УДК 681.142.353.
УДК 681.142. 6.

РЕАЛИЗАЦИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ ИЗ МАТРИЦ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

В.Л. Белявский

Процесс выполнения произвольных арифметических операций в арифметических устройствах вычислительной машины складывается из выполнения более простых элементарных операций.

Наиболее сложной и важной из элементарных операций является суммирование.

Под суммированием понимается [1,2] простое арифметическое сложение двух чисел, представленных одинаковой системой счисления позиционным способом с естественными весами разрядов, с одинаковыми количествами разрядов в каждом из чисел и с запятой, фиксированной в одном и том же месте.

В общем случае процесс суммирования может быть описан следующим образом: пусть имеется два n - разрядных числа, каждое из которых представлено в системе счисления с основанием m. Каждую из цифр суммы будем рассматривать как функцию от всех цифр слагаемых.

Таким образом, сумматор представляет собой схему, по определенным правилам формирующую $[n \cdot \lambda(m) + 2]$ переключательных функций от $2n\lambda(m)$ двоичных переменных, где $\lambda(m)$ - ближайшее меньшее целое к величине $\log_2 m$.

Задача об оптимальном построении сумматора, который бы гарантировал наибольшее быстродействие при минимальном количестве оборудования, не решена ни в общем, ни для какого-нибудь частного случая/конкретной системы счисления/ [2].

Реализация арифметических операций на однородных структурах достаточно подробно исследована в работах [3 - 6].

В работе [3] описан полный n - разрядный сумматор, выполняющий операции сложения и вычитания, изготовленный на интегральных схемах в виде однородной структуры типа " ромба," т.е. верхний слой сдвинут влево относительно нижнего на одну ячейку. Соответствующие связи между ячейками структуры осуществляются "жестким" способом; общие размеры структуры определяются выражением [3]

$$L_{+} = n^{2} \cdot L_{я} \quad , \tag{I.I}$$

где L_{+} - сложность структуры, выполняющей операцию сложения, $L_{я}$ - сложность ячейки структуры.

Следует заметить, что элементарной ячейкой такой структуры является многополюсник (4 x 4), реализующий следующие функции [3]:

$$\left.\begin{aligned} S &= (A \oplus B \oplus C)\mathcal{D} \oplus A\bar{\mathcal{D}}, \\ Q &= A \cdot B \vee B \cdot C \vee A \cdot C \ , \\ P &= C \ , \\ R &= B \ , \end{aligned}\right\} \tag{I.2}$$

где A , $\mathcal{D}$ - слагаемые, B , C - сомножители.

По данным [3] число компонент элементарной ячейки равно I8, т.е.

$$L_{+} = 18 \cdot n^{2} \quad . \tag{I.3}$$

Умножению двух n - разрядных чисел посвящены работы [3,5, 7]. В первых двух работах рассматривается однородная структура, каждый ярус которой производит частичное суммирование разрядов множимого, а сдвиг частичных произведений производится за счет соответствующих связей между ячейками. Исследование процесса умножения двух n - разрядных чисел в системе счисления с основанием "2" показало, что размеры однородной структуры, опи-

санной в работе [5], определяются выражением

$$L_{+} = 1,5\, n^{2} - n - 1 , \tag{I.3а}$$

при этом точность полученного результата не превышает n разрядов.

В работе [7] описана однородная структура, выполняющая операцию умножения с удвоенной точностью, причем размеры структуры имеют порядок n^{2} . К недостаткам этой структуры следует отнести большую длину связей между ячейками.

Специфика работы криотронных матриц коллективного поведения /K - матриц/ в различных режимах определяет выбор системы счисления, в которой производятся арифметические операции [8]. Запоминание информации в таких материалах осуществляется за счет специфики работы криотрона, как элемента матрицы, а не за счет построения элементарных запоминающих устройств типа триггеров.

Анализ существующих систем счисления показал, что наиболее приемлемой системой счисления при выполнении арифметических операций на структурах из K - матриц является система счисления с основанием "-2", так как получение обратных и дополнительных кодов операндов связано с дополнительными аппаратурными затратами, если реализовать арифметические операции в системе счисления с основанием " 2".

Правила работы с числами, представленными в системе счисления с основанием "-2", описаны в работе [9].

При сложении (вычитании) в системе счисления с основанием "-2" имеет место следующая последовательность появления переносов и заемов:

а) + - + - + -...+ - сложение,

б) - + - + - +...- - вычитание.

Следовательно, можно предложить два способа выполнения операций сложения и вычитания.

I. При выполнении операции "сложение" первый ярус ячеек структуры /считая сверху-вниз/ осуществляет суммирование, второй-вычитание и т.д.

При выполнении операции "вычитание" производится перестройка работы ячеек структуры таким образом, что первый ярус выполняет вычитание, второй - суммирование и т.д.

К недостаткам этого метода следует отнести, во-первых, до-

дополнительное время на перестройку ячеек при переходе от "сложения " к "вычитанию", и наоборот; во-вторых, более сложную структуру ячейки, так как она должна выполнять суммирование и вычитание i - ых разрядов операндов.

Сложность такой структуры определяется выражением:

$$L_+ = (n+2)(n+1) .$$

Свободный член 2 определяется тем, что при вычитании заема из i - го разряда операнда правильный результат получается при добавлении двух разрядов. Но поскольку в системе счисления с основанием "2" тоже требуются дополнительные 2 разряда для получения модифицированного кода числа, этот факт не является недостатком системы счисления с основанием "-2".

2. При выполнении операции "сложение" работа структуры аналогична первому способу. При выполнении операции " вычитание " производится передача кода операндов на следующий ярус структуры без преобразования, затем производится обычное "вычитание".

Недостатками данного метода являются: во-первых, дополнительное время на передачу кода; во-вторых, дополнительные аппаратурные затраты из-за пропущенного яруса структуры.

Поэтому сложность такой структуры определяется

$$L_+ = (n+2)(n+3) .$$

Структура, выполняющая указанные операции, приведена на рис. I. Для ячейки "сложение" выходные функции имеют вид:

$S_i(x_i, y_i) \sim [2,I / I,2]$ [8] ,

$P_i^{i+1}(x_i, y_i) \sim [2,I / 3]$ [8] ,

x_i, y_i - i - ые разряды операндов .

Для ячейки "вычитание" выходные функции имеют вид

$S_i(x_i, y_i) \sim [2,I / I,2]$,

$P_{i+1}^{i}(x_i, y_i) \sim [2,I / I]$.

Следовательно, сложность структуры, выполняющей операции "сложение" и "вычитание", определяется выражением

$$L_+ = 2\cdot 3\cdot (3+1)(n+1)(n+2) = 24\cdot n^2 \qquad (I.5)$$

Такая завышенная по сравнению с известными реализациями

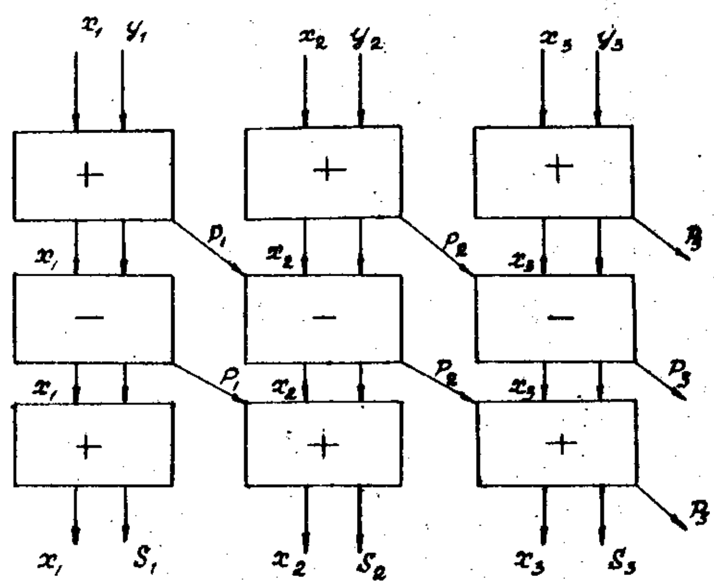

Рис.I.

оценка объясняется тем, что при выводе формулы (I.5) не учитывалась избыточность матрицы коллективного поведения, введенная как для увеличения надежности схемы, так и для расширения её логических возможностей.

Общая схема алгоритма умножения двух n - разрядных чисел имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l} x_n\ x_{n-1}\ \dots\ x_3\ x_2\ x_1 \\ \underline{y_n\ y_{n-1}\ \dots\ y_3\ y_2\ y_1} \\ z_{n,1}\ z_{n-1,1}\ \dots\ z_{31}\ z_{21}\ z_{11} \\ \quad z_{n,2}\ \dots\ z_{42}\ z_{32}\ z_{22}\ z_{12} . \\ \\ \qquad\qquad z_{n,n-2}\ z_{n-1,n-2}\ z_{n-2,n-2}\ \dots\ z_{1,n-2} \\ \qquad\qquad\quad z_{n,n-2}\ z_{n-1,n-1}\ \dots\ z_{2,n-1}\ z_{1,n-1} \\ \qquad\qquad\qquad z_{n,n}\ \dots\ z_{3,n}\ z_{2,n}\ z_{1,n} \end{array} \qquad (I.6)$$

где
$$z_{ij} = \begin{cases} x_i\,, & \text{если} \quad y_j = 1 \\ 0\,, & \text{если} \quad y_j = 0 \end{cases}\,, \qquad (I.7)$$

i, j – номера разрядов операндов.

Тогда результат операции "умножение" определяется системой булевых функций:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = z_{1n};\\
&\rho_2 = z_{2n} \oplus z_{1,n-1};\\
&\rho_3 = z_{3n} \oplus z_{2,n-1} \oplus z_{1,n-2} \oplus q_2;\\
&\vdots\\
&\rho_i = z_{i,n} \oplus z_{i-1,n-1} \oplus \ldots \oplus z_{1,n-i+1} \oplus q_{i-1};\\
&\vdots\\
&\rho_n = z_{n,n} \oplus z_{n+1,n-1} \oplus \ldots \oplus z_{11} \oplus q_{n-1};\\
&\rho_{n+1} = z_{n-1,n} \oplus z_{n+2,n-1} \oplus \ldots \oplus z_{12} \oplus q_n;\\
&\rho_{n+2} = z_{n-2,n} \oplus z_{n+3,n-1} \oplus \ldots \oplus z_{13} \oplus q_{n+1};\\
&\vdots\\
&\rho_{2n-1} = z_{1,n} \oplus q_{2n-2}.
\end{aligned} \qquad (I.8)$$

Эту форму записи можно преобразовать к следующему виду:

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{n} \rho_i^k \,(mod\, 2)\,, \qquad (I.9)$$

где ρ_i^k – значение частичной суммы i-го разряда после сложения k частичных сумм.

Частичные суммы могут быть представлены рекуррентной формулой вида:

$$\rho_i^k = \rho_i^{k+1} \oplus z_i^k \oplus q_{i-1}^{k-1}\,, \qquad (I.10)$$

где q_{i-1}^{k-1} – значение переноса или заема от (i - I) - го разряда (k - I) - й частичной суммы.

Следовательно, ячейка структуры из K - матриц, выполняющая операцию "умножение", представляет собой (4 x 3) - полюсник, функции которого определяются таблицами сложения трех слагаемых в системе счисления с основанием "-2", причем одновременное единичное значение переноса и заема является запрещенным. На рис.2 показана структура из K - матриц, выполняющая умножение двух 3-разрядных чисел в системе счисления с основанием " -2 ".

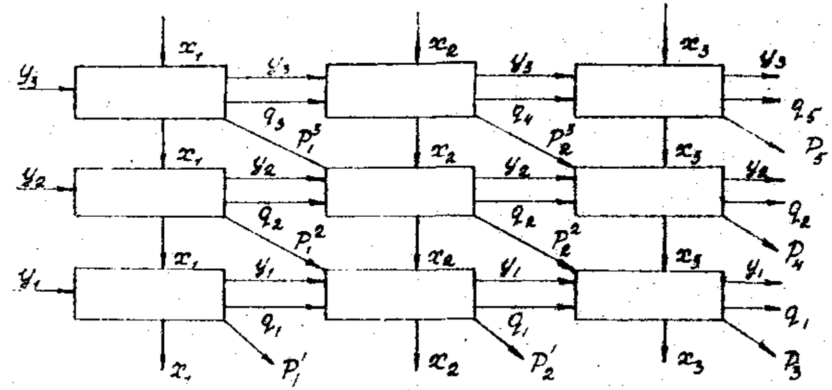

Рис. 2.

В общем случае сложность такой структуры определяется выражением

$$L_\circ = n^2 \cdot L_я\,, \qquad (I.11)$$

причем, как это следует из рис.2, точность вычислений удвоенная. Благодаря соблюдению принципа "близкодействия" длина связи между ячейками не превосходит расстояния между двумя соседними столбцами структуры, что отличает данную структуру от известной [7].

Таким образом, в работе предлагаются алгоритмы реализации арифметических операций / сложения, вычитания, умножения / в системе счисления с основанием " -2 " на однородных структурах из матриц коллективного поведения. Приведены оценки аппаратурных затрат соответствующих реализаций.

Вышеописанные алгоритмы могут быть полезны при разработке матричных процессоров, выполненных как из сверхпроводящих элементов, так и на интегральных схемах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. З.Л. РАБИНОВИЧ. Элементарные операции в вычислительных машинах, "Техника", 1966.

2. М.А. КАРЦЕВ. Арифметика цифровых машин, "Наука", 1969.

3. K.J.DEAN. Versatile multiplayer arrays. Electronics Letters, vol.4, N 16, 1968.

4. K.J.DEAN. Logical circuits for use in iterative networks. Electronics Letters, vol.4, N 5, 1968.

5. J.C.HOFFMAN. Iterative logical network. Electronics Letters, vol.4, N 9, 1968.

6. K.J.DEAN. Binary division using a data-dependent iterative array. Electronics Letters, vol.4, N 14, 1968.

7. D.P.BURTON, D.R.NOAKS. High-speed iterative multiplier. Electronics Letters, vol.4, N 13, 1968.

8. В.И. БЕЛЯВСКИЙ, В.А. ГОРБАТОВ. "Однородные структуры на ключевых матрицах / R - матрицах/", сб. "Доклады НТК МЭИ по итогам НИР за 1968 - 1969 гг., секция Автоматики, Вычислительной и измерительной техники, подсекция Теория графов", Москва, 1970.

9. De REGT. Negative radix. Part 1. Introduction in negative radix. Computer Design, N 3, 1967.

Поступила в редакцию
15.XII.1970 г.