ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971 год Выпуск 47

УДК 681.326

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ НАСТРОЙКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ СТРУКТУР

А.Н.Мелихов, В.Ф.Гузик, В.П.Карелин, Б.Н.Миронов

1. В работах [1,2] рассматривались возможные варианты построения цифровых интегрирующих структур(ЦИС), состоящих из интеграторов и элементарных коммутирующих элементов(КЭ). В зависимости от расположения интеграторов и КЭ различают следующие типы структур: линейные, плоские и пространственные. Известно [1], что для реализации коммутирующей среды(КС) линейной структуры требуется меньше КЭ, чем для распространения КС плоской и тем более пространственной структуры. Из сравнения линейной и плоской ЦИС следует, что для построения КС в линейной структуре можно использовать более простые КЭ. Кроме того, настройка КЭ в линейной ЦИС на реализацию заданного соединения интеграторов значительно проще, чем в плоской, а следовательно, более простым будет устройство управления настройкой. Для линейной структуры нет необходимости отыскивать пути связи между выбранными интеграторами, что является обязательным для плоской ЦИС [3].

Задача оптимизации соединений интеграторов в линейной ЦИС заключается в сокращении числа линеек КС, необходимых для настройки линейной структуры в заданную схему. Такое сокращение возможно за счет организации на каждой линейке нескольких каналов связи между интеграторами. При этом будем иметь в виду, что выход произвольного интегратора может распространяться лишь по одной линейке КС.

Отметим, что при решении указанной задачи оптимизации попутно осуществляется также уменьшение суммарной длины каналов связи между интеграторами структуры.

В данной работе рассматривается несколько методов оптимизации схем соединений интеграторов в линейной структуре. Первые два метода приводят к минимуму числа линеек, но связаны с большим перебором. Третий является приближенным. Он основан на выполнении эвристического алгоритма, приводящего к локальному минимуму. В заключение приводится описание параметров программы эвристического алгоритма, составленной на языке ЛЯПАС.

2. Коммутацию n интеграторов в структуре можно задавать матрицей $A=\|a_{ij}\|$, $i,j\in I=\{1,2,\dots,n\}$, к которой добавляется строка и столбец, определяющие входы и выходы схемы. Матрица получается в результате совмещения программных матриц A_x и A_y, задающих коммутацию интеграторов соответственно по входам независимой переменной x и по входам подынтегральной функции y. Элемент a_{ij} матрицы A, принимающий значения x, y, $x\vee y$, указывает, на какие входы j-го интегратора поступает информация с выхода i-го интегратора. Если в матрице A каждый ненулевой элемент a_{ij} заменить единицей, то получим матрицу смежности A, которая эквивалентна графу коммутации $G=(H,F)$, где H – множество интеграторов, при этом $H=\{h_i\}, i\in I$, а F – многозначное отображение, которое задает соединения интеграторов между собой. Поэтому можно записать

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } h_j\in Fh_i,\\ 0, & \text{если } h_j\notin Fh_i.\end{cases}$$

Запишем во все диагональные элементы матрицы смежности A графа G единицы; получим матрицу A_1.

Если задана матрица коммутации интеграторов в ЦИС, то можно определить, сколько линеек КС понадобится для настройки соединений интеграторов. Считаем, что нумерация интеграторов, как и нумерация строк и столбцов матрицы A, выполнена в естественной упорядоченности. Построим матрицу A_{1M}, заполнив единицами все пустые клетки, находящиеся между крайними единичными клетками в каждой строке матрицы A_1. Подсчитаем число z_i единиц в каждом столбце с номером $i \in I$ матрицы A_{1M}. Максимальное из n полученных чисел z_i будем называть определяющим числом матрицы A и обозначать буквой R. Покажем справедливость следующего предложения.

ТЕОРЕМА I. Для настройки соединений интеграторов линейной ЦИС по матрице коммутации достаточно иметь число линеек коммутирующей среды, равное определяющему числу матрицы.

Прежде чем доказать достаточность такого количества линеек, рассмотрим порядок проводимого по матрице A_1 построения путей связи между интеграторами (порядок настройки в КС строк матрицы A).

Поскольку во всех диагональных клетках матрицы A_1 стоят единицы, то при организации путей связи обеспечивается возможность соединения выхода каждого из интеграторов с одним из его входов. На самом же деле такое соединение выполняем лишь в соответствии с матрицей A.

Построение путей связи между интеграторами ЦИС проводим следующим образом. Просматриваем первый столбец матрицы A_1. Будем настраивать в КС те строки из A_1, на которых в рассматриваемом столбце стоят единицы. По мере настройки каждой из строк обозначаем ее номером той линейки КС, на которой эта строка настроена. После настройки каждой из строк пустые клетки, стоящие между крайними единичными клетками в настроенной строке, заполним единицами. Затем во все клетки этой строки, следующие за последней единичной, поставим черту. Таким образом, в матрице будут клетки (элементы) трех видов: единичные, пустые (нулевые) и с чертой. Ясно, что для настройки строк при просмотре первого столбца матрицы понадобится число линеек, равное числу единиц z_1 в первом столбце.

Переходим к просмотру второго столбца матрицы A_1 и настраиваем в КС те $z_2 - z_1$, еще не настроенных строк, на пересечении с которыми во втором столбце стоят единицы. Нумеруем эти строки в соответствии с нумерацией линеек, на которых они настраиваются. Аналогично, как и ранее, заполняем по мере настройки клетки

строк при просмотре второго столбца понадобится z_2 линеек.

Просматриваем по порядку следующие столбцы матрицы A_1. В процессе настройки строки нужно настраивать также и на тех линейках КС, номерами которых обозначены уже настроенные ранее строки, но имеющие в пересечении с рассматриваемым столбцом клетку с чертой. Это будет соответствовать настройке нескольких строк на одной линейке КС. Если число S клеток с чертой в рассматриваемом столбце меньше, чем число k строк, которые нужно построить при просмотре данного столбца, то оставшиеся $k - S$ строк настраиваем на новых линейках КС. Эти строки нумеруем, как и ранее.

При настройке строки с номером j матрицы A_1 на той же линейке КС, где ранее была настроена другая строка i, необходимо все единицы строки j перенести на строку i и заполнить ее ранее описанным способом. Строка с номером j в A_1 после совмещения ее со строкой i зачеркивается.

Теперь нетрудно показать справедливость теоремы I. Пусть при переходе к рассмотрению i-го столбца матрицы A_1 имеем уже α настроенных в КС линеек, где $\alpha < R$, а число единиц в i-м столбце равно R, то есть максимально возможное. Если ℓ единиц из общего числа R i-го столбца стоят на пересечении с уже настроенными строками, то при просмотре i-го столбца нужно будет еще настроить $k_i = R - \ell$ строк. Число клеток с чертой (вакантных) в i-м столбце будет $s_i = \alpha - \ell$. Отсюда видно, что для настройки оставшихся k_i строк понадобится дополнительно $k_i - s_i = R - \ell - (\alpha - \ell) = R - \alpha$ линеек КС. Таким образом, общее число линеек, занятых под настройку после просмотра i-го столбца, будет R. Такое же число линеек будет занято под настройку и в том случае, если $\alpha = R$, поскольку $k_i - s_i = 0$. Теорема доказана.

На основании теоремы I можно оценить перебор при определении минимального числа линеек КС, достаточного для настройки в ЦИС одной из матриц A' среди всех $n!-1$ матриц, изоморфных A.

Очевидно, минимальное число линеек будет равно определяющему числу той матрицы $A' \sim A$, для которой это число будет наименьшим по сравнению с определяющими числами других $n!-1$ матриц. Отсюда вытекает оценка перебора, соответствующая $n!$. Каждый шаг перебора при этом соответствует подсчету определяющего числа рассматриваемой матрицы. Ясно, что такой перебор уже при относительно небольшом n выполнить затруднительно.

3. Покажем другой подход к решению задачи оптимизации числа линеек.

Для каждой строки с номером $i \in I$ матрицы A_1 выпишем номера столбцов, на пересечении с которыми в данной строке стоят единицы. Множество номеров, найденое для строки $\alpha_i = \| a_j \|$, которая содержит не менее двух единиц, будем называть блоком и обозначать буквой P_i. Очевидно, что в общем случае таких блоков может быть n.

Найдем всевозможные множества Q попарно не пересекающихся блоков P. После этого построим всевозможные множества S, содержащие в качестве элементов попарно не пересекающиеся множества Q. Все множества S пронумеруем числами натурального ряда. Нумеровать следует в порядке уменьшения в каждом из множеств Q суммы мощностей множеств Q, входящих в данное S. Очевидно, эта суммарная мощность соответствует числу блоков, входящих в S. При равной суммарной мощности двух множеств S меньший номер будет иметь то, которое содержит меньше множеств Q, то есть имеющее меньшую мощность $|S|$.

Каждое множество Q определяет некоторую (в общем случае частичную) упорядоченность t множества номеров $I = \{1,2,\ldots, n\}$. Эта упорядоченность зависит от размещения блоков P в множестве Q и образуется из элементов $i \in I$, расположенных так, что элементы одного блока $P_k \in Q$ не стоят между элементами другого блока $P_\ell \in Q$, здесь $k, \ell \in I$. В этом случае можно сказать, что упорядоченность t не нарушает блочную конструкцию Q, или, иначе, - t сохраняет конструкцию блоков $P \in Q$. Если некоторые элементы из I не входят в $P \in Q$, то в упорядоченности t эти элементы можно поставить на любое место.

Упорядочивая номера строк и столбцов матрицы A_1 в соответствии с t, получим матрицу A_1', изоморфную A_1 $(A_1' \sim A_1)$, где строки с номерами, соответствующими номерам блоков $P \in Q$, можно совместить, так как интервалы между крайними единицами в этих строках не пересекаются. Очевидно, что при настройке матрицы коммутации $A' \sim A$ в КС настройку таких строк можно выполнить на одной линейке КС.

Задача минимизации числа линеек в КС заключается в отыскании такой упорядоченности t, которая не нарушает блочную конструкцию всех множеств Q, входящих в качестве элементов в одно из множеств S. Поиск упорядоченности t проводим последовательно для всех S, начиная с S_1, до тех пор, пока для какого-то S_f такая упорядоченность не найдется. Если интеграторы в ЦИС упорядочить в соответствии с t, то очевидно, что при настройке в КС заданной коммутации понадобится наименьшее число линеек.

Пусть имеем некоторое множество S, содержащее в качестве элементов m множеств Q_ℓ, $\ell \in \{1,2,\ldots,m\}$, а каждое из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ содержит соответственно $z_1, z_2, \ldots, z_m$ элементов - блоков P. На основании вышесказанного справедлива следующая.

ТЕОРЕМА 2. Если существует упорядоченность t для элементов множества I, при которой не нарушается блочная конструкция каждого из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \in S$, то эта упорядоченность определяет такое расположение интеграторов в линейной ЦИС, что для их коммутации достаточно $w = n + m - \sum_{\ell=1}^{m} z_\ell$ линеек в коммутирующей среде.

Действительно, все z_ℓ строк интеграторов, номера которых входят в одно множество Q_ℓ, можно настроить на одной линейке. Поэтому вместо $\sum_{\ell=1}^{m} z_\ell$ линееек достаточно всего m линеек КС, что и определяет число линеек w, указанное в теореме.

Таким образом, здесь приведена основная идея второго метода оптимизации числа линеек. Разработка алгоритмов отыскания указанной упорядоченности представляет собой самостоятельную и достаточно сложную задачу, изложение которой в рамках этой статьи привести невозможно. Один из алгоритмов отыскания t публикуется авторами в сборнике трудов Таганрогского радиотехнического института ("Проблемы автоматизации средств контроля", вып. 5, 1971).

Достоинством метода является то, что одновременно определяются не только оценка минимального числа линеек и наилучшее размещение интеграторов, но и номера тех строк матрицы A (интеграторов в ЦИС), настройку которых нужно выполнять на одной линейке КС с тем, чтобы использовать минимум линеек. Эффективность метода повышается с увеличением числа единиц в матрице A_1. Поэтому если в матрице A_1 число единиц достаточно велико (примерно $\frac{1}{4}n^2$), то можно получать оптимизацию матриц такого порядка n, для которых первый метод нельзя применять из-за большого перебора.

4. Ввиду того, что процесс отыскания наилучшей упорядоченности интеграторов в ЦИС, приводящей к минимуму линеек КС, необходимых для настройки заданной коммутации интеграторов, связан с большим перебором, практический интерес представляет разработка эвристических алгоритмов, дающих достаточное приближение к оптимальному результату. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

Алгоритм выполняется на матрице A_1. В результате выполнения алгоритма получим некоторую упорядоченность t вершин графа G (интеграторов в ЦИС). Эта упорядоченность определит такой вид перестановочной матрицы $A'\sim A$, что число R для A' будет минимальным или близким к минимальному среди всех R для остальных $n!-2$ матриц, изоморфных A.

Будем искать такой вид матрицы $A_1'\sim A_1$, где в каждой строке интервалы между крайними единицами будут как можно короче. Эта задача совпадает с задачей минимизации суммарной длины каналов связи в КС при соединении интеграторов. Ясно, что при этом появляется возможность получить совмещение строк в большей степени. Иначе говоря, определяющее число такой матрицы будет если не меньшим, чем для других $n!-1$ перестановочных матриц, изоморфных A_1, то по крайней мере близким к минимальному. Таким образом, нужно найти некоторое размещение t множества H вершин графа G, которое соответствует перестановочной матрице с минимальной суммарной длиной интервалов в каждой строке этой матрицы.

Чтобы линейное размещение множества H вершин графа G удовлетворяло приведенным выше требованиям, нужно, чтобы все

вершины каждого из множеств $Ph_i=\{h_i \cup Fh_i\}$, где $Ph_i \subseteq H$, а Fh_i – подмножество вершин графа G, для которых вершина $h_i \in H, i\in I=\{1,2,\dots,n\}$, является прообразом, были бы расположены как можно ближе друг к другу. Отсюда вытекает критерий, используемый в приведенном ниже алгоритме. Этот критерий состоит в том, что в размещении рядом с данной произвольной вершиной $h_i \in H$ должны располагаться те вершины $h_j, h_r \in H$, которые с h_i имеют наибольшее общее число прообразов по сравнению с другими вершинами из H.

Введем в рассмотрение оценку $\alpha_{h_i h_j}$ "близости" двух вершин h_i и h_j. Число $\alpha_{h_i h_j}$ соответствует числу единиц в пересечении i-го и j-го столбцов матрицы A_1. На основе этой оценки установим, какую вершину h из множества $H\setminus M_1$, где $M_1=\{h_\kappa\}$, поставить в искомом размещении рядом с первой выбранной вершиной h_κ. Выбираем такую вершину h_j, для которой

$$\alpha_{h_\kappa h_j} \geqslant \alpha_{h_\kappa h_i},$$

где $i\in I\setminus\{\kappa\}$, $i\neq j$. Если достраивать размещение множества M_ℓ вершин $h\in M_\ell \subset H$, $|M_\ell|=\ell$, индексы которых образуют множество $D\subset I$, то следующей выбираем такую вершину h_r, для которой

$$\sum_{j\in D}\alpha_{h_j h_r} \geqslant \sum_{j\in D}\alpha_{h_j h_i},$$

где $r, i\in(I\setminus D)$, $i\neq r$.

После того, как вершина h_r выбрана, установим, с какой стороны уже имеющейся последовательности вершин из M_ℓ поставить h_r. Для этого рассмотрим множество M_ℓ^1 первых $[\frac{\ell}{2}]=|M_\ell^1|$ элементов последовательности вершин из M_ℓ и множество M_ℓ^2 последних $[\frac{\ell}{2}]=|M_\ell^2|$ элементов этой же последовательности. Найдем следующие оценки $S_1=\sum_{h_i\in M_\ell^1}\alpha_{h_i h_r}$ и $S_2=\sum_{h_i\in M_\ell^2}\alpha_{h_i h_r}$. Если $S_1>S_2$, то вершину h_r ставим слева от множества вершин M_ℓ, т.е. рядом с множеством M_ℓ^1. В противном случае h_r ставим справа от M_ℓ, рядом с M^2. Полученная последовательность будет иметь множество $M_{\ell+1}$ вершин, где $|M_{\ell+1}|=\ell+1$.

На основании изложенного был составлен алгоритм определения такого линейного размещения вершин графа коммутации, что для настройки последнего в КС понадобится число линеек, близкое к минимальному. Алгоритм был запрограммирован на языке ЛЯПАС. Программа позволяет оперировать с матрицами, имеющими порядок $n = 32$. Число машинных команд странслированной программы для "Минск-22" составляет $310_{(10)}$. Время решения для матриц порядка 32 составляет 3-4 сек. Некоторое усложнение программы позволит при том же способе представления информации оперировать на ЦВМ "Минск-22" с матрицами порядка $n = 200$.

Рассмотрим пример. Пусть требуется отобразить в ЦИС схему соединений интеграторов (рис.I) для вычисления коэффициентов разложения в ряд по полиномам Эрмита функции $y(x)=kx$ [4]. Коммутацию интеграторов в соответствии с заданной схемой можно представить следующей матрицей A_0, полученной путем добавления к матрице смежности A нулевых строки и столбца, определяющих входы и выходы схемы соединений.

$$A_0 = \begin{array}{c|ccccccccccccc|}
 & I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & I0 & II & I2 & 0 \\
\hline
0 & x & x & & & & & & x & x & & x & & \\
I & & y_1 & & & & & & & & & & y_1 & \\
2 & & & x & & & x & & & & & & & \\
3 & & & & x & & & & & & & & & \\
4 & & & & & y_1 & & & & & & & & \\
5 & & & & & & & & & & & & & x \\
6 & y_1 & & & & & & & & & & & & \\
7 & & & y_1 & & & & y_1 & & & & & & \\
8 & & & & y_1 & & & & & & & & & \\
9 & & & & & & & & & & x \vee y_1 & & & \\
I0 & & & & & & & x & & & & y_1 & & \\
II & & & & & & & & & & & & x & \\
I2 & y_2 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Матрицу A_1 получим, отбрасывая нулевые строку и столбец матрицы A_0 и заполняя диагональные клетки, а также все непу -

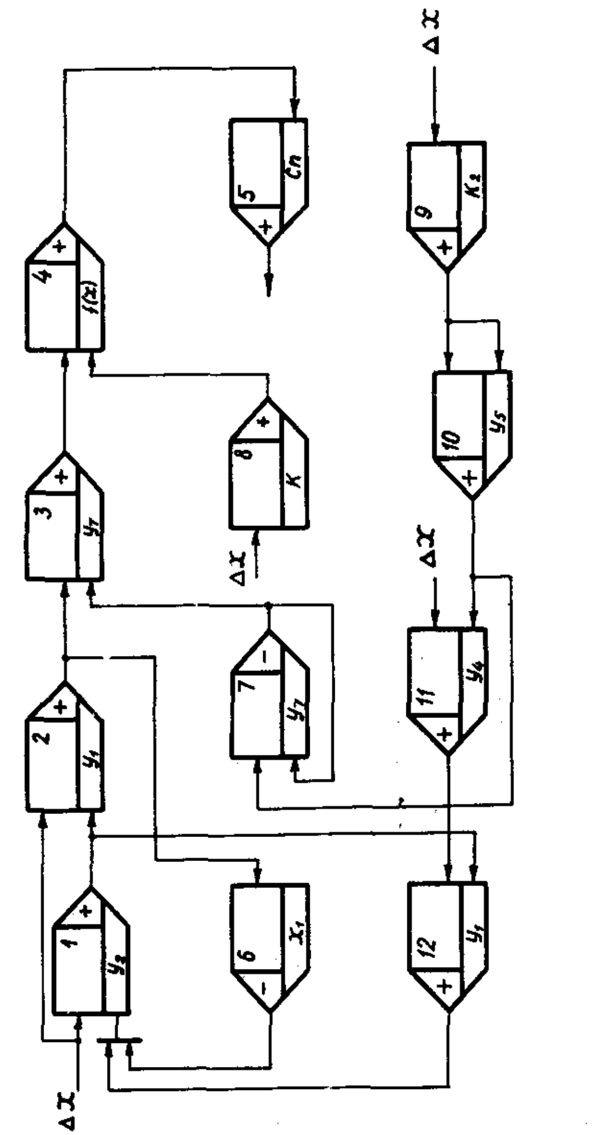

Рис. I. Схема соединения интеграторов для вычисления коэффициентов разложения в ряд функции $y(x) = kx$.

стие,единицами

$A_1 =$

	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I	I	I										
2		I	I			I						
3			I	I								
4				I	I							
5					I							
6	I					I						
7		II					I					
8				I				I				
9									I	I		
I0										I	I	
II											I	I
I2	I											I

.

Если разместить интеграторы в линейной ЦИС в порядке их нумерации, то для коммутации понадобится число линеек,соответствующее определяющему числу R матрицы A_1 . Нетрудно убедиться, что для A_1 $R = 8$.

В результате выполнения алгоритма получим следующую упорядоченность

$$t = \| \ I,I2,2,6,3,4,5,7,II,I0,8,9 \ \| \ .$$

По матрице A_1 построим перестановочную матрицу $A_1' \sim A_1$, где порядок нумерации строк и столбцов соответствует упорядоченности элементов в t .

$A_1' =$

	I	I2	2	6	3	4	5	7	II	I0	8	9
I	I	I	I									
I2		I										
2			I	I	I							
6	I			I								
3					I	I						
4						I	I					
5							I					
7								I				
II		I							I			
I0								I	I	I		
8					I						I	
9										I		I

Для полученной матрицы A_1' $R = 5$. Это говорит о том, что при размещении интеграторов в ЦИС в соответствии с упорядоченностью t для коммутации понадобится всего 5 линеек КС. Матрица $A_0' \sim A_0$ после перестановки интеграторов в соответствии с t будет иметь вид

$A_0' =$

	I	I2	2	6	3	4	5	7	II	I0	8	9	0
0	x		x						x		x	x	
I		y_1	y_1										
I2	y_2												
2				x	x								
6	y_1												
3						x							
4							y_1						
5													z
7					y_1			y_1					
II		x											
I0								x	y_1				
8						y_1							
9										$x \vee y_1$			

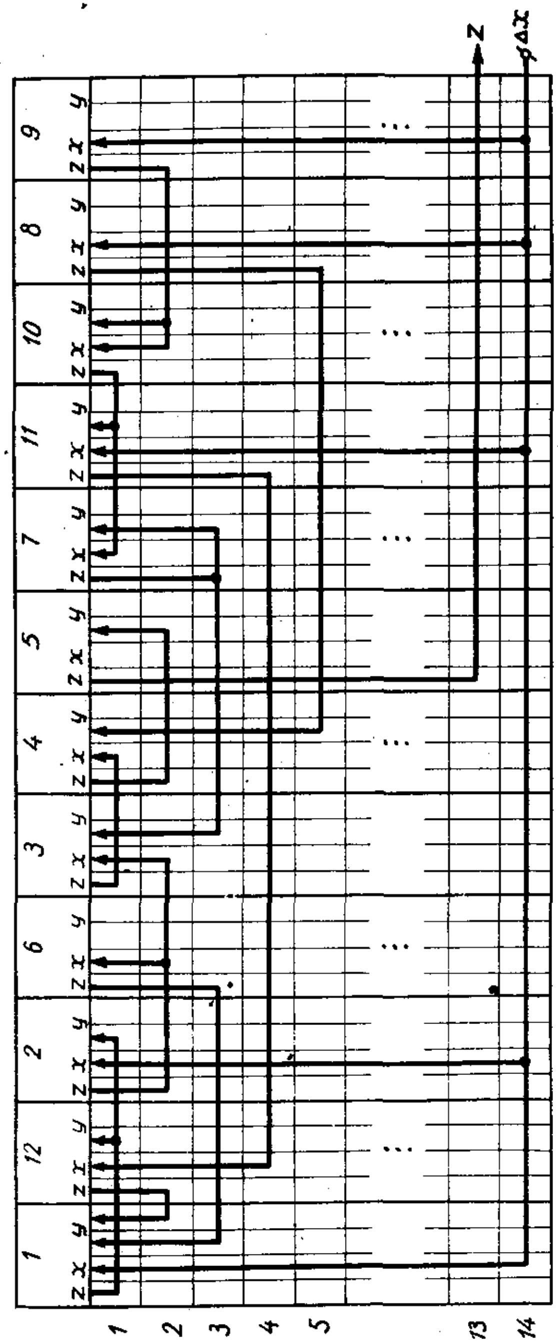

Рис. 2. Схема коммутации интеграторов в ЦИС

Произведя настройку матрицы A_0' в соответствии с порядком, изложенным при доказательстве достаточности теоремы I, получаем коммутацию интеграторов в ЦИС, приведенную на рис.2.

Литература

I. КАЛЯЕВ А.В. Теория цифровых интегрирующих машин и структур. М., "Сов.радио", 1970.

2. КАЛЯЕВ А.В., МЕЛИХОВ А.Н. и др. О коммутации цифровых интеграторов в вычислительных структурах. -"Вычислительные системы", Новосибирск, "Наука"СО, 1968, вып.2.

3. КОДАЧИГОВ В.И. О настройке и перестройке однородной цифровой интегрирующей структуры. -"Цифровые модели и интегрирующие структуры", Таганрог, 1970.

4. АВЕТИСОВ Г.Ш., СКРОЛИС И.Л., ЧЕРНУХИН Ю.В. Применение ЦИМ для разложения сигналов по ортогональным системам функций с целью получения данных для решения задачи распознавания. - "Цифровые модели и интегрирующие структуры", Таганрог, 1970.

Поступила в редакцию
16. IУ. 1971г.