1970 год ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 42

УДК 681.142.4

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПРИОРИТЕТНОГО ПОТОКА БОЛЬШИХ ЗАДАЧ

В.И.Константинов, Н.Н.Миренков

Рассматривается работа многомашинной однородной вычислительной системы (ОВС) в режиме потока задач. Специфика функционирования таких систем состоит в том, что каждая задача может запросить для своего решения любое число машин и обслуживание машины начинают и заканчивают группами. Задача считается большой, если ее ранг больше $\ell/2$, в противном случае она считается малой (ℓ - число машин в системе). Малые задачи предполагаются менее приоритетными и накапливающимися в большой очереди [I]. Поэтому сначала проводится аналитическое исследование работы системы в режиме потока больших задач, а затем рассматриваются действия диспетчера по реализации малых задач, использующих только свободные машины.

На ОВС из ℓ машин поступает пуассоновский поток больших задач с параметром λ. Вероятность поступления задачи с рангом k есть b_k, и $\sum_{k>\frac{\ell}{2}} b_k = 1$. Задачи обслуживаются в порядке поступления. Закон обслуживания является произвольным и своим для каждого ранга.

Момент времени, когда задача покидает систему, назовем моментом ухода. Пронумеруем их. Считаем, что $x_0=0$, а x_n $(n=1,2,\dots)$ есть время между $(n-1)$-м и n-м уходами. Пусть ξ_0 – длина очереди в момент $t=0+$, а ξ_n – длина очереди сразу же после n-го ухода. Не умаляя общности, предположим, что $t=0$ есть точка ухода. Обозначим через $Q_{ij}(x)$ вероятность перехода системы из состояния с i задачами в очереди в состояние с j задачами за время $\le X$.

$$Q_{ij}(x)=P\left\{\xi_n=j,\ \ x_n\le x/\xi_{n-1}=i\right\},\qquad i,j=0,1,2,\dots\quad (\mathrm{I})$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$Q_{0j}(x)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\int_0^x\left[1-e^{-\lambda(x-y)}\right]e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,dH_\nu(y),$$

$$Q_{1j}(x)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\int_0^x e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,dH_\nu(y),\qquad (2)$$

$$Q_{ij}(x)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\int_0^x e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}\,dH_\nu(y).$$

Здесь $H_\nu(y)$ $(\nu>\frac{\ell}{2})$ есть функция распределения времени решения задач ν-го ранга на системе. Если в подынтегральных выражениях появляются отрицательные факториалы, то соответствующие интегралы считаются равными нулю.

Исследуем п е р и о д з а н я т о с т и системы. Рассмотрим последовательности моментов времени t_k и t_k', в которые система переходит из занятого состояния в свободное и из свободного в занятое. Разность между t_k и наибольшим, не превосходящим его t_k' назовем п е р и о д о м з а н я т о с т и системы.

Пусть $G(k,n,x)$-вероятность того, что период занятости состоит, по крайней мере, из n обслуживаний, первые n обслуживаний длятся не больше x и после окончания n-го обслуживания в очереди стоит k задач. Тогда

$$G(k,1,x)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\int_0^x e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^k}{k!}\,dH_\nu(y),$$

$$G(k,n,x)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\sum_{\alpha=1}^{k+1}\int_0^x G(\alpha,n-1,x-y)\,e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^{k-\alpha+1}}{(k-\alpha+1)!}\,dH_\nu(y).\qquad (3)$$

Пусть $\Gamma(k,n,s)$ и $h_\alpha(s)$ $(\alpha>\frac{\ell}{2})$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса функций $G(k,n,x)$ и $H_\alpha(x)$ соответственно. Учитывая (3), получим

$$\Gamma(k,1,s)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\int_0^\infty e^{-y(\lambda+s)}\frac{(\lambda y)^k}{k!}\,dH_\nu(y),$$

$$\Gamma(k,n,s)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\sum_{\alpha=1}^{k+1}\Gamma(\alpha,n-1,s)\cdot\int_0^\infty e^{-(\lambda+s)y}\frac{(\lambda y)^{k-\alpha+1}}{(k-\alpha+1)!}\,dH_\nu(y).\qquad (4)$$

Введем производящие функции:

$$C(z,n,s)=\sum_{k=0}^\infty z^k\,\Gamma(k,n,s),$$

$$D(z,w,s)=\sum_{n=1}^\infty w^n C(z,n,s),\qquad (5)$$

$$E_0(w,s)=\sum_{n=1}^\infty w^n\,\Gamma(0,n,s).$$

Тогда получим:

$$\sum_{k=0}^\infty z^k\,\Gamma(k,1,s)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z),$$

$$zC(z,n,s)=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)\left[C(z,n-1,s)-\Gamma(0,n-1,s)\right].\qquad (6)$$

Аналогично:

$$zD(z,w,s)=w\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)D(z,w,s)+$$
$$+wz\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)-w\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)E_0(w,s).\qquad (7)$$

Разрешим (7) относительно $D(z,w,s)$:

$$D(z,w,s)=\Big[z-w\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\left[w \sum_{\nu=\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)\right]\cdot\left[z-E_0(w,s)\right]. \tag{8}$$

Для $Re\,S>0, |w|\le 1$ или $Re\,S\ge 0, |w|<1$ на окружности $|z|=1$ справедлива оценка [2, 3].

$$\left|w\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(s+\lambda-\lambda z)\right|<|z|=1. \tag{9}$$

По теореме Руше [4], знаменатель (8) имеет точно один корень в круге $|z|<1$. Так как функция $\mathcal{D}(z,w,s)$ аналитическая в области $|z|\le 1$, $Re\,s\ge 0$, $|w|\le 1$, то корень знаменателя $\gamma(w,s)$ будет корнем числителя; отсюда получим

$$\gamma(w,s)=E_0(w,s). \tag{10}$$

Преобразование Лапласа-Стилтьеса периода занятости есть $E_0(1,s)$. Если устремить $s\to 0+$, то получим вероятность того, что период занятости имеет конечную длительность. При этом $\gamma(w,s)$ будет стремиться к корню уравнения

$$x=\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu h_\nu(\lambda-\lambda x). \tag{11}$$

Это уравнение имеет два корня на [0,1] : один корень на [0,1), по теореме Руше, другой корень $x=1$ – проверяется непосредственно.

Пусть m_α – первый момент функции распределения $H_\alpha(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}&\gamma(1,0+)=1 \longleftrightarrow \lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1\le 0,\\ &\gamma(1,0+)<1 \longleftrightarrow \lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1>0.\end{aligned} \tag{12}$$

Докажем первое из них.

а) В одну сторону:

$$\gamma(1,0+)=1 \Longrightarrow \lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1\le 0.$$

Дифференцируя (11), получим:

$$1=\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha\int_0^\infty y\,e^{-(\lambda-\lambda x)y}\,dH_\alpha(y). \tag{13}$$

подставив сюда $x=\gamma(1,0+)=1$, имеем $1=\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha$.

б) В другую сторону:

$$\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1\le 0 \Longrightarrow \gamma(1,0+)=1.$$

По определению, $m_\alpha=\int_0^\infty y\,d H_\alpha(y)$, подставляя его в данное нам неравенство и вычитая из него (13), получим:

$$\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha\int_0^\infty y(1-e^{-(\lambda-\lambda x)y})\,dH_\alpha(y)\le 0,$$

где x – корень уравнения (11). Но $H_\alpha(y)$ – возрастающая функция и $y>0$, поэтому неравенство возможно только при $1-e^{-(\lambda-\lambda x)y}\le 0$, т.е. при $x\ge 1$. Т.к. $x\in[0,1]$ и $x\ge 1$, то $x=1=\gamma(1,0+)$. Аналогично доказывается второе утверждение. Отсюда можно сделать вывод, что если $\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1\le 0$, то период занятости с вероятностью единица имеет конечную длительность, а если $\lambda\sum_{\alpha>\frac{\ell}{2}} b_\alpha m_\alpha-1>0$, то период занятости может иметь и бесконечную длительность. Таким образом, если при работе диспетчера имеется возможность проверять указанные выше неравенства, то мы будем получать информацию о занятости системы и принимать соответствующие меры.

Пусть $Q_{ij}(x)$ определены так, как это сделано выше. Положим

$$S_n=x_1+x_2+\dots+x_n, \quad \text{тогда } Q_{ij}^{(n)}(x)=P\{\xi_n=j,\, S_n\le x/\xi_0=i\}.$$

Для переходных вероятностей, определенных таким образом, справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$Q_{ij}^{(n+1)}(x)=\int_0^x Q_{i0}^{(n)}(x-u)\int_0^u \lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu\,dH_\nu(y)\,du+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{j+1}\int_0^x Q_{i\sigma}^{(n)}(x-u)\,e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{j-\sigma+1}}{(j-\sigma+1)!}\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y\,dH_y(y). \tag{I4}$$

Взяв преобразование Лапласа-Стилтьеса, получим:

$$q_{ij}^{(n+1)}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\,q_{i0}^{(n)}(s)\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y\,dH_y(y)+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{j+1} q_{i\sigma}^{(n)}(s)\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)y}\frac{(\lambda y)^{j-\sigma+1}}{(j-\sigma+1)!}\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y\,dH_y(y). \tag{I5}$$

Положим $\sum_{\sigma=0}^{\infty} q_{i\sigma+1}^{(n)}(s)z^\sigma=U_i^{(n)}(z,s)$, тогда из (I5) имеем:

$$q_{i0}^{(n+1)}(s)+zU_i^{(n+1)}(z,s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\,q_{i0}^{(n)}(s)\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)+$$

$$+U_i^{(n)}(z,s)\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z). \tag{I6}$$

Обозначив теперь $\sum_{n=0}^{\infty} q_{i0}^{(n)}(s)w^n=W_{i0}(w,s)$, а $\sum_{n=0}^{\infty} U_i^{(n)}(z,s)w^n=U_i(z,s,w)$, получим:

$$W_{i0}(w,s)+zU_i(z,s,w)-z^{i+1}=\frac{\lambda w}{\lambda+s}W_{i0}(w,s)\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)+$$

$$+wU_i(z,s,w)\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z), \tag{I7}$$

$$U_i(z,s,w)=\left[z-w\sum b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)\right]^{-1}\Big\{z^{i+1}-W_{i0}(w,s)\times$$

$$\times\Big[1-\frac{\lambda w}{\lambda+s}\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)\Big]\Big\}. \tag{I8}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, имеем:

$$W_{i0}(w,s)\Big[1-\frac{\lambda w}{\lambda+s}\sum_{y>\ell/2} b_y h_y(s+\lambda-\lambda\gamma(w,s))\Big]=\gamma^{i+1}(w,s), \tag{I9}$$

где $\gamma(w,s)$ – корень знаменателя.

Найдем теперь производящую функцию для $q_{ij}^{(n)}(s)$. Обозначим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^j w^n q_{ij}^{(n)}(s)=\Phi_i(z,s,w). \tag{20}$$

Мы уже имеем $U_i(z,s,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^j w^n q_{ij+1}^{(n)}(s)$, но

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij+1}^{(n)}(s)z^j w^n=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j+1}^{(n)}(s)z^{j+1}w^n=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)}(s)z^j w^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} w^n q_{i0}^{(n)}(s)=\frac{1}{z}\Phi_i(z,s,w)-\frac{1}{z}W_{i0}(w,s),$$

откуда

$$\Phi_i(z,s,w)=zU_i(z,s,w)+W_{i0}(w,s). \tag{21}$$

Используя (I9), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^j w^n q_{ij}^{(n)}(s)=$$

$$=\frac{z^{i+2}+wW_{i0}(w,s)\sum_{y>\ell/2} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)\left(\frac{\lambda z}{\lambda+s}-1\right)}{z-w\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(s+\lambda-\lambda z)}, \tag{22}$$

а при $s=0+$ – производящую функцию для переходных вероятностей:

$$p_{ij}^{(n)}=P(\xi_n=j/\xi_0=i):$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^j w^n p_{ij}^{(n)}=\frac{z^{i+2}+wW_{i0}(w,0)\sum_{y>\ell/2} b_y h_y(\lambda-\lambda z)(z-1)}{z-w\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(\lambda-\lambda z)}. \tag{23}$$

Для получения стационарных вероятностей умножим (23) на $(1-w)$ и устремим w к 1, тогда:

$$\sum_{j=0} z^j \pi_j=\pi_0\,\frac{(z-1)\sum_{y>\ell/2} b_y h_y(\lambda-\lambda z)}{z-\sum_{y>\frac{\ell}{2}} b_y h_y(\lambda-\lambda z)}, \tag{24}$$

где (см. [4])

$$\pi_0=\lim_{w\to 1}(1-w)W_{0i}(w,0),\quad \pi_j=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}\forall_i\ , \qquad (25)$$

отсюда можно найти π_0, перейдя к пределу в (24) при $z\to 1$. По правилу Лопиталя получим:

$$\lim_{z\to 1}\sum_{j=0}^{\infty} z^j\pi_j=\pi_0/(1-\lambda\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu m_\nu). \qquad (26)$$

Т.к. левая часть (26) при $z\to 1$ стремится к $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$, то получаем

$$\pi_0=1-\lambda\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}} b_\nu m_\nu . \qquad (27)$$

В частности, если в качестве функций $H_\nu(y)$ взять функции $1-e^{-\mu_\nu y}$, то формула (24) примет вид:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j\pi_j=\frac{\pi_0(z-1)\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda+\mu_\nu-\lambda z}}{z-\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda-\lambda z+\mu_\nu}}\ , \qquad (28)$$

а формула (27):

$$\pi_0=1-\lambda\sum_{\nu>\frac{\ell}{2}}\frac{b_\nu}{\mu_\nu}\ . \qquad (29)$$

Используя (28), можно найти $\pi_j\ (j=1,2,\dots)$, взяв от правой части соответствующие производные в точке $z=0$. Например,

$$\pi_1=\pi_0\,\frac{1-\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda+\mu_\nu}}{\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda+\mu_\nu}}\ ;$$

$$\pi_2=\pi_0\,\frac{1-\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda+\mu_\nu}-\lambda\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{(\lambda+\mu_\nu)^2}}{\left(\sum_{\nu>\ell/2}\frac{b_\nu\mu_\nu}{\lambda+\mu_\nu}\right)^2}\ . \qquad (30)$$

Определив π_j , можно найти среднее число задач, ожидающих своего решения. Эта информация позволит изменением количества машин регулировать длину очереди в необходимых пределах.

Выше анализировалась работа системы с точки зрения больших приоритетных задач. Рассмотрим теперь р е а л и з а ц и ю м а л ы х з а д а ч . Они накапливаются в большой очереди и используют машины, свободные от приоритетного потока. Если в очереди имеются задачи всех рангов от I до $\ell/2$,то дозагрузку системы можно производить многими способами, например, при большой задаче k -го ранга на свободных машинах решать задачи $\ell-k$ ранга (либо некоторый набор задач, сумма рангов которых $\ell-k$). Заметим, что для любого числа M всегда найдется такой набор чисел из множества $\{1,2,\dots,M/2\}$, что их сумма будет равна M .

Этот подход дает высокую загрузку системы, но выбирает задачи из очереди неравномерно: все зависит от входного потока больших задач и закона их обслуживания. Поэтому рассмотрим алгоритм, который имеет тенденцию к равномерному распределению машинного времени, оставшегося от больших задач.Итак, пусть приоритетные задачи поступают по пуассоновскому закону с параметром λ , и вероятность поступления задачи с рангом k равна $b_k\ (k>\frac{\ell}{2})$, а время обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону:

$$P(\eta_k<t)=1-e^{-\mu_k t}\ , \qquad (31)$$

где $1/\mu_k$ - среднее время обслуживания задач k -го ранга.Для нашего алгоритма необходимо знать вероятность решения в системе в данный момент приоритетной задачи k -го ранга, а также среднее число машин, свободных от приоритетного потока.

Обозначим через π_{kn} стационарную вероятность того , что в системе в некоторый момент находится n приоритетных задач, причем обслуживается задача k -го ранга, а через π_0 -вероятность отсутствия приоритетных задач. Тогда они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\lambda\pi_0=\sum_{m>\frac{\ell}{2}}\pi_{m1}\mu_m\ ,$$
$$(\mu_k+\lambda)\pi_{k1}=\lambda b_k\pi_0+b_k\sum_{m>\frac{\ell}{2}}\pi_{m2}\mu_m\ . \qquad (32)$$

$$(\mu_\kappa+\lambda)\,\pi_{\kappa n}=\lambda\,\pi_{\kappa\, n-1}+b_\kappa\sum_{m>\frac{\ell}{2}}\pi_{mn}\,\mu_m\,,$$

$$\kappa=[\tfrac{\ell}{2}]+1,[\tfrac{\ell}{2}]+2,\dots,\ell,\qquad n=2,3,\dots$$

Просуммируем уравнения системы по n от I до ∞:

$$(\mu_\kappa+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{\kappa n}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{\kappa n}+b_\kappa\sum_{m>\frac{\ell}{2}}\mu_\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{\kappa n}\,. \tag{33}$$

Но $A_\kappa=\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{\kappa n}$ есть вероятность того, что в системе в данный момент решается задача κ -го ранга. Для A_κ имеем систему уравнений:

$$\mu_\kappa A_\kappa=b_\kappa\sum_{m>\frac{\ell}{2}}A_m\mu_m\,,\quad \kappa=[\tfrac{\ell}{2}]+1,[\tfrac{\ell}{2}]+2,\dots,\ell\,. \tag{34}$$

Нетрудно видеть, что эта система удовлетворяется, если $A_\kappa = \frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}\cdot c$, где c определяется из условия нормировки.

$$\sum_{\kappa>\frac{\ell}{2}}A_\kappa=c\sum_{\kappa>\frac{\ell}{2}}\frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}=1-\pi_0\,, \tag{35}$$

тогда

$$A_\kappa=\frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}\cdot\frac{1-\pi_0}{\sum_{\kappa>\frac{\ell}{2}}\frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}}\,. \tag{36}$$

Используя значение π_0 (29), получим:

$$A_\kappa=\frac{\lambda b_\kappa}{\mu_\kappa}\,,\qquad (\kappa>\tfrac{\ell}{2})\,. \tag{37}$$

Теперь легко найти среднее число машин, свободных от приоритетного потока:

$$N=\lambda\sum_{\kappa>\frac{\ell}{2}}(\ell-\kappa)\frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}+\ell\Big(1-\lambda\sum_{\kappa>\frac{\ell}{2}}\frac{b_\kappa}{\mu_\kappa}\Big). \tag{38}$$

Будем рассматривать функционирование системы в течение

некоторого отрезка времени T. Пусть число различных малых рангов $n\,(n\le\frac{\ell}{2})$, тогда задачи каждого из них "подсистему" из N машин должны использовать в течение времени T/n. Если же задачи $\ell-\kappa$ ранга решать только на свободных подсистемах для простого дополнения, то они получат время $\frac{T\lambda b_\kappa}{\mu_\kappa}$ $(\kappa>\frac{\ell}{2})$. Поэтому будем говорить, что задачи $\ell-\kappa$ ранга **имеют вероятностную возможность** использовать системное время, если

$$(\ell-\kappa)\quad\frac{T\lambda b_\kappa}{\mu_\kappa}\geqslant\frac{TN}{n}\,, \tag{39}$$

и **не имеют** – в противном случае.

Перейдем теперь непосредственно к самому алгоритму. Стратегия будет состоять в следующем. Сначала в любой ситуации происходит дозагрузка системы одной малой задачей, и делается это для каждого ранга до тех пор, пока он не использует всю или большую часть своего системного времени. Когда возникает ситуация, снова благоприятная для ранга, уже использовавшего свое время, то ему присваивается наименьший приоритет, а в дозагрузку ставится самая большая задача, помещающаяся в свободную подсистему и имеющая наибольший приоритет. Последний определяется следующим образом: если ранг использовал все свое время или его большую часть, то ему присваивается наименьший приоритет – три; если ранг не выбрал своего времени, но имеет вероятностную возможность сделать это, то ему присваивается приоритет-два; и, наконец, если ранг не выбрал своего времени и не имеет вероятностной возможности, то ему присваивается наивысший приоритет – один. Прерывание малых задач и их перезагрузка происходит по окончании больших задач. Если при выполнении большой задачи кончается время некоторого малого ранга, то происходит прерывание и перезагрузка всех задач с рангами меньше указанного.

Этот алгоритм, конечно, не всегда дает точное распределение системного времени для задач малых рангов, однако он имеет соответствующую тенденцию. Последнее было подтверждено численными экспериментами, проведенными с помощью специальной программы, моделирующей работу системы в рассмотренном режиме.

Предложенный алгоритм можно использовать при произвольном потоке больших задач, если известна статистика для величин A_k и N.

Выводы

В общем виде получены производящая функция вероятности нахождения в данный момент в системе j больших задач и неравенства, характеризующие период занятости ОВС. Для показательного закона обслуживания получены: вероятности того, что система свободна от больших задач, что в системе решается задача k -го ранга, и среднее число машин, свободных от больших задач. Предложен алгоритм диспетчирования при наличии приоритетного потока.

Все эти результаты могут быть использованы при создании операционных систем для ОВС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. МИРЕНКОВ. Решение некоторых задач, связанных с работой системного диспетчера. - Вычислительные системы. Материалы ко II-ой Всесоюзной конференции, Новосибирск,1969.
2. M.F. NEUTS. Semi-Markov Analysis of a Bulk Quene.Bull.Soc. Math. Belg.,t.XVIII, f.1, 1966, 28-42.
3. M.F. NEUTS. Bulk Quene with Poisson Input.- Annals Math. Stat., vol.38, N 3, 1967, 759-770.
4. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б.В. ШАБАТ. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.

Поступила в редакцию
17 марта 1970 г.