УДК 620.171.3

ИЗМЕРЕНИЕ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЁНКАХ ПО РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

М.Н.Ильин, С.И.Федеев

Измерение релаксации механических напряжений в тонких плёнках наиболее целесообразно производить косвенными методами, так как прямые измерения связаны с большими техническими трудностями [I]. Ниже рассмотрен метод определения релаксации нормального напряжения σ в плёночных образцах прямоугольной формы с двумя заделанными концами по резонансной частоте f свободных колебаний. В частности, оценено влияние эффективной изгибной жесткости $\mathfrak{D}$ образца на измеренное относительное изменение σ.

Как известно, в данном случае величина σ связана с первой резонансной частотой f по формуле

$$\sigma = 4\pi^2 \frac{\ell^2 \rho}{\lambda} f^2. \qquad (I)$$

Здесь ℓ – длина образца, ρ – плотность материала, λ – первое собственное число краевой задачи, описывающей свободные колебания пластинки. Будем характеризовать процесс релаксации величиной α

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda}\,\frac{f^2}{f_o^2}\,, \qquad (2)$$

где индексом "о" отмечены начальные значения λ, f и σ. Остановимся на погрешностях вычисления α.

Если предположить, что $\lambda/\lambda_o = I$, то относительная погрешность $\delta\alpha$ равна

$$\delta\alpha = 4\,\delta f \quad \delta\lambda. \qquad (3)$$

Резонансные частоты f и f_o могут быть измерены экспериментально с точностью 10^{-3} – 10^{-5}. К сожалению, с такой точностью величину λ определить невозможно. Была проведена серия предварительных экспериментов, которые показали, что для плёнок толщиной h не более 10 мк значение $\sqrt{\lambda}$ находилось в пределах $3.143 \leq \sqrt{\lambda} \leq 3.167$.

Естественно предположить, что в процессе эксперимента изгибная жесткость не меняется, то есть λ зависит только от β

$$\lambda = \lambda(\beta), \quad \beta^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\ell^2 h \sigma}\,, \qquad (4)$$

причем вид функции $\lambda(\beta)$ определяется способом заделки концов образца. В частности, при шарнирном закреплении концов

$$\sqrt{\lambda} = \pi\sqrt{1+\pi^2\beta^2} \qquad (5)$$

Если концы заделаны жестко, то λ есть наименьший корень трансцендентного уравнения 2

$$\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\mathrm{th}\,b\,\sin a - 2\frac{a}{b}\left(\cos a - \frac{1}{\mathrm{ch}\,b}\right) = 0,$$
$$a = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\left[(1-4\beta^2\lambda)^{1/2}-1\right]}\,, \quad b = \frac{1}{\beta}\sqrt{1+a^2\beta^2}\,. \qquad (6)$$

Решение (6) подробно исследовано в [3]. Результаты вычислений, полученные по программе, составленной для ЭВМ Лукьяновой Р.Г., приведены в таблице, $0 \leq \beta \leq 0.05$. Здесь же для сравнения даны значения $\sqrt{\lambda}$ по формуле (5), которые отмечены индексом "ж".

В качестве примера рассмотрим вычисление максимального значения погрешности $\delta\lambda$ для образца из бронзы $БрБ_2$ длиной 10 мм и толщиной не более 10 мк. Пусть наиболее вероятные значения α и σ равны: $\alpha \geq 0.9$, $\sigma \geq 20$ Кг/мм^2. При этом в "наихудшей" ситуации $\sqrt{\lambda} = 3.176$. Так как из (4) следует, что

$$\delta\sigma = 2\,\delta\beta\,. \qquad (7)$$

то в нашем случае $\delta\beta \leq 0.05$. Пользуясь таблицей, нетрудно найти, что максимальная погрешность $\delta\lambda$ равна $8.8 \cdot 10^{-4}$. Обратившись к формуле (3), видим, что влияние жесткости образца в данном случае не существенно.

Т а б л и ц а

β	$\sqrt{\lambda}$	$\sqrt{\lambda_*}$	β	$\sqrt{\lambda}$	$\sqrt{\lambda_*}$
0.000	3.I4I593	3.I4I593	0.026	3.325069	3.I52055
0.002	3.I54272	3.I4I655	0.028	3.340946	3.I53724
0.004	3.I67I79	3.I4I84I	0.030	3.357089	3.I555I5
0.006	3.I803I7	3.I42I5I	0.032	3.373499	3.I57428
0.008	3.I93688	3.I42585	0.034	3.390I80	3.I59463
0.0I0	3.207298	3.I43I43	0.036	3.407I34	3.I6I62I
0.0I2	3.22II47	3.I43824	0.038	3.424362	3.I63900
0.0I4	3.235239	3.I44630	0.040	3.44I867	3.I6630I
0.0I6	3.249578	3.I45559	0.042	3.459650	3.I68822
0.0I8	3.264I67	3.I466I2	0.044	3.4777I4	3.I7I465
0.020	3.279007	3.I47788	0.046	3.496059	3.I74228
0.022	3.294I02	3.I49087	0.048	3.5I4688	3.I80II4
0.024	3.309456	3.I504I0	0.050	3.533602	3.I80II4

Л и т е р а т у р а

I. РАБОТНОВ Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.М.,I966.

2. САУСВЕЛЛ Р.В. Введение в теорию упругости. ИЛ, I948.

3. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И., "ВЕДОВА К.В. Расчет статических параметров механической модели плёночного электростатического реле. - В сб.: Вычислительные системы, вып.40, Новосибирск, I973.