ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971 год Выпуск 41

УДК 681.142.353

СИСТЕМЫ С ГЛОБАЛЬНОЙ ПЕРЕСТРОЙКОЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Л.И. Макаров

Вычислительная среда (ВС) обладает тем свойством, что ее элементы могут быть настроены на выполнение любой функции, принадлежащей базису ВС [1]. Вследствие этого возможно при наличии в ВС элементов, не принадлежащих данной программе (свободных элементов), заменять ими отказавшие элементы программы таким образом, что работа программы не нарушается. Ниже приводится оценка надежности программ ВС с нагруженным резервом при глобальной перестройке. В данной работе используются понятия и обозначения из [1,2,3].

Введем некоторые определения. Преобразование программы ВС в эквивалентную по выполняемому оператору при заданных функциональных ограничениях в заданных элементах ВС назовем перестройкой программы ВС. Перестройка программы предполагает существование в ВС, кроме самой программы, также и некоторого множества свободных элементов ВС, которое далее называем резервом программы. Резерв может быть двух типов: локальный, при котором для замены некоторого элемента программы могут быть использованы только элементы соответствующего подмножества резерва; глобальный, при котором каждый элемент резерва может быть использован для замены произвольного элемента программы. Таким образом, в зависимости от типа резерва можно различать локальную и глобальную перестройки программы. В данной работе рассматривается только глобальная перестройка.

Алгоритмы глобальной перестройки зависят как от характеристик ВС (размерность, базис и т.д.), так и от вида исходной программы (правильная, линейная и т.д.). В приложении в качестве примера приведен алгоритм глобальной перестройки правильной программы (алгоритм сдвига).

Назовем системой с глобальной перестройкой в ВС совокупность следующих объектов: программы ВС, глобального резерва программы и устройства непрерывного контроля и перестройки. Далее предполагается, что устройство контроля и перестройки абсолютно надежно и время перестройки равно нулю.

Отказ [2] элемента программы будем называть неликвидируемым в системе, если в результате такого отказа перестройка программы невозможна. Под ненадежностью системы будем понимать вероятность возникновения в ней хотя бы одного неликвидируемого отказа.

Программу ВС обозначим через M, а множество элементов резерва – через R.

Будем говорить, что k отказов элементов ликвидируемы в программе M_k системы, если программа M_k, содержащая k отказов, выполняет заданные функции. Элементы программы M_k, отказы которых не влияют на правильное функционирование системы, назовем несущественными. Множество несущественных элементов M_k обозначим через G_k. В качестве примера множества несущественных элементов для алгоритма сдвига можно привести множество отмеченных элементов, которым в п.п. 3 и 4 алгоритма присваивается функция $\mathcal{D}$.

Рассмотрим систему с глобальной перестройкой и нагруженным [3] резервом в предположении, что надежность элементов ВС задана и равна ρ.

Система работает следующим образом. Пусть в некоторый момент времени в программе M'_k (рис. 1) ликвидируемы k отказов. Если в следующий момент в M'_k происходит $(k+1)$-й отказ, то устройство контроля и перестройки обнаруживает его и перестраивает программу таким образом, что функционирование системы не нарушается. В результате перестройки появляется программа M'_{k+1},

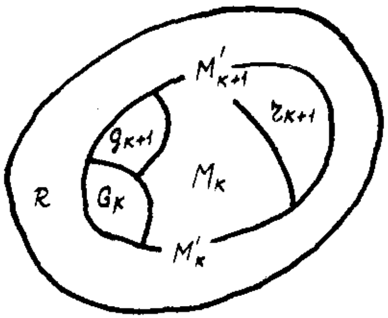

Рис. I

содержащая множество G_{k+1}, в которой ликвидируем $(k+1)$ отказ. Отказ системы наступает при появлении в ней неликвидируемого отказа элемента.

Для замены $(k+1)$-го отказа в программе M'_k используется некоторое множество z_{k+1} элементов, принадлежащее резерву R, при этом в системе появляется некоторое множество g_{k+1} несущественных элементов. Поскольку множества z_{k+1} и g_{k+1} всегда можно выбрать так, что $M'_k \cap z_{k+1} = \Phi$, $z_{k+1} \cap g_{k+1} = \Phi$, то соотношения между множествами M, G, z, g имеют вид (рис. I):

$$M'_{k+1} = M'_k \cup z_{k+1}$$
$$G_{k+1} = G_k \cup g_{k+1} \quad \text{(I)}$$

Обозначим множество $M'_k \setminus G_k$ через M_k. Тогда из (I) следует:

$$M_{k+1} = (M_k \setminus g_{k+1}) \cup z_{k+1} = M^*_k \cup z_{k+1}. \quad (2)$$

Количество элементов некоторого множества M будем обозначать через $|M|$. Пусть $|M_k| = N_k$, $|z_k| = n_k$, $|g_k| = \ell_k$, $|G_k| = L_k$, $|R| = W$. Тогда из (2):

$$N_{k+1} = N_k - \ell_{k+1} + n_{k+1} \quad (3)$$

Предположим, что число элементов множеств z_{k+1} и g_{k+1} не зависит от расположения $(k+1)$-го отказа в программе M_k и величины N_k, n_k, ℓ_k известны. Например, для алгоритма сдвига предположим, что на каждом его шаге справедливо условие п.2; в этом случае z_{k+1} состоит из элементов множества R с координатами $0 \le i \le a+1$, $j = b+1$ и $i = a+1$, $0 \le j \le b+1$ (рис.2). Введем следующие обозначения: A^s_M – событие, состоящее в том, что во множестве элементов M произошло s отказов; A^s_M / A^α_T – событие, состоящее в том, что во множестве M произошло s отказов, причем α произошло во множестве T; A^k_{k-1} – такое событие, когда k отказов произошло в M_{k-1}, причем $(k-1)$ отказов – в M_{k-2}, ..., причем 2 отказа – в M_1, причем I отказ – в M_0. Тогда событие S (система функционирует правильно) можно представить в виде:

$$S = \bigvee_{k=0}^{m} S_k = A^0_{M_0} \vee A^1_{M_0} \& A^0_{z_1} \vee A^2_1 \& A^0_{z_2} \vee \ldots \vee A^k_{k-1} \& A^0_{z_k} \vee \ldots \vee A^m_{m-1} \& A^0_{z_m}, \quad (4)$$

где m – наибольшее количество отказов, ликвидируемых в системе, а M_0 – заданная начальная программа.

По определению, $A^{k+1}_k = A^{k+1}_{M_k} / A^k_{k-1}$. Известно [3], что событие $A^{k+1}_{M_k}$, учитывая (2), можно представить в виде:

$$A^{k+1}_{M_k} = \bigvee_{j=0}^{k+1} A^{k+1-j}_{M^*_{k-1}} A^j_{z_k}. \quad (5)$$

Поскольку события $(A^s_{M^*_{k-1}} A^{k+1-s}_{z_k} / A^k_{k-1})$ при $s \le k-1$ являются невозможными и, кроме того, события $A^0_{z_k}$ и $A^1_{z_k}$ независимы от событий A^k_{k-1}, $A^k_{M^*_{k-1}}$, то из (5) следует:

$$A^{k+1}_k = A^{k+1}_{M_k} / A^k_{k-1} = (A^{k+1}_{M^*_{k-1}} / A^k_{k-1}) A^0_{z_k} \vee A^k_{k-1} A^1_{z_k}. \quad (6)$$

Обозначим вероятности событий A^k_{k-1}, $A^s_{z_k}$, $(A^{k+1}_{M^*_{k-1}} / A^k_{k-1})$ через P^k_{k-1}, ρ^s_k, $P(k-1)$, соответственно. Тогда вероятность события A^{k-1}_k, учитывая (6), можно представить в виде:

$$P^{k+1}_k = P(k-1)\rho^0_k + P^k_{k-1}\rho^1_k. \quad (7)$$

Очевидно, что величины P^k_{k-1} и $P(k-1)$ можно выразить через надежность элементов ВС следующим образом:

$$P^k_{k-1} = N(k) q^k p^{N'_{k-1} - L_{k-1} - k},$$
$$P(k-1) = N(k+1) q^{k+1} p^{N'_{k-1} - L_k - (k+1)}, \quad (8)$$

где $q = 1-p$, $N'_{k-1} = |M'_{k-1}|$, $N(k)$, $N(k+1)$ – число различных возможных расположений k отказов в программе M_{k-1} и $(k+1)$-го отказа в M^*_{k-1}, соответственно.

Введем следующие обозначения: O^*_k – некоторое фиксированное расположение k отказов в M_{k-1}, G^*_k – соответствующее ему фиксированное расположение несущественных элементов; O^*_{k+1} – некоторое фиксированное расположение $(k+1)$-го отказа в M_{k-1}, которое можно получить из O^*_k; $\hat{O}_k$ – одно из множества $\{\hat{O}_k\}$ различных расположений k отказов в M_{k-1}, получаемое из данного O^*_{k+1}; $\hat{G}_k$ – соответствующее ему расположение несущественных элементов в M_{k-1}.

Очевидно, что из каждого O_k^* можно получить множество $\{O_{k+1}^*\}$ различных O_{k+1}^*, причем $|\{O_{k+1}^*\}| = N'_{k-1} - L_k - k$. Если в M_{k-1} возможны все различные расположения k отказов и $L_{k-1} = 0$, т.е. $|\{O_k^*\}| = C^k_{N'_{k-1}}$, то каждое O_{k+1}^* можно получить из $(k+1)$ различных O_k^*. Однако в силу того, что I) $N(k) \leq C^k_{N'_{k-1}}$, поскольку рассматривается событие A^*_{k-1}, а не событие $A^k_{M'_{k-1}}$ и 2) в общем случае выполняется соотношение $O^*_{k+1} \cap \cap (\cup \hat{G}_k) \neq \Phi$, т.е. не из каждого $\hat{O}_k$ можно получить O^*_{k+1}; каждое O^*_{k+1} появляется не более чем из $(k+1)$ различных O_k^*. Отсюда следует, что

$$N(k+1) \geq \frac{N'_{k-1} - L_k - k}{k+1} N(k). \tag{9}$$

Из (8) и (9) можно получить

$$\mathcal{P}(k-1) \geq \mathcal{P}^k_{k-1} \cdot \frac{N_{k-1} - \ell_k - k}{k+1} q p^{-(\ell_k + 1)} = \mathcal{P}^k_{k-1} \cdot d(k). \tag{I0}$$

Таким образом, из (I0), (7) и (4):

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_k^{k+1} \geq \mathcal{P}^k_{k-1} (d(k) p_k^o + p'_k), \\ &\mathcal{P}(S_{k+1}) = \mathcal{P}_k^{k+1} p^o_{k+1} \geq \mathcal{P}(S_k)(d(k) + \frac{p'_k}{p_k^o}) p^o_{k+1} = \underset{\sim}{\mathcal{P}}(S_{k+1}), \\ &\qquad k = 1, 2, \ldots, (m-1), \\ &\mathcal{P}(S_o) = p^{N_o}, \quad \mathcal{P}(S_1) = N_o q p^{N_o - 1} \cdot p_1^o, \\ &\quad p_k^s = C^s_{n_k} q^s p^{n_k - s}, \\ &\mathcal{P}(S) \geq \sum_{k=0}^{m} \underset{\sim}{\mathcal{P}}(S_k). \end{aligned} \tag{II}$$

Выражение (II) дает нижнюю оценку надежности системы с глобальной перестройкой и нагруженным резервом в ВС. При $n_k = $ I, $\ell_k = 0$, $k = $ I,2,..., m оно равно выражению для надежности системы со скользящим нагруженным резервом [3].

П р и л о ж е н и е

Известно [I], что правильная программа представляет собой прямоугольник в плоской ВС. Введем в ВС прямоугольную систему координат (X, Y) и будем обозначать элемент программы M с координатами (i, j) через m(i, j). Пусть один из угловых элементов программы имеет координаты (0,0) (рис.2). Будем обозначать функцию, реализуемую элементом m(i, j) в исходной программе M, через φ(i, j). Элементы программы, реализующие функции, отличные от их функций в исходной программе, назовем э л е м е н т а м и о т к а з а, например элементы m(i_o, j_o), m(i'_o, j'_o). Пересечение колонны [I] вдоль любой оси с программой, состоящее из элементов отказа и элементов, реализующих функцию $\mathcal{D}$, назовем к о л о н н о й с в я з и. Множество элементов программы M, не принадлежащих колоннам связи, обозначим через $\hat{M}$. Элемент программы, лежащий на пересечении двух колонн связи, назовем о т м е ч е н н ы м, если он не является элементом отказа. Программу M со сторонами a и b, к которой применяется алгоритм сдвига, будем называть и с х о д н о й. Предположим, что резервом R исходной программы M является множество элементов m(i, j), где $a < i \leq A$, $b < j \leq B$ (рис. 2).

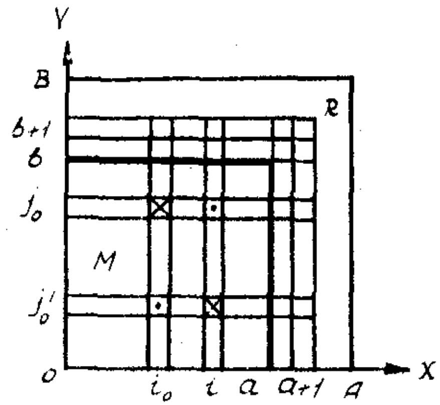

Рис. 2

А л г о р и т м с д в и г а. Исходными данными алгоритма являются:

I) исходная программа M,

2) резерв R,

3) множество N_o отмеченных элементов программы M,

4) множество N неотмеченных элементов отказа программы M.

п. I. Выбираем неотмеченный элемент отказа $m(i_o, j_o) \in N$ программы M.

п. 2. Если ни одна из координат i_o, j_o не совпадает с координатами отмеченных элементов $m' \in N_o$, то переход к п.3, если нет, то переход к п. 5.

п. 3. Функции φ (i, j) элементов $m(i, j) \in \hat{M}$ для $i_o \leq i \leq a$ присваиваем смежным элементам $m(i', j) \in \hat{M} \cup R, i' > i$. Элементам $m(i_o, j) \in M, 0 \leq j \leq b$, и элементу $m(i_o, b+1) \in R$ присваиваем функцию $\mathcal{D}$.

Результатом применения п. 3 является программа M'.

п. 4. Функции $\varphi(i, j)$ элементов $m(i, j) \in \hat{M}'$ для $j_o \leq i \leq b$ присваиваем смежным элементам $m(i, j') \in \hat{M}' \cup R$, $j' > j$. Элементам $m(i, j_o) \in M$, $0 \leq i \leq a$, и элементу $m(a+1, j_o) \in R$ присваиваем функцию $\mathcal{D}$.

Результатом применения п. 4 является программа M'' со сторонами $(a+1)$ и $(b+1)$.

п. 5. Если обе координаты i_o, j_o совпадают с координатами некоторого отмеченного элемента $m' \in N_o$, то переход к п. I.

п. 6. Если только одна из координат j_o (или i_o) совпадает с соответствующей координатой некоторого отмеченного элемента $m' \in N_o$, то переход к п. 3 (или п. 4, в этом случае $M' = M$).

п. 7. Отмечаем элемент $m(i_o, j_o)$ и полученную программу считаем исходной, переход к п. I.

п. 8. Если множество N неотмеченных элементов пусто или значения координат i, j в п. п. 3, 4 превышают A, B, то конец.

На рис. 2 показана работа алгоритма при справедливости условия п. 2.

В результате применения алгоритма сдвига при $N = \emptyset$ мы получаем перестроенную программу, эквивалентную исходной. Если алгоритм прекратил перестройку при $N \neq \emptyset$, то перестройка программы данным алгоритмом невозможна.

ЛИТЕРАТУРА

I. Л.И. МАКАРОВ, В.А. СКОРОБОГАТОВ. Некоторые алгоритмы отображения логических сетей в вычислительные E_n- среды. —Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, Новосибирск, 1968, вып. 3.

2. Л.И. МАКАРОВ, Ю.В. МЕРЕКИН. Анализ надежности истинностных логических сетей, реализованных в вычислительной среде.—Вычислительные системы, Новосибирск, "Наука" СО, 1969, вып. 33.

3. Б.В. ГНЕДЕНКО, Ю.К. БЕЛЯЕВ, А.Д. СОЛОВЬЕВ. Математические методы в теории надежности. М., "Наука", 1965.

Поступила в редакцию
I5.XII.1969