УДК 517.9:534.I

МЕТОД РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛЁНОЧНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО РЕЛЕ НА ЭВМ

С.И.Фадеев

Рассмотрим некоторые задачи статики плёночного электростатического реле, схематично изображенного на рис. I (картина симметрична относительно $X = \ell/2$) [I]. Здесь $Y(X)$ - уравнение цилиндрического прогиба электрода-пластинки длиной ℓ, натянутой с силой P на единицу ширины и закрепленной на концах: $Y = dY/dX = 0$ при $X = 0$ и $X = \ell$. Пластинка притягивается к неподвижным управляющим электродам $X_1 \leq X \leq \ell - X_1$ и $\ell - X_2 \leq X \leq \ell - X_1$ под действием разности потенциалов U, приложенной к управляющим электродам и пластинке. Другие обозначения имеют следующий смысл: d_K - расстояние до выступающего контактного электрода; H - расстояние до поверхности диалектрика с относительной диэлектрической постоянной ε, покрывающего управляющие электроды слоем толщиной $d_y - H$. Благодаря тому, что $d_y \ll \ell$, с большой точностью можно считать, что сила притяжения пластинки $F(X)$ на единичную площадку со стороны управляющих электродов равна

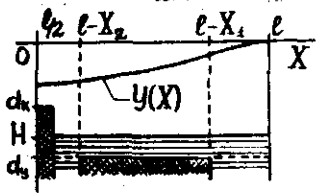

Рис. I

$$F(X) = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2}\left[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H) - Y(X)\right]^{-2},$$

где ε_0 - диэлектрическая постоянная для пустоты [I].

I. Расчет напряжения срабатывания U_*. Под U_* понимается наименьшая разность потенциалов U, начиная с которой пластинка окажется притянутой к контактному электроду. Сделаем переход к безразмерным величинам по формулам

$$x = \frac{2}{\ell}X - 1, \quad x_0 = 1 - \frac{2}{\ell}X_2, \quad x_N = 1 - \frac{2}{\ell}X_1, \tag{I}$$

$$y = Y\left[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\right]^{-1}, \quad \alpha^2 = \frac{4\mathcal{D}}{\ell^2 P}, \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0 \ell^2 U^2}{8P}\left[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\right]^{-3}$$

где $\mathcal{D}$ - цилиндрическая жесткость. При этом уравнение равновесия пластинки описывается нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна с ядром, являющимся функцией Грина соответствующей краевой задачи

$$y(x) = \sigma J(x), \quad J(x) = \int_{x_0}^{x_N} K(x, \theta; \alpha)\left[1 - y(\theta)\right]^{-2} d\theta, \quad 0 \leq x < 1. \tag{2}$$

Оказывается, что интегральное уравнение имеет два решения, если $0 < \sigma < \sigma_*$, и не имеет решения, если $\sigma > \sigma_*$ [2]. Величина σ_* и определяет U_* из последней формулы (I).

Качественные особенности (2) вполне выявляются на следующем примере. Пусть $x_N \to x_0$. В пределе имеем

$$y(x) = \sigma^{(c)}\left[1 - y(x_0)\right]^{-2} K(x, x_0), \quad \sigma^{(c)} = \sigma(x_N - x_0), \tag{3}$$

где $\sigma^{(c)}$ - сосредоточенная "нагрузка". Полагая в (3) $x = x_0$, найдем

$$\sigma^{(c)} = y(x_0)\left[1 - y(x_0)\right]^{-2} K^{-1}(x_0, x_0) \leq \sigma_*^{(c)} = \frac{4}{27} K^{-1}(x_0, x_0).$$

Нетрудно убедиться, что для каждого $\sigma^{(c)} < \sigma_*^{(c)}$ существует два значения $y(x_0)$. Обратно, для каждого $y(x_0)$, $0 < y(x_0) < 1$, решение (3) всегда существует и единственно.

Принимая во внимание вид зависимости $\sigma^{(c)}$ от $y(x_0)$ в приведенном примере, будем искать решение обратной (2) задачи, в которой задано не σ, а, например, $y_* = y(0)$, $0 < y_* < y_H = H\left[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\right]^{-1}$, причем $y(x) \leq y_*$ [2]. После исключения σ при помощи равенства (2), в котором $x = 0$, получим

$$y(x) = y_* J^{-1}(0) J(x), \quad \sigma = y_* J^{-1}(0). \tag{4}$$

Если построено решение обратной задачи, то σ , соответствующее заданному y_* , определяется вторым равенством (4).

Разобьем $[x_0, x_N]$ на N частей с точками разбиения $x_s = x_0 + sh$, $h = \frac{x_N - x_0}{N}$, $s = 0, 1, \ldots, N$.Так как из физического смысла задачи следует, что $y(x)$ монотонно убывает с ростом x от x_0 до x_N, то,очевидно, вторая формула (4) определит заниженные значения σ ,если в подынтегральном выражении заменить $y(\theta)$ на "ступенчатую" функцию $\tilde{y}(\theta)$ по правилу: $\tilde{y}(x) \equiv y(x_s) = y_s$ при $x_s \le x < x_{s+1}$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$. При этом первое равенство (4) образует систему N трансцендентных относительно y_s уравнений, которая может быть решена методом последовательных приближений. Заменив y_s на y_{s+1} , получим завышенные значения σ при заданном y_* . Таким способом строятся двусторонние оценки зависимости $\sigma(y_*)$ и тем самым двусторонние оценки σ_* . В простейшем случае, при $N = 1$, оценки σ_* имеют вид

$$\Big[\int_{x_0}^{x_N} K(x_0, \theta)\, d\theta\Big]^{-1} < \frac{27}{4}(x_N - x_0)\sigma_* < \Big[\int_{x_0}^{x_N} K(x_N, \theta)\, d\theta\Big]^{-1}. \qquad (5)$$

2. Контактное давление. Пусть высота контактного электрода удовлетворяет условию $y_H > y_k > \bar{y}_*$, где $\bar{y}_*$ соответствует σ_* , а $y_k = d_k\big[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\big]^{-1}$. Тогда при $\sigma > \sigma_*$ пластинка достигнет контактного электрода. При этом воздействие опоры на пластинку можно заменить сосредоточенной силой $\mathcal{R}$ на единицу ширины. Требуется найти $\mathcal{R}$, определяющую контактное давление, в зависимости от U и d_k .

В случае, когда пластинка опирается только на контактный электрод, уравнение равновесия может быть записано в виде

$$y(x) = \sigma J(x) + q\,K(x, 0),\quad q = \frac{\ell\mathcal{R}}{4P}\big[H + \tfrac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\big]^{-1} = K^{-1}(0,0)\,[y_k - \sigma J(0)]. \qquad (6)$$

Заменив в (6) $y(x)$ на $\tau(x)$, $\tau(x) = [y(x) - y_k K(x,0) K^{-1}(0,0)] \times$ $\times [1 - y_k K(x,0) K^{-1}(0,0)]^{-1}$, преобразуем интегральное уравнение к виду

$$\tau(x) = \sigma\, V(x),\quad V(x) = \int_{x_0}^{x_N} \Omega(x,\theta)\,[1 - \tau(\theta)]^{-2}\, d\theta, \qquad (7)$$

$$\Omega(x,\theta) = [K(x,\theta) - K(x,0)K^{-1}(0,0)K(0,\theta)]\,[1 - y_k K(x,0)K^{-1}(0,0)]^{-1} \times$$
$$\times [1 - y_k K(\theta,0)K^{-1}(0,0)]^{-2},$$

Пусть $\hat{x} = x_0 + i_0 h$ - точка, в которой $g(x_i)$ принимает наибольшее значение

$$g(x_i) = \sum_{s=0}^{N-1} Q_s(x_i),\quad Q_s(x_i) = \frac{1}{h}\int_{x_s}^{x_{s+1}} \Omega(x_i,\theta)\, d\theta.$$

Запишем обратную (7) задачу, где $\hat{\tau} = \tau(\hat{x})$ - заданное число, $0 < \hat{\tau} < 1$,

$$\tau(x) = \hat{\tau}\, V^{-1}(\hat{x})\, V(x),\quad \sigma = \hat{\tau}\, V^{-1}(\hat{x}). \qquad (8)$$

При этом, например, для нижней оценки $\sigma(\hat{\tau})$ имеем систему вида

$$\tau_i = h\sigma\Big[\sum_{s=0}^{i_*-1} Q_s(x_i)(1-\tau_{s+1})^{-2} + \sum_{s=i_*}^{N-1} Q_s(x_i)(1-\tau_s)^{-2}\Big] = h\sigma S(x_i),\quad h\sigma = \hat{\tau}\, S^{-1}(\hat{x}). \qquad (9)$$

Здесь i_* определяет положение точки $x_* = x_0 + i_* h$,в которой $\tau(x_i)$ принимает наибольшее значение (в силу определения $\Omega(x,\theta)$ максимум $\tau(x)$ на $[0,1]$ единственен). При решении (9) методом последовательных приближений на к-ой итерации отыскивается $i_* = i_*^{(k)}$ и осуществляется следующий шаг после вычисления правой части (9) при $\tau_s = \tau_s^{(k)}$, $i_* = i_*^{(k)}$; $\tau_s^{(0)} = 0$, $i_*^{(0)} = i_0$.Верхняя оценка $\sigma(\hat{\tau})$ отыскивается из решения (9), если заменить τ_{s+1} на τ_s при $s < i_*$ и τ_s на τ_{s+1} при $s \ge i_*$. В результате мы можем подсчитать оценки максимального значения σ задачи (6), равного σ_{**} , при котором решение (6) еще существует.

С ростом y_k от нуля уменьшается разность $\sigma_{**} - \sigma_* > 0$ и, начиная с некоторого $\bar{y}_k$, разность становится отрицательной. В последнем случае рассмотренное равновесие пластинки не реализуемо, то есть при $\sigma > \sigma_*$ пластинка будет опираться не только на контактный электрод, но и на поверхность диэлектрика. На рис.2 показано явление "залипания" пластинки [1]: $Y(X) \equiv H$ при $\ell - X_*^{(2)} \le X \le \ell - X_*^{(1)}$, $X_1 < X_*^{(1)} < X_*^{(2)} < X_2$. Кроме того, на границах области "залипания" выполняются условия: $dY/dX = d^3Y/dX^3 = 0$, если $\alpha > 0$, и $dY/dX = 0$, если $\alpha = 0$ [2]. Переопределенности задачи нет, так как положение границ заранее не известно.

Вид граничных условий позволяет симметрично продолжить часть рис.2 для $\ell/2 \le X \le \ell - X_*^{(2)}$ относительно $X = \ell - X_*^{(2)}$ и свести задачу к решению интегрального уравнения типа (2) с заданным значением $y(0) = y_н'$

$$y(x) = \sigma' \int\limits_0^{x_н'} K(x,\theta,\alpha')[1-y(\theta)]^{-2} d\theta\,, \quad y_н' = y_н\left(1-\frac{d_к}{H}\right)(1-y_к)^{-1}, \qquad (10)$$

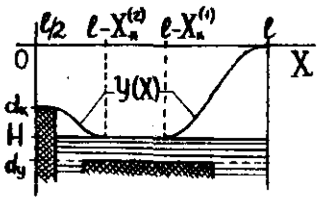

Рис. 2

где, имея в виду обозначения (I),

$$x_н' = \frac{X_2 - X_*^{(2)}}{\ell/2 - X_*^{(2)}}\,, \quad \alpha' = \alpha\,\frac{1-x_н'}{1-2X_2/\ell}\,,$$

$$\sigma' = \sigma\left(\frac{1-2X_2/\ell}{1-x_н'}\right)^2 (1-y_к)^{-3} = \Phi(y_н', \alpha', x_н').$$

Произвольный параметр $x_н'$ определяется заданием $\sigma > \sigma_{**}$ (или $\sigma > \sigma_*$, если $\sigma_{**} < \sigma_*$).

После решения (I0) реакция контакта может быть подсчитана по формуле

$$q = -(1-y_к)(1-x_н')\,\sigma' \int\limits_0^{x_н'} [1-y(\theta)]^{-2} d\theta. \qquad (II)$$

3. Влияние напряжения на контактном электроде на U_*. Пусть пластинка помимо управляющих электродов притягивается контактным электродом с силой $F_к = \frac{\varepsilon_0 U_к^2 \Delta_к}{2}[d_к - y(\ell/2)]^{-2}$, где $2\Delta_к$ – размер контакта по X. Уравнение равновесия пластинки в этом случае представимо в виде

$$y(x) = \sigma J(x) + \sigma_к (y_к - y_*)^{-2} K(x,0)\,, \quad \sigma_к = \frac{\varepsilon_0 U_к^2 \ell \Delta_к}{8P}\left[H + \frac{1}{\varepsilon}(d_y - H)\right]^{-3}. \qquad (I2)$$

Из (I2) следует, что

$$\sigma_к = (y_к - y_*)^{-2} K^{-1}(0,0)\,[y_* - \sigma J(0)]. \qquad (I3)$$

Исключим из (I2) $\sigma_к (y_к - y_*)^{-2}$ при помощи (I3) и запишем уравнение равновесия относительно $z(x)$, определенной ранее, в виде (7). Требуется лишь заменить в выражениях $z(x)$ и $\Omega(x,\theta)$ $y_к$ на y_*. Решение полученного интегрального уравнения методом, описанным в пункте 2, позволяет, в частности, найти σ_* при заданном y_* и из (I3) вычислить соответствующее $\sigma_к$. Заметим, что оценочные формулы зависимости σ_* от $\sigma_к$ и $y_к$ могут быть найдены путем замены в подынтегральном выражении (I2) $y(\theta)$ на $y(x_*)$ и $y(x_н)$, как это имело место в (5).

Таким образом, задачи статики сводятся к решению интегрального уравнения типа (6), что справедливо и для ПЭР других конструкций с цилиндрическим прогибом пластинки. Эффективность метода проверена на ряде примеров по программе, составленной Лукьяновой Р.Г. на ЭВМ БЭСМ-6.

Литература

I. ДЯТЛОВ В.Л., СОЛДАТЕНКОВ И.С. Некоторые результаты исследований плёночных электростатических реле. – Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Выпуск 5. Физико-технологические исследования. Новосибирск, "Наука" СО, I968.

2. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И., ШВЕДОВА К.В. Расчет статических параметров механической модели плёночного электростатического реле. – В сб.: Вычислительные системы, вып.40. Новосибирск, I970.