

УДК 681.142.353.
УДК 519.95

О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А.Я.Макаревский

Реализация устройств в однородных средах является одним из перспективных направлений использования возможностей микроэлектроники [1,2,3]. Цель настоящей работы является получение оценки сложности однородной среды, реализующей конечный автомат с заданным числом состояний, входов и выходов. Очевидно, что если не учитывать сложность ячейки, то такая оценка может быть сделана только с точностью до порядка, так как можно объединить в одну K ячеек, тем самым получив среду, имеющую в K раз меньше ячеек и реализующую тот же автомат.

В качестве математической модели однородной среды ниже принимается понятие клеточного автомата.

Рассмотрим конечное клеточное пространство (см.рис. 1). Клетку, находящуюся в i -й строке и j -ом столбце, будем обозначать (i, j) . Клеточное пространство рис. 1 состоит из клеток (1,2), (1,3), (2,2), (2,3) и т.д.

Рассмотрим далее некоторый автомат A (рис.2,а), у которого есть четыре группы двоичных входных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ и выходных каналов $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$, причем числа каналов в группах $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$, $i=1,2,3,4$ совпадают. Как обычно, можно пере-

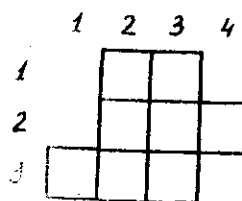


Рис. 1.

ти к другой формулировке и вместо группы из n двоичных каналов рассмотрим один абстрактный с алфавитом из 2^n символов. Тогда если под $x_i, y_i, i=1,2,3,4$, (рис.2,б) понимать такие каналы, то ограничение состоит в том, что их алфавиты x_i и y_i для всех $i, 1 \leq i \leq 4$ одинаковы.

Поместим теперь в каждую клетку клеточного пространства M по одной копии автомата A , причем автоматы, поме-

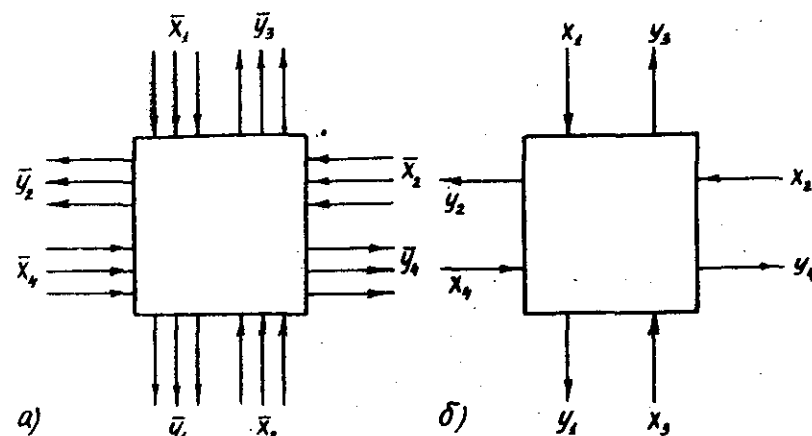


Рис. 2.

щенные в различные клетки, могут, вообще говоря, находиться в различных начальных состояниях. Автомат, помещенный в клетку (i, j) , будем обозначать $A(i, j)$, а каналы x_m и y_n автомата $A(i, j)$ будем обозначать $x_m(i, j)$ и $y_n(i, j)$. Входные и выходные каналы автомата $A(i, j)$ проходят через соответствующие границы клетки: каналы x_2 и y_4 - через правую границу, каналы x_1 и y_3 проходят через верхнюю границу и т.д. Если клетка (i, j) принадлежит клеточному пространству M и, сле-

довательно, в нас помещен автомат $A(i-1, j)$, то каналы x_i и y_j автомата $A(i, j)$ соединяются соответственно с каналами y_i и x_j автомата $A(i-1, j)$. Если на клетке $(i-1, j)$ не принадлежит пространству M , то каналы x_i и y_j автомата $A(i, j)$ считаются внешними. Так, например, каналы x_i автомата $A(2, 3)$ соединяются с каналами y_i автомата $A(1, 3)$, каналы y_j $(2, 3)$ — с каналами x_j $(3, 3)$ и т.д.; внешними являются каналы x_i $(3, 1)$, y_j $(3, 1)$, x_j $(3, 2)$ и т.д. (см. рис. I). Аналогично для клеток $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$.

Конечное клеточное пространство M , в каждую клетку которого помещен автомат A , будем называть (двумерным) клеточным автоматом $\alpha(M, A)$ над A . Такую конструкцию называют также автоматом Хеймана-Черча, сотовой структурой, итерационной сетью и т.д. Сложность клеточного автомата α над A будем называть число экземпляров автомата A , использованных при построении автомата α .

Автомат A будем называть универсальным, если для любого автомата $A(p, q, z)$ с p -буквенным входным алфавитом, q -буквенным выходным алфавитом и z состояниями можно построить клеточный автомат α над A , реализующий A . Пусть A — универсальный автомат. Через $L_A(A)$ обозначим наименьшую сложность клеточного автомата α над A , вычисляющего A , а через $L_A^-(p, q, z) = \max L_A(A)$, где максимум берется по всем автоматам вида $A(p, q, z)$.

Содержание работы состоит в исследовании поведения функции $L_A(p, q, z)$, зависящей от трех параметров p, q, z . Сначала доказывается верхняя оценка (при этом строится универсальный автомат A с 9 состояниями, предлагается метод построения клеточного автомата α над A , реализующего заданный автомат $A(p, q, z)$, и оценивается сложность полученного клеточного автомата как функция от p, q, z , а затем с помощью оценки снизу показывается, что полученная верхняя оценка является окончательной.

1. Оценка сверху

Пусть задан конечный автомат A , имеющий четыре состоя-

ния $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, входной алфавит которого есть $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, выходной — $T = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, начальное состояние — α_1 , функции переходов δ и выходы λ заданы табл. 1 и 2, соответственно. Построим автомат A и клеточный автомат α над A , который будет реализовывать автомат A .

Таблица 1

δ	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	α_4	α_2	α_4
α_2	α_1	α_1	α_2
α_3	α_4	α_3	α_1
α_4	α_3	α_1	α_2

Таблица 2

λ	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	τ_1	τ_3	τ_2
α_2	τ_2	τ_1	τ_3
α_3	τ_1	τ_2	τ_4
α_4	τ_3	τ_2	τ_1

Прежде всего введем новую функцию δ^* (табл. 3). Если $\delta(\alpha_i, \sigma_j) = \alpha_k$, то $\delta^*(\alpha_i, \sigma_j) = (i-k) \uparrow$, если $i > k$, и $\delta^*(\alpha_i, \sigma_j) = (k-i) \downarrow$, если $i \leq k$.

Возьмем клеточное пространство, состоящее из 24 клеток, расположенных в четыре строки и шесть столбцов, и в каждую клетку поместим автомат A (см. рис. 3), который будет описывать постепенно, по мере объяснения идеи работы клеточного автомата α над A . Автомат A имеет

три группы состояний вида: $(+, \tau_i)$ и $(-, \tau_i)$, $\tau_i \in T$; $(+, n\tau_i)$ и $(-, n\tau_i)$, где $\tau_i \in \{1, 1\}$ и n — целое неотрицательное число; $(m\tau_i, m\tau_i)$, $\tau_i \in \{1, 1\}$. Состояния вида $(+, \alpha)$ будем называть активными, а $(-, \alpha)$ — пассивными. Состояния автоматов $A(i, j)$ ($1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 6$) в начальный момент показаны на рис. 3. Таким образом, в автоматах $A(i, j)$, расположенных в правых трех столбцах, записана функция λ , а в левых — таблица функции δ^* . Автоматы, находящиеся в первой строке (начальное состояние α_1),

Таблица 3

δ^*	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	3/	1/	3/
α_2	1/	1/	0/
α_3	1/	0/	2/
α_4	1/	3/	2/

$+ , 3 \uparrow$	$+ , 1 \uparrow$	$+ , 3 \uparrow$	$+ , \tau_1$	$+ , \tau_3$	$+ , \tau_2$
$- , 1 \uparrow$	$- , 1 \uparrow$	$- , 0 \uparrow$	$- , \tau_2$	$- , \tau_1$	$- , \tau_3$
$- , 1 \uparrow$	$- , 0 \uparrow$	$- , 2 \uparrow$	$- , \tau_1$	$- , \tau_2$	$- , \tau_1$
$- , 1 \uparrow$	$- , 3 \uparrow$	$- , 2 \uparrow$	$- , \tau_3$	$- , \tau_2$	$- , \tau_1$

Рис. 3.

Здесь удобно следующее кодирование. Отметим, что для простоты мы рассматриваем сейчас каналы x_i и y_i автомата A как абстрактные (см. рис. 2, б), а не как группы двоичных каналов $\bar{x}_i, \bar{y}_i$.

$+ , * I$	I	$/$	$+ , * 0$	I	$/$	$+ , * I$	I	$/$	$+ , 0$	$+ , I$	$+ , I$	$+ , I$	$+ , I$	$+ , 0$
$- , * 0$	I	$/$	$- , * 0$	I	$/$	$- , * 0$	0	$/$	$- , I$	$- , 0$	$- , 0$	$- , I$	$- , I$	$- , I$
$- , * 0$	I	$/$	$- , * 0$	0	$/$	$- , * I$	0	$/$	$- , 0$	$- , I$	$- , I$	$- , 0$	$- , 0$	$- , I$
$- , * 0$	I	$/$	$- , * I$	I	$/$	$- , * I$	0	$/$	$- , I$	$- , I$	$- , I$	$- , 0$	$- , 0$	$- , I$

Рис. 4

находятся в активных состояниях, а все остальные - в пассивных. Каждому состоянию автомата A соответствует строка автомата α . Далее, для реализации автомата A логической сетью (в частности, клеточным автоматом) нужно закодировать символы алфавитов входного Σ и выходного T , так как автомат A введен абстрактными, а не структурными (двоичными) входами и выходами.

Символы будем кодировать наборами: $\sigma_1 - (2, 1, 1, 2, 1, 1)$, $\sigma_2 - (1, 2, 1, 1, 2, 1)$ и $\sigma_3 - (1, 1, 2, 1, 1, 2)$. Входные символы подаются на каналы x_i автоматов $A(1, 1)$, $A(1, 2)$, ..., $A(1, 6)$, а выходные снимаются с каналов y_i автоматов $A(4, 4)$, $A(4, 5)$ и $A(4, 6)$. На выходе клеточного автомата α будем получать наборы вида $(\tau_i, 0, 0)$, $(0, \tau_i, 0)$ и $(0, 0, \tau_i)$. Естественно набор $(\tau_i, 0, 0)$ декодировать как τ_i и т.д.

Автомат A под действием символа σ_1 переходит из начального состояния α_1 в α_4 и выдает символ τ_1 . Подадим на входные каналы автомата α код символа σ_1 и опишем работу автомата α .

Автоматы $A(1, 2)$, $A(1, 3)$, $A(1, 5)$ и $A(1, 6)$ под действием входного сигнала $x_i = 1$ перейдут в пассивное состояние.

Автомат $A(1, 4)$ передает вниз сигнал τ_1 ($y_i(1, 4) = \tau_1$) и переходит в пассивное состояние $(-, \tau_1)$. Сигнал τ_1 распространяется вниз, пока не появится на выходе y_i автомата $A(4, 4)$.

Автомат $A(1, 1)$ под действием входного сигнала $x_i = 2$ выдает вниз сигнал $y_i(1, 1) = 2 \uparrow$, т.е. команду "сдвинуться вниз на две строки", и переходит в состояние $(-, 3 \uparrow)$. Автомат $A(2, 1)$ под действием сигнала $x_i = 2 \uparrow$ переходит в состояние $(1 \uparrow, 2 \uparrow)$. Так как вторая координата не есть $0 \uparrow$, то автомат $A(2, 1)$ выдает вниз сигнал $1 \uparrow$ и возвращается в состояние $(-, 1 \uparrow)$. Автомат $A(3, 1)$ работает точно так же и выдает вниз сигнал $y_i = 0 \uparrow$, который переводит автомат $A(4, 1)$ в состояние $(1 \uparrow, 0 \uparrow)$. На этот раз вторая координата состояния есть $0 \uparrow$ и автомат $A(4, 1)$ переходит в состояние $(+, 1 \uparrow)$ и вырабатывает сигналы, которые, распространяясь в четвертой строке, переводят все автоматы в этой строке в активные состояния. Клеточный автомат α готов к переработке следующего набора.

При подаче следующего набора автоматы $A(i, j)$ ($i = 1, 2, 3, 1 \leq j \leq 6$) пропускают сигналы 1 и 2 вниз, при этом состояния этих автоматов не меняются. На этот раз в части автомата α , реализующей функцию переходов δ^* , будет происходить передача сигналов вверх. Она происходит точно так же, как и описанная выше передача вниз. Естественно говорить, что клеточный автомат α реализует с некоторым временным растяжением и сдвигом автомат A .

Очевидно, что можно построить автомат A , работающий описанным выше образом. Однако ясно, что в клеточных автоматах над A можно будет реализовать лишь автоматы не более чем с 4 состояниями, с 3-буквенным входным и выходным алфавитами. Поэтому закодируем числа в таблице δ^* и символы входного Σ и выходного T алфавитов автомата A двоичными наборами соответствующей длины (табл. 4 и 5) и введем новый автомат $\bar{A}$. Ав-

Т а б л и ц а 4

	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	II/	OI/	II/
α_2	OI/	OI/	OO/
α_3	OI/	OO/	IO/
α_4	OI/	II/	IO/

Т а б л и ц а 5

	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	OI	II	IO
α_2	IO	OI	II
α_3	OI	IO	OI
α_4	II	IO	OI

томат $\bar{A}$ имеет три группы состояний вида: $(+, \xi)$, $(-, \xi)$, $\xi \in \{0, 1\}$ - для реализации функции выходов λ ; $(+, \kappa)$, $(-, \kappa)$ и состояния вида (ξ) , где $\xi \in \{0, 1, \uparrow, \downarrow\}$, служащие для записи функции δ^* ; вспомогательные состояния вида (ξ_1, ξ_2) , где $\xi_i \in \{0, 1, \uparrow, \downarrow\}$.

Теперь в клеточном автомате α заменим каждый из автоматов $A(i, j)$ одномерным блоком из автоматов $\bar{A}$ (см. рис. 4). Полученный клеточный автомат обозначим $\bar{\alpha}$. Автомат $A(i, j)$ ($1 \leq i \leq 4$, $j = 4, 5, 6$) заменяется блоком из двух автоматов (для записи кодов символов τ_i), а $A(i, j)$ ($1 \leq i \leq 4$, $j = 1, 2, 3$) - блоком из четырех автоматов. При этом самый левый в блоке автомат используется для записи $*$, определяющей начало блока, второй и третий автоматы - для записи двоичного кода соответствующего числа в таблице δ^* , а в четвертом автомате запоминается одна из стрелок $\uparrow$ или $\downarrow$. Состояние автоматов $\bar{A}(i, j)$ в начальный момент показано на рис. 4. Символы σ_i кодируются следующими наборами: $\sigma_1 - (2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$, $\sigma_2 - (1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)$, $\sigma_3 - (1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2)$. Входные символы подаются на каналы $x_1(1, 1)$, $x_1(1, 5)$, $x_1(1, 9)$, $x_1(1, 13)$, $x_1(1, 14)$, ..., $x_1(1, 18)$, выходные снимаются с каналов $y_1(4, j)$, ($13 \leq j \leq 18$). Образует пару $\{y_1(4, 13) + y_1(4, 15) + y_1(4, 17)$;

$y_1(4, 14) + y_1(4, 16) + y_1(4, 18)\}$ и восстановим символ τ_i , кодом которого является эта пара.

Рассмотрим кратко работу клеточного автомата $\bar{\alpha}$ при подаче на его входы набора $(2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$. Автоматы $\bar{A}(i, j)$ ($1 \leq i \leq 4$, $13 \leq j \leq 18$), реализующие функцию λ , работают точно так же, как в автомате α . Автоматы $\bar{A}(1, 5)$ и $\bar{A}(1, 9)$ перейдут в пассивные состояния $(-, \kappa)$. Автомат $\bar{A}(1, 1)$ под действием входного сигнала $x_1 = 2$ вырабатывает сигнал, который, распространяясь слева направо, проверяет, не записан ли в блоке нулевой набор^{*)}. Этот сигнал, отражаясь от автомата $\bar{A}(1, 4)$, проходит справа налево и вызывает передачу вниз набора $(1, 0, \uparrow)$, который записывается в автоматах $\bar{A}(2, 2)$, $\bar{A}(2, 3)$ и $\bar{A}(2, 4)$, а именно эти автоматы переходят в состояния $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(\uparrow, \downarrow)$ соответственно. Автомат $\bar{A}(1, 1)$ передает вниз сигнал, приводящий в действие автомат $\bar{A}(2, 1)$. Далее происходит проверка равенства нулю набора, записанного во вторых координатах состояний автоматов $\bar{A}(2, 2)$ и $\bar{A}(2, 3)$. Автоматы $\bar{A}(2, 2)$, $\bar{A}(2, 3)$ и $\bar{A}(2, 4)$ передают вниз набор $(0, 1, \uparrow)$ и возвращаются в исходные состояния. Наконец, вторые координаты состояний автоматов $\bar{A}(4, 2)$ и $\bar{A}(4, 3)$ будут равны нулю, и автомат $\bar{A}(4, 4)$ выдает сигналы, которые, распространяясь в 4-й строке, восстанавливают прежние состояния автоматов $\bar{A}(4, 2)$ и $\bar{A}(4, 3)$ и переводят в активные состояния соответствующие автоматы. В остальной работе автоматов $\bar{\alpha}$ и α аналогична. Нетрудно видеть, что можно построить автомат $\bar{A}$, работающий описанным выше образом, причем в клеточных автоматах над $\bar{A}$ можно реализовать любой конечный автомат. Перейдем к точной формулировке результата.

О п р е д е л е н и я. Фиксируем последовательность Σ алфавитов $\Sigma_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, и, не уменьшая общности, будем рассматривать автоматы, входные и выходные алфавиты которых суть алфавиты из Σ . Через Σ_n^* обозначим

^{*)}Если бы был записан нулевой набор, то автомат $\bar{A}(1, 4)$ выдал сигналы, которые перевели бы все автоматы первой строки в активные состояния.

множество слов в алфавите Σ . Через $H(p, q, z)$ обозначим семейство инициальных автоматов с z состояниями, с входным алфавитом Σ_p и выходным алфавитом Σ_q . Каждый автомат $A \in H(p, q, z)$ задает некоторый оператор α из Σ_p в Σ_q . Пусть задан автомат $A \in H(p, q, z)$. Как обычно, для того, чтобы можно было говорить о реализации оператора α , задаваемого автоматом A , некоторой логической сетью (в частности, клеточным автоматом) с n входами и m выходами, нужно закодировать символы из Σ_p наборами $(u_1, \dots, u_n)$ символов входного алфавита элементов сети, и наборы $(v_1, \dots, v_m)$ символов выходного алфавита элементов сети декодировать как символы из Σ_q . Будем говорить, что клеточный автомат α реализует оператор α с растяжением T , сдвигом τ и кодированием (f, g) , если для любого слова $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ в алфавите Σ_p автомат α перерабатывает последовательность $f(\sigma_1) \bar{0} \dots \bar{0} f(\sigma_2) \bar{0} \dots \bar{0} \dots \bar{0} f(\sigma_k) \bar{0} \dots \bar{0}$ в последовательность $\bar{0} \dots \bar{0} g(\xi_1) \bar{0} \dots \bar{0} g(\xi_2) \bar{0} \dots \bar{0} g(\xi_k) \bar{0} \dots \bar{0}$ такую, что $g(\xi_1) g(\xi_2) \dots g(\xi_k) = \alpha(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k)$, где $\bar{0}$ — нулевой входной набор $*$). Будем говорить, что клеточный автомат α реализует конечный автомат A с растяжением T , сдвигом τ и кодированием (f, g) , если он реализует с этими параметрами оператор α , задаваемый автоматом A . Заметим, что кодирующие функции f и g не должны зависеть от автомата A , а лишь от параметров p, q и z (в противном случае возможна тривиальная реализация — тождественное преобразование). Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что существует способ W порождения функций f и g по значениям параметров p, q, z . Будем предполагать также, что растяжение T и сдвиг τ также определяются способом W по значениям параметров p, q, z и, таким образом, одинаковы для всех автоматов A , принадлежащих одному семейству $H(p, q, z)$.

Автомат A будем называть универсальным, если существует способ W порождения (по числам p, q, z) кодирующих функций f и g и чисел T и τ такой, что для любых p, q, z и любого автомата $A \in H(p, q, z)$ можно построить клеточный ав-

*Сравнить с определением реализации логической сетью ограничено детерминированного оператора в [4].

томат α над A , реализующий автомат A с кодированием (f, g) , растяжением T и сдвигом τ , задаваемыми W .

Пусть A — универсальный автомат и W — способ порождения кодирующих функций и величин растяжения T и сдвига τ . Через $L_{A,W}(A)$ обозначим наименьшую сложность клеточного автомата α над A , реализующего автомат A с кодированием, растяжением и сдвигом, задаваемыми W , а через $L_{A,W}(p, q, z)$ обозначим $\max_{A \in H(p, q, z)} L_{A,W}(A)$, где максимум берется по всем $A \in H(p, q, z)$. Справедлива следующая верхняя оценка.

ТЕОРЕМА I. Существуют универсальный автомат A и способ W такие, что

$$L_{A,W}(p, q, z) \leq pz \log qz$$

($\varphi(x) \leq \psi(x)$, если $\varphi(x) \leq C \cdot \psi(x)$, C — константа, и $\log$ — есть логарифм по основанию 2).

Универсальный автомат. Опишем точно универсальный автомат, идея конструкции которого была изложена выше (автомат A).

Сначала для удобства изложения построим автомат A_1 с 18 состояниями: $(+, 0)$, $(+, 1)$, $(-, 0)$ и $(-, 1)$ используются для реализации функции выходов; $(+, *)$ и $(-, *)$ — для отметки начала блока; (0) , (1) , $(\dagger)$ и $(\ddagger)$ — для записи функции δ^* ; $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(\dagger, \dagger)$, $(\ddagger, \dagger)$, $(\dagger, \ddagger)$ и $(\ddagger, \ddagger)$ — вспомогательные. Алфавиты каналов x_i и y_i есть $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; x_2 и y_2 — $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; x_3 и y_3 — $\{0, 1, 2\}$; x_4 и y_4 — $\{0, 1, 2, 3\}$.

Для простоты описания будем считать, что выходной сигнал, индуцированный входным сигналом, поданным в момент t , появляется на выходе автомата A_1 в непосредственно следующий момент $t+1$. Функции переходов и выходов автомата A_1 приведены в табл. 6а, в которой при указании входных и выходных комбинаций опущены нулевые значения. Под действием нулевого входного набора $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ автомат A_1 не меняет своего состояния и выдает $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Нетрудно видеть, что некоторые состояния автомата A_1 сов-

$X_7=1$	$X_7=2$	$X_7=3$	$X_7=4$	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$	$X_2=4$	$X_2=5$	$X_3=1$	$X_3=2$	$X_4=1$	$X_4=2$	$X_4=3$
(+,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$	$y_1=0$											
(+,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$	$y_1=0$											
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=1$	$y_1=2$												
(-,-)	(-,-)	(-,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												
(+,-)	(+,-)	(+,-)											
$y_1=0$	$y_1=0$												

$X_1=1$	$X_1=2$	$X_1=3$	$X_1=4$	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$	$X_2=4$	$X_2=5$	$X_3=1$	$X_3=2$	$X_4=1$	$X_4=2$	$X_4=3$
C_1	C_3			C_7	C_7	C_7	C_7	C_7			C_1	C_1	
	$y_1=0$				$y_1=4, y_2=1$	$y_2=3$	$y_2=4, y_3=2$	$y_2=5, y_3=2, y_4=1$			$y_4=2$	$y_4=2$	
C_2	C_4			C_8	C_8	C_8	C_8	C_8			C_2	C_2	
	$y_1=0$				$y_1=4, y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4, y_3=1$	$y_2=5, y_3=2$			$y_4=1$	$y_4=2$	
C_3	C_3					C_1					C_5	C_5	C_1
	$y_1=1$					$y_2=3$					$y_4=2, y_5=3$	$y_4=3, y_5=1$	$y_4=3$
C_4	C_4					C_2					C_5	C_5	C_2
	$y_1=1$					$y_2=3$					$y_4=2, y_5=3$	$y_4=4, y_5=1$	$y_4=3$
C_5	C_6					C_5			C_4		C_5	C_5	
	$y_1=0$					$y_2=4$		C_6			$y_4=2, y_5=3$	$y_4=4, y_5=1$	
C_6	C_6					$y_2=3$		$y_2=2$			C_5	C_5	C_5
	$y_1=1$					$y_2=3$		$y_2=2$			$y_4=1, y_5=2, y_6=3$	$y_4=4, y_5=1$	$y_4=3$
C_7		C_1	C_7	C_7	C_7	C_7	C_7	C_7	C_1	C_7	C_7	C_7	
		$y_1=0$	$y_1=0$	$y_1=3, y_2=1$	$y_1=4, y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4, y_3=1$	$y_2=5, y_3=2$	$y_3=0$	$y_3=0$	$y_4=1$	$y_4=2$	
C_8		C_8	C_2	C_8	C_8	C_8	C_8	C_8	C_8	C_2	C_8	C_8	
		$y_1=0$	$y_1=0$	$y_1=4, y_2=2$	$y_1=3, y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4, y_3=2$	$y_2=5, y_3=1$	$y_2=0$	$y_2=0$	$y_4=2$	$y_4=2$	
C_9		C_9				C_9			C_6		C_9	C_9	
		$y_1=0$				$y_2=3$			$y_2=0$		$y_4=2, y_5=3$	$y_4=3, y_5=1$	

местимы. Проведя минимизацию [5], можно получить автомат A_2 с 9 состояниями (табл. 6б, в которой состояние c_1 есть множество совместимых состояний $\{(+,0), (0,1)\}$, $c_2 - \{(+,1), (1,0)\}$, $c_3 - \{(-,0), (+,1)\}$, $c_4 - \{(-,1), (+,1)\}$, $c_5 - \{(+,*), (1)\}$, $c_6 - \{(-,*), (1,1)\}$, $c_7 - \{(0), (0,0)\}$, $c_8 - \{(1), (1,1)\}$ и $c_9 - \{(1), (1,1)\}$. Ниже при доказательстве универсальности в целях большей простоты используется автомат A_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО универсальности автомата A_1 . Прежде всего опишем способ W порождения кодирующих функций (f, g) и величин растяжения T и сдвига τ . Зафиксируем числа p, q, τ . Через R обозначим $\lceil \log_2 \tau \rceil + 2$ и через $Q = \lceil \log_2 q \rceil$ ($\lceil \alpha \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее α). Функция f определена на множестве букв алфавита $\Sigma_p = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ со значениями в множестве наборов длины $p+Q$ символов 1 и 2, а именно $f(\sigma_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p+Q})$, где $\alpha_i = 2, \alpha_{p+Q(i-1)/p+1} = 2, 1 \leq j \leq Q$, и для всех остальных значений k $\alpha_k = 1$. Далее, функция g определена на наборах из 0 и 1 длины pQ и $g(\beta_1, \dots, \beta_{pQ}) = \sigma_i$, где i — число, двоичной записью которого является набор $(\sum_{j=0}^{p-1} \beta_{1+jQ}, \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{2+jQ}, \dots, \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{Q+jQ})$. Наконец, $T = \tau + 2R\tau + p(R+Q)$ и $\tau = 2$. Пусть теперь задан автомат $A \in H(p, q, \tau)$ с множеством состояний $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, начальным состоянием α_s , входным алфавитом Σ_p , выходным алфавитом Σ_q , функциями переходов δ и выходов λ . Введем, как и раньше, функцию δ^* .

Построим клеточный автомат $\mathcal{A}$ над A_1 , реализующий A . Возьмем клеточное пространство, состоящее из τ строк и $p(R+Q)$ столбцов. Будем говорить, что автоматы $A(i, (m-1)R+j)$ ($m \leq p, 1 \leq j \leq R$) образуют блок $B(i, m)$, а автоматы $A(i, pR+(n-1)Q+j)$ ($n \leq p, 1 \leq j \leq Q$) образуют блок $B(i, p+n)$. Начальные состояния автоматов $A(i, j)$ определяются следующим образом. Пусть $\delta^*(\alpha_i, \sigma_j) = m\xi$, $\xi \in \{1, 1\}$ и $\lambda(\alpha_i, \sigma_j) = \sigma_n$. Тогда в блоке $B(i, j)$ записывается двоичная запись числа m и стрелка ξ , а в блоке $B(i, p+j)$ — двоичная запись числа n . Автоматы в k -й строке находятся в активных состояниях, а в остальных — в пассивных. Входные символы подаются на каналы $x_i(1, (i-1)R+1)$,

$i = 1, 2, \dots, p$ и каналы $x_i(1, pR+j)$, $1 \leq j \leq pQ$, а выходные символы снимаются с каналов $y_i(2, pR+j)$, $1 \leq j \leq pQ$.

Пусть $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ — произвольное слово в алфавите Σ_p и пусть автомат A перерабатывает его в слово $\sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_k}$. Опишем работу автомата $\mathcal{A}$ над последовательностью наборов:

$$f(\sigma_{i_1}) \bar{0} \dots \bar{0} f(\sigma_{i_2}) \bar{0} \dots \bar{0} f(\sigma_{i_k}) \bar{0} \dots \bar{0}.$$

В начальный момент на входные каналы подается набор $f(\sigma_{i_1})$. Набор $f(\sigma_{i_1})$ пропускается вниз соответствующими автоматами x в k -й момент поступает на входные каналы x_i автоматов $A(k, 1), A(k, R+1)$ и т.д., причем автоматы, расположенные в первых $(k-1)$ строках, не меняют своих состояний.

Автоматы $A(k, j)$ под действием входного сигнала $x_i = 1$ переходят из активного состояния вида $(+, \xi)$ в пассивное состояние $(-, \xi)$.

Автоматы $A(k, j)$, входящие в блок $B(k, j)$, находятся в активных состояниях вида $(+, \xi)$, $\xi \in \{0, 1\}$. Под действием входного сигнала $x_i = 2$ эти автоматы переходят в пассивное состояние $(-, \xi)$ и выдают сигнал $y_i = \xi$ (см. табл. 7, на которой представлен фрагмент табл. 6а, связанный с реализацией функций выходов λ). Эти сигналы распространяются вниз и через $(2-k+1)$ тактов появляются на выходных рабочих каналах. Очевидно, что появляется набор ξ , который декодируется как σ_{j_1} . Состояния автоматов в последних $(2-k)$ строках, передающих эти сигналы вниз, не меняются.

Автомат $A(k, (i_1-1)R+1)$, находящийся в состоянии $(+, *)$, под действием сигнала $x_i = 2$ остается в том же состоянии и выдает сигнал $y_i = 1$. Этот сигнал, проходя слева направо, проверяет, не записан ли в блоке $B(k, i_1)$ нулевой набор (табл. 8). Рассмотрим три возможных случая.

1) $\delta^*(\alpha_k, \sigma_{i_1}) = 0$. Сигнал 1, распространяясь в блоке $B(k, i_1)$, доходит до автомата $A(k, i_1, R)$, который выдает сигнал $y_2 = y_4 = 3$. Эти сигналы, распространяясь в k -й строке, все автоматы, находящиеся в состоянии вида $(-, \xi)$, переводят в ак-

Т а б л и ц а 7

	$x_i=1$	$x_i=2$
$(+, 0)$	$(-, 0)$ $y_i=0$	$(-, 0)$ $y_i=0$
$(+, 1)$	$(-, 1)$ $y_i=0$	$(-, 1)$ $y_i=1$
$(-, 0)$	$(-, 0)$ $y_i=1$	$(-, 0)$ $y_i=2$
$(-, 1)$	$(-, 1)$ $y_i=1$	$(-, 1)$ $y_i=2$

Таблица 8

	$x_1=2$	$x_4=1$	$x_4=2$
$(+,*)$	$(+,*)$ $y_4=1$		
(0)		(0) $y_4=1$	(0) $y_4=2$
(1)		(1) $y_4=2$	(1) $y_4=2$

Таблица 9

	$x_2=1$	$x_2=2$
(0)	(0) $y_1=3 y_2=1$	(0) $y_1=4 y_2=2$
(1)	(1) $y_1=4 y_2=2$	(1) $y_1=3 y_2=2$

тивные состояния $(+, \xi)$. Автомат α готов к переработке следующего набора.

2) $\delta^*(\alpha, \sigma_i) = m, m > 0$. На вход x_4 автомата $A(k, i, R)$ поступает сигнал 2 (т.к. в блоке $B(k, i)$ есть хотя бы один автомат, находящийся в состоянии (1)). Автомат $A(k, i, R)$ остается в том же состоянии (1) и выдает сигналы $y_3 = 3$ и $y_4 = 1$. Сигнал 1, проходя справа налево, вызывает передачу двоичной записи числа $(m-1)$ (табл.9). При этом используется тризначное соотношение $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, 0 = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, 1+1$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, и кодом 0 при передаче вниз является сигнал 4, а кодом 1 — сигнал 3. Наконец, автомат $A(k, (i-1)R+1)$ под действием входного сигнала $x_2 = 2$ переходит в состояние $(-, *)$ и выдает сигнал $y_1 = 4$.

Рассмотрим работу автоматов, принадлежащих блоку $B(k+1, i)$. Автомат $A(k+1, i, R)$ под действием входного сигнала $x_1 = 3$ из состояния (ξ) , $\xi \in \{t, t\}$, переходит в состояние (ξ, t) . Автомат $A(k+1, j) [(i-1)R+1 \leq j \leq i, R]$ из состояния ξ , $\xi \in \{0, 1\}$, под действием входного сигнала $x_1 = 4$ переходит в состояние $(\xi, 0)$. Автомат $A(k+1, (i-1)R+1)$ под действием входного сигнала $x_1 = 4$ переходит из состояния $(-, *)$ в $(+, *)$ и выдает сигнал $y_4 = 1$. Работа в блоке $B(k+1, i)$ протекает аналогично описанному выше, причем учитываются лишь вторые компоненты вектора состояния (табл.10).

Очевидно, что процесс передачи вниз будет продолжаться до $(k+m)$ -й строки, когда на вход автомата $A(k+m, i, R)$ поступит сигнал $x_4 = 1$ и автоматы $A(k+m, R, j+1)$, $(1 \leq j \leq p-1)$ и $A(k+m, pR+1)$ ($1 \leq l \leq pR$) будут переведены в активные состояния. Автомат α готов к переработке следующего входного набора. Заметим, что весь процесс перехода займет $k+2R(m+1)+max\{2i,$

Таблица 10

	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_4=1$	$x_4=2$
$(0,0)$	(0) $y_1=3 y_2=1$	(0) $y_1=4 y_2=2$	(0) $y_2=3$	$(0,0)$ $y_4=1$	$(0,0)$ $y_4=2$
$(0,1)$	(0) $y_1=4 y_2=2$	(0) $y_1=3 y_2=2$	(0) $y_2=3$	$(0,1)$ $y_4=2$	$(0,1)$ $y_4=2$
$(1,0)$	(1) $y_1=3 y_2=1$	(1) $y_1=4 y_2=2$	(1) $y_2=3$	$(1,0)$ $y_4=1$	$(1,0)$ $y_4=2$
$(1,1)$	(1) $y_1=4 y_2=2$	(1) $y_1=3 y_2=2$	(1) $y_2=3$	$(1,1)$ $y_4=2$	$(1,1)$ $y_4=2$
(t,t)				(t) $y_2=y_4=3$	(t) $y_1=3 y_2=1$
(t,t)				(t) $y_2=y_4=3$	(t) $y_1=3 y_2=1$

Таблица 11

	$x_2=4$	$x_2=5$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_4=1$	$x_4=2$
$(+,*)$		$(-,*)$ $y_3=2$				
$(-,*)$				$(+,*)$ $y_4=1$		
(0)	(0) $y_2=4 y_3=1$	(0) $y_2=5 y_3=2$	$(0,1)$ $y_3=0$	$(0,0)$ $y_3=0$	(0) $y_4=1$	(0) $y_4=2$
(1)	(1) $y_2=5 y_3=2$	(1) $y_2=4 y_3=1$	$(1,1)$ $y_3=0$	$(1,0)$ $y_3=0$	(1) $y_4=2$	(1) $y_4=2$
(t)			(t,t) $y_3=0$		(t) $y_2=y_4=3$	(t) $y_2=4 y_3=1$
(t)			(t,t) $y_3=0$			
$(0,0)$	(0) $y_2=4 y_3=1$	(0) $y_2=5 y_3=2$			$(0,0)$ $y_4=1$	$(0,0)$ $y_4=2$
$(0,1)$	(0) $y_2=5 y_3=2$	(0) $y_2=4 y_3=1$			$(0,1)$ $y_4=2$	$(0,1)$ $y_4=2$
$(1,0)$	(1) $y_2=4 y_3=1$	(1) $y_2=5 y_3=2$			$(1,0)$ $y_4=1$	$(1,0)$ $y_4=2$
$(1,1)$	(1) $y_2=5 y_3=2$	(1) $y_2=4 y_3=1$			$(1,1)$ $y_4=2$	$(1,1)$ $y_4=2$
(t,t)					(t) $y_2=y_4=3$	(t) $y_2=4 y_3=1$
(t,t)					(t) $y_2=y_4=3$	(t) $y_2=4 y_3=1$

$R(p-i_1+Qp)$ тактов.

3) Пусть теперь $\delta^*(\alpha_i, \sigma_{i_1}) = n/n > 0$. Работа автоматов, принадлежащих блоку $B(\kappa, i_1)$, происходит аналогично описанному выше, с той лишь разницей, что справа налево распространяются сигналы 4 (вместо 1) и 5 (вместо 2), вызывающие передачу вверх двоичной записи числа $(n-1)$. При передаче вверх кодом 0 является сигнал 2 и кодом 1 — сигнал 1. Запись в блоке $B(\kappa-1, i_1)$ и дальнейшая работа происходит так же, как и при передаче вниз с очевидными изменениями. Фрагмент таблицы 6а, связанный с передачей вверх, представлен в табл. II.

Работа автомата α над следующим набором $f(\sigma_{i_2})$ происходит аналогично. Заметим, что минимальное растяжение, необходимое для реализации автомата A :

$$T_{\min} = \max [i + 2R(\Delta(i, f) + 1) + \\ + \max (Rf, R(p-f) + Qp)] \leq T = z + 2zR + p(R+Q),$$

где минимум берется по всем состояниям α_i и по всем входным символам σ_j и $\Delta(i, f)$ — число, стоящее в таблице δ^* на пересечении i -й строки и f -го столбца.

Таким образом, показано, что для произвольного автомата A можно построить клеточный автомат α над A_1 , реализующий A , т.е. автомат A_1 , а значит, и эквивалентный ему автомат A_2 с 9 состояниями, универсальный. При этом клеточный автомат α , реализующий произвольный автомат $A \in H(p, q, z)$, имеет сложность:

$$L(\alpha) = zp(R+Q) = zp(\lceil \log z \rceil + 2) \log q \leq zp \log zq.$$

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и я

1. При доказательстве верхней оценки, по существу, предлагается метод реализации автоматов в однородных средах. Отметим некоторые особенности принятого подхода. Во-первых, проблемы выбора ячейки и создание метода реализации в среде решаются одновременно. Во-вторых, память ячейки используется не только для запоминания настроек, но и в процессе работы среды. Наконец,

предлагается вкладывать в среду непосредственно задание условий работы, минуя этапы структурного синтеза и размещения полученной логической сети в среде.

2. Выше рассматривалось одно специальное кодирование символов алфавитов Σ_p и Σ_q . Можно рассмотреть минимальное кодирование, т.е. кодировать символы входного Σ_p и выходного Σ_q алфавитов наборами длины $\lceil \log p \rceil$ и $\lceil \log q \rceil$ соответственно. Тогда реализация будет иметь вид, изображенный на рис. 5. Клеточный автомат α — это автомат α , описанный выше, а клеточные автоматы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ — это дешифратор и шифратор, связывающие специальное кодирование, введенное выше, и минимальное кодирование символов алфавитов Σ_p и Σ_q . В этом случае сложность устройства в целом равна

$$\lceil \log p \rceil \cdot p(R+Q) + pz(R+q) + pQ^2 \frac{Q(Q-1)}{2},$$

что по порядку не превосходит $pq \log qz$, если $z \geq \log p$ и $z \geq \log q$.

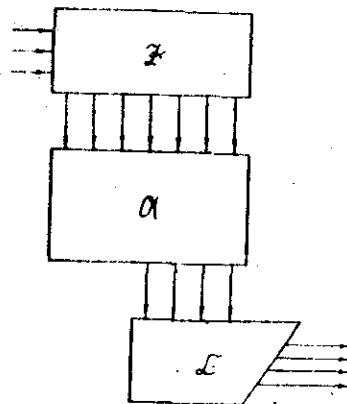


Рис. 5

2. Оценка снизу

Покажем теперь, что не существует универсального автомата, который позволял бы получить существенно менее сложную реализацию.

ТЕОРЕМА 2. Для любого универсального автомата и любого способа W

$$L_{A,W}(p, q, z) \geq pz \log qz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — произвольный универсальный автомат и W — некоторый соответствующий A способ порождения кодирующих функций и величин растяжения и сдвига. Пусть автомат A имеет n состояний. Рассмотрим клеточный автомат α над A сложности N . Оператор

реализуемый автоматом α , с кодированием, растяжением и сдвигом, задаваемыми W , будет однозначно определен, если фиксировать начальное состояние автомата α (одно из 2^N) и используемые входные и выходные каналы. Пусть c_f - длина наборов, $f(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma_p$, а c_g - длина наборов на которых определена функция g . Очевидно, что используемые входные (выходные) каналы можно разместить не более чем $C_{4N}^{c_f}$ ($C_{4N}^{c_g}$) способами, т.к. число внешних входных (выходных) каналов автомата α не превосходит $4N$. Таким образом, автомат α может реализовать не более

$$2^N \cdot C_{4N}^{c_f} \cdot C_{4N}^{c_g} \leq 2^{C_1 N}$$

различных операторов из Σ_p^* в Σ_q^* . Далее, т.к. изоморфные клеточные автоматы реализуют одни и те же операторы, а число неизоморфных клеточных автоматов сложности N не превосходит $2^{C_2 N}$ [6] (т.к. клеточный автомат - плоская логическая сеть), то на всех клеточных автоматах над A сложности N можно реализовать не более $2^{C_1 N} \cdot 2^{C_2 N} \leq 2^{C_3 N}$ различных операторов. Число различных операторов, задаваемых автоматами семейства $H(\rho, q, z)$ не меньше чем $(qz)^{(\rho-1)z} (q-1)^{z-1}$ [7]. Наконец, т.к. в клеточных автоматах сложности $L_{A,W}(\rho, q, z)$ можно реализовать любые операторы, задаваемые автоматами из $H(\rho, q, z)$, то

$$2^{C_3 L_{A,W}(\rho, q, z)} \geq (qz)^{(\rho-1)z} (q-1)^{z-1}.$$

Отсюда

$$L_{A,W}(\rho, q, z) \geq \rho z \log qz.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Полагая в теореме $2\rho = 2^n$, $q = 2$, $z = 1$, получим оценку снизу сложности $L(n)$ реализации булевых функций от n аргументов: $L(n) \geq 2^n$. Верхнюю оценку $L(n) \leq 2^n$ см., например, в [2].

Л и т е р а т у р а

1. И.В. ПРАНГИШИЛИ, Н.А. АБРАМОВА, Е.В. БАБИЧЕВА, В.В. ИГНАТУШЕНКО. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств, "Наука", М., 1967.
2. В.В. ЕВРЕЙНОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности, "Наука" СО, Новосибирск, 1966.
3. Микроэлектроника и большие системы, сб. переводов под ред. В.Г. Толстова, "Мир", М., 1967.
4. Н.Е. КОБРИНСКИЙ, Б.А. ТРАХТЕНБРОТ. Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, М., 1962.
5. M.C. PAUL, S.H. UNGER. Minimizing the number of states in incompletely specified switching functions. IRE Trans., EC-8, 1959.
6. Ф.Я. ВЕТУХОВСКИЙ. Об оценках числа плоских графов; - ДАН, 1962, т.142, 1.
7. Б.А. ТРАХТЕНБРОТ. О сложности схем, реализующих многооператорные семейства операторов. - Проблемы кибернетики, М., 1964, вып.12.

Поступила в редакцию
10.XII. 1969 г.