ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971 год Выпуск 47

УДК 518.5

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК С ВЫДЕЛЕННЫМ КОНТЕКСТОМ

Ю.Н. Корнев, С.В. Пискунов, С.Н. Сергеев

В статье [1] были определены алгоритмы обобщенных подстановок и показана их связь с сетями автоматов.

В настоящей работе продолжается уточнение и дальнейшее исследование алгоритмов обобщенных подстановок. Для обобщенных подстановок вводится понятие контекста, обобщенные подстановки рассматриваются как отображения, определенные на множестве клеточных множеств. Далее исследуются вопросы построения более сложных алгоритмов из данных простых: композиции и условных разветвлений алгоритмов обобщенных подстановок.

В работе применяется общеупотребительная символика теории множеств, взятая из [2]. Используются также следующие определения и обозначения.

$$N=\{1,2,3,\dots\}.$$

Абелевым словом [3] называется слово, которое рассматривается независимо от порядка расположения в нем символов. Два абелева слова C_1 и C_2 равны, т.е. $C_1=C_2$, если какая-нибудь перестановка символов слова C_1 дает другое слово C_2.

§ I. Клеточные множества и их конфигурации

I. Пусть A – конечный алфавит, M – множество имен с мощностью не более чем счетной. Клеткой m, которая находится в состоянии a, называется пара $(a, m) \in A \times M$.

2. Клеточным множеством в (A, M) называется множество клеток, в котором нет ни одной пары клеток с одинаковыми именами.

Примерами клеточных множеств в $(A=\{a,b\}, M=N)$ могут быть множества $\{(a,2)\}, \{(b,1),(b,10),(a,7)\}$

3. Пусть $K(A,M)$ – множество всех конечных клеточных множеств в (A,M), $W \in K(A,M)$ и $W=\{(a_1,m_1), (a_2,m_2), \ldots, (a_k,m_k)\}$, тогда абелево слово $C_1(W) = a_1 a_2 \ldots a_k$ называется первой проекцией клеточного множества W.

4. В $K(A,M)$ определим отношение λ так, что $W_1 \lambda W_2 \equiv C_1(W_1)=C_1(W_2)$. Легко показать, что λ есть отношение эквивалентности в $K(A,M)$.

Класс из фактор-множества $K(A,M)/\lambda$ или его часть называется конфигурацией.

5. Пусть S – конфигурация и $M_1 \subseteq M$. Конфигурация S^{M_1}, состоящая из всех клеточных множеств $W \in S$ и таких, что $\rho\tau_2(W) \subseteq M_1$, называется сужением конфигурации S на M_1.

Пример: Пусть $A=\{a,b\}, M=N$ и конфигурация $S = \{W_1, W_2, W_3\}$, где $W_1=\{(a,1),(b,2)\}$, $W_2=\{(a,5),(b,1)\}$, $W_3=\{(a,8),(b,4)\}$.

Если $M_1 = \{I,2,5\}$, то $S^{M_1}=\{W_1, W_2\}$.

6. Конфигурация $S_1 \otimes S_2=\{W: W \in S_1 \times S_2 \,\&\, W \in K(A,M)\}$ называется произведением конфигураций S_1 и S_2.

§ 2. Подстановки клеточных множеств

I. Пусть W_1, W_2 и W_3–клеточные множества из $K(A,M)$ и $W_1 \cup W_2 \in K(A,M)$

формулу вида

$$W_1 * W_2 \rightarrow W_3$$

$$\text{или } W_1 \rightarrow W_3 \ (\text{когда } W_2=\phi)$$

будем называть подстановкой, W_1 – левой частью, W_2 – контекстом, W_3 – правой частью подстановки.

2. Множество подстановок, записанных в произвольном порядке, называется системой подстановок.

3. Пусть $W \in K(A,M)$ и есть система подстановок Φ, где

$$\begin{array}{ccc} W_{11} * W_{21} & \longrightarrow & W_{31}, \\ W_{12} * W_{22} & \longrightarrow & W_{32}, \\ \ldots & & \ldots \\ W_{1i} * W_{2i} & \longrightarrow & W_{3i} \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

множество $\Phi(W)=(W \setminus L) \cup R$, где

$$L = \bigcup_i \chi(W, W_{1i} \cup W_{2i}, W_{1i}),$$

$$R = \bigcup_i \chi(W, W_{1i} \cup W_{2i}, W_{3i}),$$

$$\chi(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} X_3, \text{ если } X_2 \subseteq X_1 \,\&\, X_2 \neq \phi, \\ \phi, \text{ если } X_2 \nsubseteq X_1 \vee X_2 \neq \phi, \end{cases} \quad (2.I)$$

назовем результатом применения системы подстановок Φ к клеточному множеству W.

Будем говорить, что система подстановок Φ не применима к клеточному множеству W, если $L \cup R=\phi$.

4. Заметим, что если $W \in K(A,M)$ и Φ–система подстановок, то $\Phi(W)$ не всегда будет клеточным множеством. Покажем это на простом примере. Пусть $A=\{a,b\}$, $M=N$, $W_1=\{(b,1),(a,2)\}$, $W_2 = \{(a,1),(a,2)\}$ и

$$\Phi = \begin{cases} \{(a,1)\} * \{(a,2)\} \rightarrow \{(b,2)\}, \\ \{(b,1),(a,2)\} \rightarrow \{(a,1)\}. \end{cases}$$

Вычислим $\Phi(W_1)=\{(a,1)\}$ и $\Phi(W_2)=\{(b,2)(a,2)\}$. Ясно, что $\Phi(W) \in K(A,M)$, а $\Phi(W_2) \notin K(A,M)$.

5. Пусть $S_1 \otimes S_2$ и S_3 – конфигурации и θ есть функция (в общем случае частично определенная) из $S_1 \otimes S_2$ в S_3.

Отображение $\theta: S_1 * S_2 \longrightarrow S_3$ называется **обобщенной подстановкой**.

6. Если $M_1 \subseteq M$ и $(S_1 \otimes S_2)^{M_1}$ - сужение конфигурации $S_1 \otimes S_2$ на множество M_1, то система подстановок

$$\{ W_{1i} * W_{2i} \longrightarrow W_{3i},$$

в которую входят все подстановки, удовлетворяющие свойству:

$$W_{1i} \in S_1 \ \&\ W_{2i} \in S_2 \ \&\ W_{1i} \cup W_{2i} \in (S_1 \otimes S_2)^{M_1} \ \&\ W_{3i} = \theta(W_{1i} \cup W_{2i}),$$

называется **сужением обобщенной подстановки** $\theta: S_1 * S_2 \longrightarrow S_3$ на множество M_1.

7. Множество обобщенных подстановок

$$\Phi = \{ \theta_i : S_{1i} * S_{2i} \longrightarrow S_{3i}$$

называется **системой обобщенных подстановок**.

8. Пусть $M_1 \subseteq M$ и $\Phi = \{\theta_i : S_{1i} * S_{2i} \longrightarrow S_{3i}\}$. Система подстановок Φ^{M_1}, которая содержит все сужения обобщенных подстановок из Φ, называется **сужением системы обобщенных подстановок** Φ на множество M_1.

Если множество M_1 конечно и Φ состоит из конечного числа обобщенных подстановок, то очевидно, что Φ^{M_1} содержит конечное число подстановок.

§ 3. Алгоритмы обобщенных подстановок

I. При описании алгоритмов обобщенных подстановок мы предполагаем, что:

а) существует способ вычисления функций (2.I);

б) существует способ задания конфигураций, входящих в запись алгоритма;

в) существует способ вычисления сужений конфигураций, входящих в запись алгоритма;

г) существует способ вычисления функций, входящих в запись обобщенных подстановок алгоритма.

Пункты б,в,г можно заменять следующим предложением: если Φ - некоторая конечная система обобщенных подстановок и $M_1 \subseteq M$ - конечное множество имен, то существует процедура F, которая определяет способ вычисления сужения системы подстановок Φ на множество M_1, т.е. $\Phi^{M_1} = F(M_1, \Phi)$. В работе авторов [I] рассматривался один из возможных способов определения сужения системы обобщенных подстановок на конечное множество M_1. Суть дела в следующем. Пусть $\theta: S_1 * S_2 \longrightarrow S_3$ - обобщенная подстановка $W_{1i} \cup W_{2i} \in S_1 \otimes S_2$, $W_{1i} \in S_1$, $W_{2i} \in S_2$, $W_{3i} \in S_3$, $\theta(W_{1i} \cup W_{2i}) = W_{3i}$ и при этом

$$W_{1i} = \{(a_1, m^1_{1i}), \dots, (a_k, m^1_{ki})\},$$
$$W_{2i} = \{(c_1, m^2_{1i}), \dots, (c_\tau, m^2_{\tau i})\},$$
$$W_{3i} = \{(b_1, m^3_{1i}), \dots, (b_t, m^3_{ti})\},$$

где i принадлежит некоторому множеству параметров $\mathcal{N}$.

Определим $k+\tau+t$ именующих функций из $\mathcal{N}$ в M:

$$\varphi^1_1, \dots, \varphi^1_k, \varphi^2_1, \dots, \varphi^2_\tau, \varphi^3_1, \dots, \varphi^3_t$$

и так, что

$$\varphi^1_\alpha(i) = m^1_{\alpha i}, \ \alpha = 1, 2, \dots, k,$$
$$\varphi^2_\beta(i) = m^2_{\beta i}, \ \beta = 1, 2, \dots, \tau,$$
$$\varphi^3_\gamma(i) = m^3_{\gamma i}, \ \gamma = 1, 2, \dots, t.$$

Будем говорить, что формула вида

$$\{(a_1, \varphi^1_1), \dots, (a_k, \varphi^1_k)\} * \{(c_1, \varphi^2_1), \dots, (c_\tau, \varphi^2_\tau)\} \longrightarrow \{(b_1, \varphi^3_1), \dots, (b_t, \varphi^3_t)\}$$

называется **обобщенной подстановкой в параметрическом виде**.

Если все обобщенные подстановки некоторой системы Φ записаны в параметрическом виде, то вычислимость процедуры F сужения системы Φ на конечное множество M_1 эквивалентна вычислимости всех именующих функций, входящих в запись системы, и обратных функций для некоторых из этих именующих функций (но не для всех). В работе [I] показана возможность такого выбора вычислимых именующих функций.

Заметим, что существование способа вычисления функции (2.I) следует из конечности множеств -значений переменных X_1, X_2, X_3.

2. Алгоритмом обобщенных подстановок в (A,M) называется система обобщенных подстановок

$$\Phi = \begin{cases} \theta_1 : S_{11} * S_{21} \longrightarrow S_{31} \\ \theta_2 : S_{12} * S_{22} \longrightarrow S_{32} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \theta_n : S_{1n} * S_{2n} \longrightarrow S_{3n} \end{cases}.$$

3. Выполнение алгоритма Φ по преобразованию данного клеточного множества W из $K(A,M)$ определяется как следующий итерационный процесс.

Пусть j - счетчик итераций, W_{j-1} - промежуточный результат переработки слова W, полученный после j-1 итерации, $W_0 = W$, тогда j - я итерация определяется так:

а) вычисляется $M_j = pr_2(W_{j-1})$;

б) вычисляется сужение системы Φ на множество M_j:

$$\Phi^{M_j} = F(M_j, \Phi);$$

в) проверяется применимость системы Φ^{M_j} к клеточному множеству W_{j-1}, если Φ^{M_j} не применима к W_{j-1}, то процесс выполнения алгоритма Φ заканчивается и результат есть $\Phi(W) = W_{j-1}$; иначе

г) вычисляется $\Phi^{M_j}(W_{j-1}) = W_j$;

д) проверяется отношение $W_j \in K(A,M)$, если оно истинно, то выполняется следующая итерация, иначе процесс вычисления заканчивается и результат считается неопределенным.

§ 4. Примеры алгоритмов

I. Пусть $A = \{a,b,c\}$, $M = N$, $\mathcal{H} = N$, $\varphi_1 = i$; $\varphi_2 = i+1$, $\varphi_3 = i+2$,

$$\Phi = \begin{cases} \{(a,\varphi_1)\} * \{(b,\varphi_2)\} \longrightarrow \{(a,\varphi_3)\}, \\ \{(a,5)\} * \{(b,6)\} \longrightarrow \{(c,5)\}, \end{cases}$$

и дано исходное клеточное множество

$$W = \{(b,2),(a,3),(b,4),(b,6)\}.$$

Вычислим $\Phi(W)$.

Итерация I.

$$W_0 = W, \; M_1 = pr_2 \; W_0 = \{2,3,4,6\}.$$

Сужение Φ на M_1 есть

$$\Phi^{M_1} = \begin{cases} \{(a,2)\} * \{(b,3)\} \longrightarrow \{(a,4)\}; \\ \{(a,3)\} * \{(b,4)\} \longrightarrow \{(a,5)\}; \end{cases}$$

$$L = \{(a,3)\}; \; R = \{(a,5)\}; \; L \cup R \neq \emptyset;$$

$$W_1 = (W_0 \setminus L) \cup R = \{(b,2),(b,4),(a,5),(b,6)\}, \; W_1 \in K(A,M).$$

Итерация 2.

$$M_2 = pr_2(W_1) = \{2,4,5,6\}.$$

$$\Phi^{M_2} = \begin{cases} \{(a,4)\} * \{(b,5)\} \longrightarrow \{(a,6)\}; \\ \{(a,5)\} * \{(b,6)\} \longrightarrow \{(a,7)\}; \\ \{(a,5)\} * \{(b,6)\} \longrightarrow \{(c,5)\}; \end{cases}$$

$$L = \{(a,5)\}; \; R = \{(c,5),(a,7)\}, \; R \cup L \neq \emptyset;$$

$$W_2 = (W_1 \setminus L) \cup R = \{(b,2),(b,4),(c,5),(b,6),(a,7)\}, \; W_2 \in K(A,M).$$

Итерация 3.

$$M_3 = pr_2 \; W_2 = \{2,4,5,6,7\}.$$

$$\Phi^{M_3} = \begin{cases} \{(a,4)\} * \{(b,5)\} \longrightarrow \{(a,6)\}; \\ \{(a,5)\} * \{(b,6)\} \longrightarrow \{(a,7)\}; \\ \{(a,6)\} * \{(b,7)\} \longrightarrow \{(a,8)\}; \\ \{(a,5)\} * \{(b,6)\} \longrightarrow \{(c,5)\}; \end{cases}$$

так как $L \cup R \neq \emptyset$, то $\Phi(W) = W_2$.

2. Пусть $\mathcal{H} = M$, $M = N^r$, $m \in M$, $m = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ и

$$\varphi_0(m) = m,$$

$$\varphi_1(m) = (s_1 - 1, s_2, \dots, s_r),$$

$$\varphi_2(m) = (s_1, s_2 - 1, \dots, s_r),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_r(m) = (s_1, s_2, \dots, s_r - 1),$$
$$\varphi_{r+1}(m) = (s_1 + 1, s_2, \dots, s_r),$$
$$\varphi_{r+2}(m) = (s_1, s_2 + 1, \dots, s_r),$$
$$\dots$$
$$\varphi_{2r}(m) = (s_1, s_2, \dots, s_r + 1).$$

Подстановку, имеющую вид:

$$\Pi: \{(a_0, \varphi_0)\} * \{(a_1, \varphi_1), (a_2, \varphi_2), \dots, (a_{2r}, \varphi_{2r})\} \longrightarrow \{(b_0, \varphi_0)\},$$

назовем подстановкой Неймана-Черча, а алгоритм, определенный системой таких подстановок, назовем алгоритмом Неймана-Черча.

Конкретные примеры алгоритмов Неймана-Черча обычно рассматриваются как правила работы итеративных сетей (см., например, [4]).

§5. Вопросы построения алгоритмов обобщенных подстановок

1. Как и прежде, запись $K(A,M)$ обозначает множество всех конечных клеточных множеств в (A,M). Пусть m_1 — такое имя, что $m_1 \bar{\in} M$, и B, E — два символа не из A. Рассмотрим вопросы построения алгоритмов обобщенных подстановок, перерабатывающих каждое клеточное множество из $\{(B, m_1)\} \times K(A,M)$ в клеточное множество из $\{(E, m_1)\} \times K(A,M)$. Такая постановка вопроса позволяет экономить при построении алгоритмов количество символов, необходимого для расширения алфавитов. С другой стороны, как будет доказано в теореме I, такое "обрамление" клеточных множеств из $K(A,M)$ не приводит к сужению рассматриваемого класса алгоритмов.

В этой части работы будем говорить "алгоритм" вместо "алгоритм обобщенных подстановок" и сочетанием $\Psi(A,M)$ обозначим множество всех алгоритмов в (A,M).

2. Пусть Φ_1 и Φ_2 — два алгоритма в (A,M). Композицией алгоритмов Φ_1 и Φ_2 называется

такой алгоритм $\Phi_1 \circ \Phi_2$, что $\Phi_1 \circ \Phi_2(W) = \Phi_2(\Phi_1(W))$.

3. Однотактным алгоритмом называется алгоритм, который при переработке любого слова W из $K(A,M)$ заканчивает свою работу на первой или второй итерации.

4. Пусть $\Phi \in \Psi(A,M)$. Однотактный алгоритм Φ^1, который на первой итерации переработки слова W перерабатывает W так же, как и Φ, называется однотактным срезом алгоритма Φ.

5. Пусть W — некоторое клеточное множество. Будем говорить, что алгоритм Φ не применим к W, если сужение Φ на $pr_2 W$ не применимо к W.

6. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ несколько алгоритмов. Объединением этих алгоритмов назовем алгоритм Φ, который записан в виде объединения систем подстановок $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, при этом будем писать, что

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_k . \end{cases}$$

7. Пусть есть $\Phi = \{\theta_i : S_{1i} * S_{2i} \to S_{3i}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\Phi \in \Psi(A,M);\quad A_1 = A \cup A_2,\quad A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_1'\},$$

$$M_1 = M \cup M_2,\quad M_2 = \{m_1, m_2\} \text{ и } M_2 \cap M = \phi .$$

Рассмотрим алгоритм в (A_1, M_1), определенный системой:

$$[\Phi, a_1, a_2, a_3] = \begin{cases} \theta_i' : S_{1i}' * S_{2i}' \longrightarrow S_{3i}',\ i = 1, 2, \dots, n, \\ \Pi_1 : \{(a_1, m_2)\} \longrightarrow \{(a_1', m_2)\}, \\ \Pi_2 : \{(a_1', m_1), (a_1', m_2)\} \to \{(a_2, m_1), (a_2, m_2)\}, \\ \Pi_3 : \{(a_1, m_1), (a_1', m_2)\} \to \{(a_3, m_1), (a_3, m_2)\}, \end{cases}$$

где

$$S_{1i}' = S_{1i} \times \{(a_1, m_1)\},$$
$$S_{2i}' = S_{2i} \times \{(a_1, m_2)\},$$
$$S_{3i}' = S_{3i} \times \{(a_1, m_1)\}$$

и θ_i' — такая функция $S_{1i}' \otimes S_{2i}'$ в S_{3i}', что каждый раз, когда

$$W_1 \in S_{1i}\,,\ W_2 \in S_{2i}\,,\ W_1 \cup W_2 \in S_{1i} \otimes S_{2i} \text{ и } \theta(W_1 \cup W_2) = W_3\,,$$

всегда

$$\theta_i'(W_1 \cup W_2 \cup \{(a_1, m_1) \cup (a_2, m_2)\}) = W_3 \cup \{(a_1', m_1)\}$$

При преобразовании некоторого слова $W_1 = W \cup \{(a_1, m_1), (a_1, m_1)\}$, где $W \in K(A,M)$, возможны следующие варианты.

а) Алгоритм Φ не применим к W. В этом случае на первой итерации в системе $[\Phi, a_1, a_2, a_3]$ сработает подстановка Π_1, на второй – подстановка Π_3, и на этом переработка слова W' закончится с результатом

$$[\Phi, a_1, a_2, a_3]\ (W_1) = W \cup \{(a_3, m_1), (a_3, m_2)\}.$$

б) Алгоритм Φ применим к W_1 и $\Phi'(W_1) = W_2$, где Φ' – однотактный срез алгоритма Φ. В этом случае

$$[\Phi, a_1, a_2, a_3](W_1) = W_2 \cup \{(a_2, m_1), (a_2, m_2)\}.$$

8. Пусть $A_1 = \{a, b\}$ и $M_1 = \{m_1, m_2\}$. Буквой H обозначим подстановку

$$H : \{(B, m_1)\} \to \{(a, m_1), (a, m_2)\}\,,$$

а буквой K – подстановку

$$K : \{(b, m_1), (b, m_2)\} \to \{(E, m_1)\}.$$

9. Нижеследующие теоремы доказываются непосредственным построением алгоритмов и проверкой их работы.

ТЕОРЕМА 1. Для каждого алгоритма Φ из $\Psi(A,M)$ можно всегда построить такой алгоритм Φ_1 в (A_1, M_1), где

$$A_1 = A \cup \{B, a, a', b, E\}\,,$$

что если $\Phi(W) = W_1$, то $\Phi_1(\{(B, m_1)\} \cup W) = \{(E, m_1)\} \cup W_1$.

Доказательство дает алгоритм

$$\Phi_1 = \begin{cases} H \\ [\Phi, a, a, b] \\ K \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. (Композиция алгоритмов). Пусть Φ_1 и Φ_2 — алгоритмы в (A,M),

$$A_1 = A \cup \{B, a, a', a_1, a_1', b, E\}\,,\quad M_1 = M \cup \{m_1, m_2\}$$

и m_1, m_2 не принадлежат M.

Всегда можно построить такой алгоритм Φ_3 в (A,M), что если $W_1 = \Phi_2(\Phi_1(W))$, то $\Phi_3(\{(B, m_1)\} \cup W) = \{(E, m)\} \cup W_1$.

Доказательство дает алгоритм

$$\Phi_3 = \begin{cases} H \\ [\Phi_1, a, a, a_1] \\ [\Phi_2\ a_1, a_1, b] \\ K \end{cases}.$$

ТЕОРЕМА 3. (Условное разветвление алгоритмов). Пусть Φ_1, Φ_2, Φ_3 — алгоритмы в (A,M),

$$A_1 = A \cup \{B, a, a', a_1, a_1', a_2, a_2', b, E\}\,,$$

$$M_1 = M \cup M_2\,,\ \text{где}\ M_2 = \{m_1, m_2\}\ \text{и}\ M_2 \cap M \neq \varnothing.$$

Всегда можно построить такой алгоритм Φ_4 в (A_1, M_1), что:

а) если Φ_1 не применим к клеточному множеству W и $\Phi_2(W) = W_1$, то

$$\Phi_4(\{(B, m_1)\} \cup W) = \{(E, m_1)\} \cup W_1\,;$$

б) если Φ применим к W и Φ_1' – однотактный срез алгоритма Φ_1 и $\Phi_1' \circ \Phi_3(W) = W_1$, то $\Phi_4(\{(B_1, m_1)\} \cup W) = \{(E, m_1)\} \cup W_1$.

Доказательство дает алгоритм

$$\Phi_4 = \begin{cases} H \\ [\Phi_1, a, a_1, a_2] \\ [\Phi_2, a_1, a_1, b] \\ [\Phi_3, a_2, a_2, b] \\ K \end{cases}$$

§6. Примеры алгоритмов, иллюстрирующие примеры композиции

I. **Алгоритм сложения многих двоичных чисел.** Пусть
$A=\{0,1\}$; $M=N\times N$; $A_1=A\cup\{a, a_1, a_2, b, a', a_1', a_2', E\}$; $M_1=M\cup\{m_1, m_2\}$; $i, j\in N$;
$\varphi_1(i,j)=(i,j)$, $\varphi_2(i,j)=(i,j+1)$, $\varphi_3(i,j)=(i+1,j)$,
$\varphi_4(i,j)=(i,j-1)$.

Будем интерпретировать (A, M) как целочисленную двумерную таблицу T, в узлах которой записаны символы из алфавита A. Для удобства выберем левую систему координат с абсциссой i и ординатой j. В качестве клеточных множеств, перерабатываемых алгоритмом, рассматриваются всевозможные конечные подтаблицы таблицы T с началом координат в точке (I,I) вид которых приведен на рис. I.

$$(\dot{n+m}, m+1)\ \cdots\ (n, \dot{m}+1)\ \cdots\ (2, \dot{m}+1)\quad (1, \dot{m}+1)$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$(n+1, \dot{2})\ (\dot{n}, 2)\ \cdots\ (2, \dot{2})\qquad (1, \dot{2})$$
$$(\dot{n}, 1)\ \cdots\ (2, \dot{1})\qquad (1, \dot{1})$$

Рис. I.

В строках подтаблиц с $j=2,\dots,m+1$ расположены n-разрядные двоичные слагаемые, младшие разряды которых записаны в столбце с $i=$ I. Во всех свободных узлах подтаблицы записан символ 0.

Обозначим буквой Φ_1 подстановку
$$\{(1,\varphi_1), (0,\varphi_2)\}\to\{(0,\varphi_1), (1,\varphi_2)\},$$
буквой Φ_2 подстановку
$$\{(1,\varphi_1), (1,\varphi_2), (0,\varphi_3)\}*\{(0,\varphi_4)\}\to\{(0,\varphi_1), (0,\varphi_2), (0,\varphi_3)\}.$$
Тогда алгоритм сложения многих чисел имеет вид:

$$\overset{H}{[\Phi_1, a, a, a_1]}$$

$$[\Phi_2, a_1, a_2, b]$$
$$\underset{K}{[\Phi_2, a_2, a_2, a]}$$

2. **Алгоритм умножения двух двоичных чисел.** Этот алгоритм основан на алгоритме сложения многих чисел.

Пусть $A=\{0,1\}$; $M=N\times N\cup\tau_1\times N\cup\tau_2\times N$;
$A_1=A\cup\{a, a_1, a_2, a_3, b, a', a_1', a_2', a_3', E\}$; $M_1=M\cup\{m_1, m_2\}$; $i, j\in N$; $\varphi_1(i,j)=(i,j)$, $\varphi_2(i,j)=(i,j+1)$,
$\varphi_3(i,j)=(i+1,j)$, $\varphi_4(i,j)=(i,j-1)$, $\varphi_5(i,j)=(i+j-2,j)$;
$\varphi_6(i)=(\tau_1, i)$, $\varphi_7(j)=(\tau_2, j)$.

Будем интерпретировать (A, M) как объект, состоящий из трех частей: целочисленной двумерной таблицы T и двух одномерных таблиц R_1 и R_2. В узлах этих таблиц записаны символы из алфавита A. В качестве клеточных множеств, перерабатываемых алгоритмом, рассматриваются конечные объекты вида:

$$(n+\dot{m}+1, m+1)\ \cdots\ (n+1, m+1)\ \cdots\ (2, \dot{m}+1)\ (1, \dot{m}+1)\ (\dot{\tau}_2, m+1)$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$(n+\dot{2}, 2)\ (\dot{n}+1, 2)\ \cdots\ (2, \dot{2})\quad (1, \dot{2})\quad (\dot{\tau}_2, 2)$$
$$(n+\dot{1}, 1)\ \cdots\ (2, \dot{1})\quad (1, \dot{1})$$
$$(\tau_1, \dot{n})\ \cdots\ (\dot{\tau}_1, 2)\quad (\dot{\tau}_1, 1)\qquad \overset{\longleftarrow}{i}\ \ \uparrow j$$

Рис. 2.

В узлах подтаблицы T в исходном состоянии записан символ 0. В узлы $(\tau_1, n),\dots,(\tau_1,$ I) подтаблицы R_1 записаны разряды n-разрядного множителя (в $(\tau_1, 2)$ записан младший разряд), в узлы $(\tau_2, 2),\dots,(\tau_2, m+1)$ подтаблицы R_2 записаны разряды m-разрядного множителя (в $(\tau_2, 2)$ записан младший разряд).

Пусть буквой Φ_0 обозначена подстановка
$$\{(0,\varphi_5)\}*\{(1,\varphi_6), (1,\varphi_7)\}\to\{(1,\varphi_5)\}.$$
Буквами Φ_1, Φ_2 обозначены те же подстановки, что и в примере I. Тогда алгоритм умножения двух чисел имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&[\Phi_0,\ a,\ \overset{H}{a_1},\ a_1] \\
&[\Phi_1,\ a_1,\ a_1,\ a_2] \\
&[\Phi_2,\ a_2,\ a_3,\ b] \\
&[\Phi_2,\ \underset{K}{a_3},\ a_3,\ a_1]
\end{aligned}
$$

Литература

1. КОРНЕВ Ю.Н., ПИСКУНОВ С.В., СЕРГЕЕВ С.Н. Алгоритмы обобщенных подстановок и вопросы их интерпретации.-Семинар "Теоретическая кибернетика", Киев, 1970, вып.4.

2. БУРБАКИ Н. "Теория множеств", "Мир", 1965.

3. БЕРЖ К. "Теория графов и ее применение", М., ИЛ, 1962.

4. ЛЕВЕНШТЕЙН В.И. Об одном методе решения задачи синхронизации цепи автоматов за минимальное время. -"Проблемы передачи информации", т.I, 1965, вып.4.

Поступила в редакцию
20.IV.1971 г.