отображение графа, причем число узлов решетки больше или равно общему числу вершин графа.

Разобьем множество вершин X графа G на r групп по q вершин так, что $r\cdot q=p$. Указанное разбиение соответствует разрезанию матрицы R на r треугольных и $\frac{r(r-1)}{2}$ квадратных подматриц.

Если $r\cdot q\neq p$, то последнюю r-ю группу дополняем m нуль вершинами так, чтобы $m+s=q$, где s – число вершин в r-й группе.

Рассмотрим граф, изображенный на рис.2, и разобьем множество его вершин на три группы по 3 вершины в каждой. Матрица смежности R графа G имеет вид:

$$
R = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
3 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
4 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
5 & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
6 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
7 & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\
8 & & & & & & & & 0 & 1 \\
9 & & & & & & & & & 0 \\
\end{array}
$$

Совокупность подматриц, принадлежащих одной группе разбиения по горизонтали матрицы R, назовем массивом N_i, где $1 \leq i \leq \varepsilon$. Пронумеруем подматрицы в каждом массиве числами натурального ряда. Для каждой подматрицы матрицы R введем понятие t – й вспомогательной диагонали, которая образуется сдвигом соответствующей главной диагонали на t клеток, где

$$t \in T = \{0, 1, 2, \ldots, g-1\}.$$

Элементам каждой t – й диагонали поставим в соответствие некоторую весовую функцию φ, определяемую выражением

$$\varphi = i + t - 1, \tag{6}$$

где i – номер подматрицы в данном массиве.

При $t = 0$ φ равно весу элементов главной диагонали соответствующей подматрицы.

Заметим, что весовая функция равна длине образа соответствующего ребра графа G в решетке. Поэтому сумма весов ненулевых элементов треугольной матрицы смежности R равна $L(G)$.

Для рассмотренного ранее графа (рис.2) число единичных ребер равно 8, число ребер с весом два равно 9, с весом три – 5, число ребер с весом четыре равно 2. Таким образом, $L(G) = 49$.

Предложенный метод может быть использован при минимизации суммарной весовой функции ребер графа. Например, для алгоритма минимизации, описанного в [5,6], применение данного метода позволяет для ЦВМ Минск-22 увеличить число вершин в размещаемом графе в 2 раза без существенного увеличения затрат машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л. ЗИМАН. О некоторых задачах, связанных с расположением элементов на плоскости. Труды семинара отдела структурных и логических схем. М., 1968, № 5.
2. O.B. SHAFER. Reducing wiring length.- Electro-Technology, vol.70, N 4, 1962.
3. Г.Э. ШИРО. Метод проектирования печатного монтажа, основанный на эвристических принципах. Изд-во ЛДНТП, 1967.
4. В.М. ПОМАЗОНОВ. К задаче размещения ячеек в панели. Применение ВМ для проектирования ЦУ, М., 1968.
5. А.Е. КАЛЯЕВ, А.Н.МЕЛИХОВ, Л.С.БЕРНШТЕЙН, В.И.КОДАЧИГОВ, В.М. КУРЕЙЧИК. Применение теории графов для решения некоторых задач автоматизации проектирования топологии интегральных схем. Тезисы Всесоюзной межвузовской конференции по алгоритмическим методам проектирования цифровых систем, Ленинград, 1969.
6. А.Н. МЕЛИХОВ, В.И.КОДАЧИГОВ, В.М.КУРЕЙЧИК, В.А.СОЛОМАТИН. О минимизации суммарной весовой функции ребер графа. Математическое моделирование и теория электрических цепей, Изд-во АН УССР, Киев (в печати).

Поступила в редакцию
14. III. 1970 г.