

УДК 518.5:681.142.001.2:621.382.32

АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ЦЕПИ ЛОГИЧЕСКИХ ИНВЕРТОРОВ С ПРОСТОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ

Е.И.Беляев, В.К.Королев

Рассматривается передача сигнала в цепи логических инверторов с положительной корреляцией параметров. Предлагается метод машинного расчета, сложность и точность которого не зависят от длины цепи.

§ 1. Условия работоспособности цепи

1. В монолитном интегральном блоке физическое расположение конкретных элементов остается фиксированным в течение всего срока службы (перестановка и взаимозамена невозможна). Кроме того, для интегрального исполнения характерна положительная корреляция одноименных параметров соседних однофункциональных схем. Учет этих факторов в проектировании позволяет снизить требования к технологии производства изделий и, следовательно, их себестоимость, однако соответствующие методы расчета разработаны весьма мало.

Целью настоящей работы является определение условий работоспособности бесконечной цепи логических инверторов с учетом изложенных обстоятельств.

Известно [1,2], что основным функциональным требованием к такой цепи является способность передачи двоично-квантован-

ного сигнала без затухания через n каскадов для сколь угодно большого n . Аналитически это выражается в виде системы $2n$ нелинейных неравенств:

$$\begin{aligned} x_{2k} > M_1, \quad x_{2k+1} < M_0 \quad \text{при} \quad x_0 > M_1, \\ x_{2k} < M_0, \quad x_{2k+1} > M_1 \quad \text{при} \quad x_0 < M_0, \end{aligned} \quad (1)$$

для некоторых уровней M_0 и M_1 и для $k=0 \div \frac{n}{2}$, причем x_0 - входной сигнал первого элемента, x_i - выходной сигнал элемента i с начала блока (рис.1).

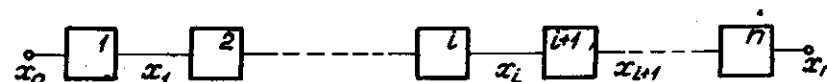


Рис. 1.

Графически условия (1) выражаются в том, что пересечение семейства статических характеристик элементов

$$y = f(x, \alpha) \quad (2)$$

с семейством обратных характеристик

$$x = \varphi(y, \alpha), \quad (3)$$

(где α - вектор-параметр элемента) представляет собой три непересекающиеся области (рис.2,а). Работоспособность цепи при

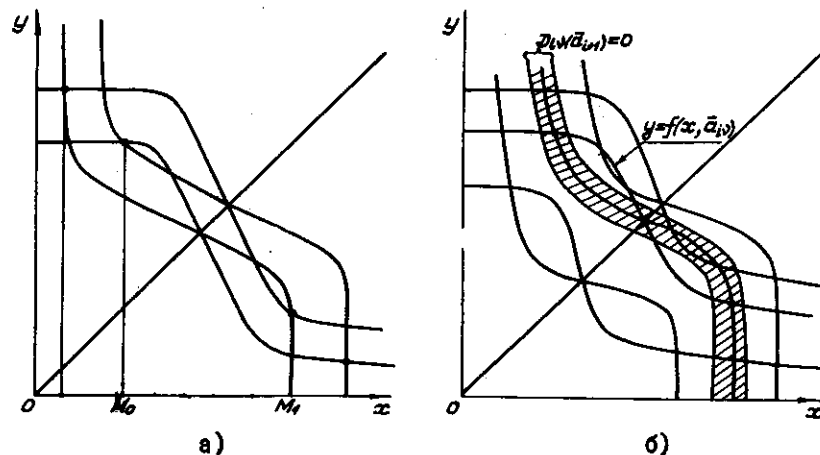


Рис. 2

этом не зависит от наличия или отсутствия корреляции параметров.

2. Пусть вектор-параметр распределен в некоторой области

$$D(a) \leq 0.$$

Рассмотрим цепь, в которой параметры смежных элементов коррелированы. Ограничимся простой, или односвязной, стационарной корреляцией: при этом каждому значению $a_{i,j}$ вектор-параметра a_i в элементе i соответствует условная область

$$D_{i,j}(a_{i+1}) \leq 0$$

значений вектор-параметра a_{i+1} в соседнем элементе $i+1$, вообще говоря, отличная от всей области $D(a) \leq 0$ и не зависящая от номера i .

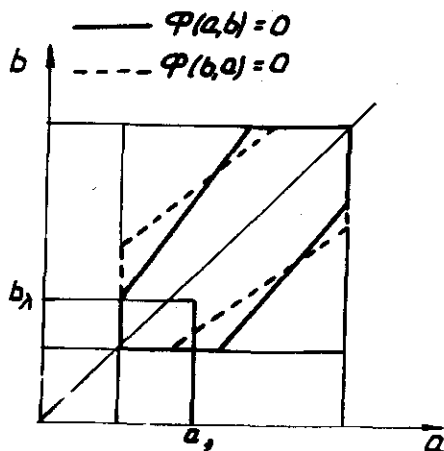


Рис. 3

образуют изолированных замкнутых множеств, как на рис. 2, а, и при отсутствии корреляции цепь была бы неработоспособна.

Нас интересуют условия, при которых корреляция описанными свойствами создает в такой цепи работоспособность.

Естественно, что задача имеет смысл лишь для усеченных

распределений всех параметров.

3. Введем обозначения:

$$a_i = a, \quad a_{i+1} = b;$$

совместную область фактических значений a и b , определяемую технологией производства, обозначим

$$P(a, b) \leq 0. \quad (4)$$

Согласно вышеизложенному, она, вообще говоря, отлична от простого пересечения областей $D(a)D(b)$. Пересечение области (4) с обратной ей

$$P(b, a) \leq 0 \quad (5)$$

определяет такую область значений параметров a, b , что для каждой точки (a, b) этой области и для любого $n > 0$ существует отличная от нуля вероятность получения в нашей цепи (рис. 1) непрерывной серии $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ длиною n звеньев.

Принципиальный вид областей (4) и (5) для одномерных векторов a и b проиллюстрирован на рис. 3.

Следовательно, точки пересечения характеристики

$$y = f(x, a), \quad (6)$$

$$x = \varphi(y, b) \quad (7)$$

для всех $(\bar{a}, \bar{b})$, удовлетворяющих обоим условиям (4), (5), являются точками равновесия цепи (рис. 1).

Очевидно, что уравнения (6), (7) ставят в однозначное (не взаимно!) соответствие каждой точке a, b области (4) некоторую точку x, y плоскости x, y (рис. 2, б). Вся область (4) при этом отображается в некоторую область в плоскости x, y , которую назовем областью рабочих сигналов. Граница этого отображения представляет собой некоторую кривую, которую обозначим

$$F_1(x, y) = 0. \quad (8)$$

Она лежит полностью внутри пересечения семейств (6) и (7).

То же относится к области (5); соответствующую границу обозначим

$$F_2(x, y) = 0. \quad (9)$$

Подчеркнем, что область $F_1(x, y) = 0$ задает на каждой "прямой" характеристике (6) границу соответствующего ей условного подсемейства "обратных" характеристик, а область $F_2(x, y) = 0$ — на каждой "обратной" характеристике (7) границу подсемейства "прямых".

Вопрос работоспособности цепи решается рассмотрением возможных форм этих границ.

Методика их построения изложена далее в §2.

4. В общем виде границы области рабочих сигналов сложны, но могут быть сведены к трем типовым случаям.

С л у ч а й 1. Внешняя огибающая областей $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ (кривые $\beta_0, \mu_0, \delta_0, \gamma_0, \mu_x, \delta_x$ и аналогичные им) ограничивает на семействах характеристик передачи три изолированных области (рис.4).

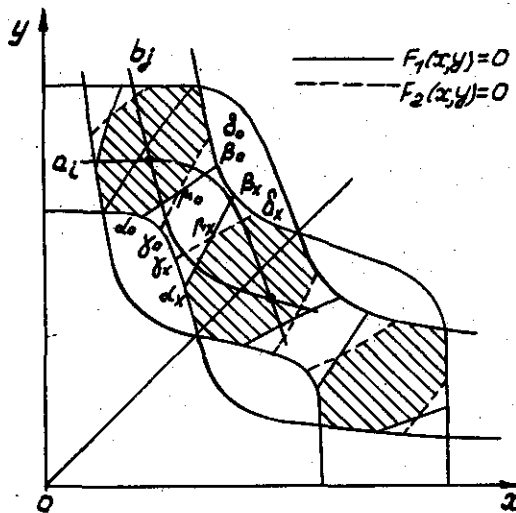


Рис. 4

При этом цепь заведомо работоспособна.

Границами областей установившихся сигналов "нуля" и "единицы" и области неопределенности могут в наихудшем случае служить участки упомянутой внешней огибающей. Но более точно эти границы можно определить рассмотрением двух частных случаев.

С л у ч а й 1,а (рис.5,а) - граница $F_2(x, y) = 0$ расположена по часовой стрелке относительно границы $F_1(x, y) = 0$.

Из изложенного в п.3 ясно, что сигналы внутри пересечения областей $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ являются равновесными сигналами цепи и будут достоверно в ней существовать. Наихудшие

сигналы из этого множества - γ_0 и β_0 - создадут при наихудшей последовательности параметров границу рабочих сигналов вне упомянутого пересечения. Эта граница находится графическим построением (линии $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ и $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ на рис. 5,а).

С л у ч а й 1,б (рис. 5,б) - граница $F_2(x, y) = 0$ расположена против часовой стрелки относительно границы $F_1(x, y) = 0$. При этом внутри пересечения областей наихудшим сигналом, способным создать сигналы вне пересечения, является точка пересечения границ μ_0 . При этом построение границы рабочих сигналов в окрестности точки μ_0 осуществляется аналитически с помощью предельного перехода.

Отметим, что границы α_0, β_0 и γ_0, δ_0 могут не пересекаться. Этот случай по отношению к описанным является частным.

Совершенно идентичные случаи возможны и в области неопределенности для кривых $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x$. Полученные при этом линии $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x$ и μ_x, ν_x ограничивают множество таких сигналов, любой из которых будет в сколь угодно длинной цепи распояван как логический "нуль". (Ясно, что в правой части семейства характеристик то же самое справедливо для логической "единицы".) Для случая 1,б такой границей является ступенчатая траектория, которая сходится к точке μ_x (рис.5,б) и практически получается обратным построением - от точки μ_x - с помощью предельного перехода. Отсюда следует, что при наличии корреляции параметров установившийся режим цепи ("нуль" или "единица") определяется не только входным сигналом (как без корреляции), но и значением вектор-параметра первого элемента.

С л у ч а й 2,а аналогичен случаю 1, а, но граница $F_2(x, y) = 0$ в области "нуля" пересекается с границей $F_1(x, y) = 0$ в области неопределенности. При этом не возникает ничего нового по сравнению со случаем 1,а, поэтому соответствующий рисунок не приводится.

С л у ч а й 2,б аналогичен случаю 1,б (рис.6), но граница $F_1(x, y) = 0$ в области "нуля" пересекается с границей $F_2(x, y) = 0$ в области неопределенности. При этом в цепи возможен отказ (именно этот случай представлен на рис.6), но его может и не быть. Выяснение этого обстоятельства требует построения траектории рабочих сигналов для наихудшей последовательности параметров, как изложено в случае 1,б.

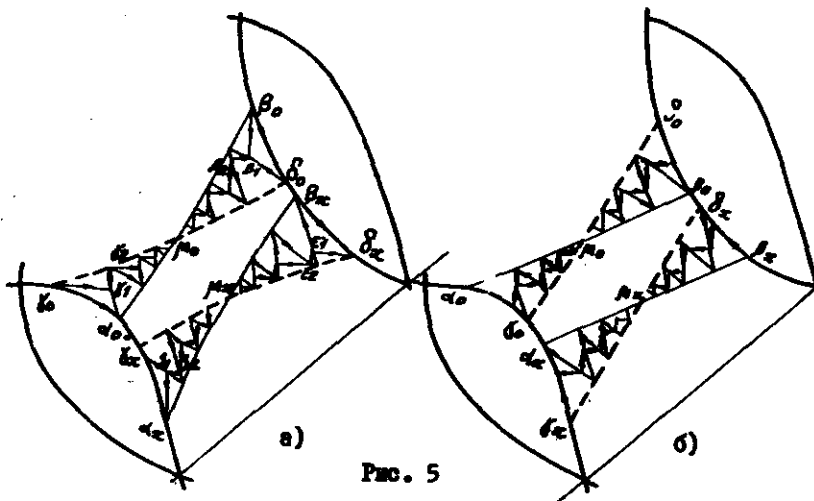


Рис. 5

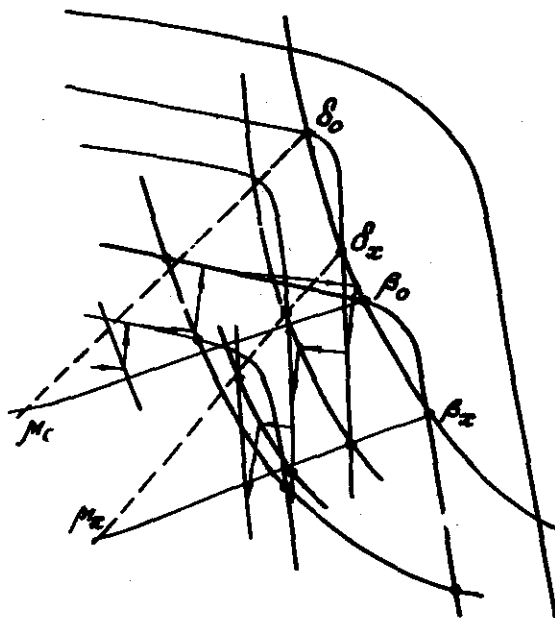


Рис. 6

С л у ч а й 3. При менее тесной корреляции параметров одна или обе кривые $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ могут ограничивать на семействах характеристик односвязную область, но их внутренний огибающий (граница упомянутого пересечения) по-прежнему ограничивает на семействах три изолированных области (кривые $\delta_0/\mu_0 \propto \alpha_0$, $\alpha_x/\mu_x \propto \delta_x$ и аналогичные им на рис. 7).

При этом возможны два случая - рис. 8, а и б - соответственно аналогичные случаям рис. 5, а и б. Вопрос работоспособности цепи при этом решается построением границ множества рабочих сигналов, аналогичным описанному для случаев I, а и б. В частности, на рис. 8, а, б показаны случаи отказов.

С л у ч а й 4. При еще менее тесной корреляции параметров граница пересечения областей $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ может ограничивать на характеристиках односвязную область (рис. 9).

В принятых допущениях (п.2) существует условное распределение $\mathcal{K}(a_{i+1}/a_i)$ вектор-параметра элемента при данном значении вектор-параметра предыдущего элемента. Распределение $\mathcal{K}(a_{i+1}/a_i)$ и уравнение (2) задают совместное условное распределение двух (вообще $2m+1$) случайных величин: вектор-параметра элемента a_{i+1} и его выходного сигнала y при заданных значениях вектор-параметра предыдущего элемента a_i и его выходного сигнала x [3]:

$$\mathcal{K}(y, a_{i+1} | x, a_i) = \delta(y - f(x, a_{i+1})) \mathcal{K}(a_{i+1} | a_i), \quad (10)$$

где δ - импульсная функция.

Последовательность таких случайных величин в рассматриваемой схеме (рис. 1) образует простую однородную цепь Маркова, для которой выражение (10) является плотностью переходных вероятностей.

В данном случае эта цепь не имеет замкнутых множеств состояний, и, согласно эргодическому свойству цепей Маркова [4], схема при бесконечной длине неработоспособна.

Для цепи конечной длины существует отличная от единицы вероятность работоспособности, которая может быть подсчитана по обычной методике теории цепей Маркова. В принятых допущениях она будет выше, чем без корреляции.

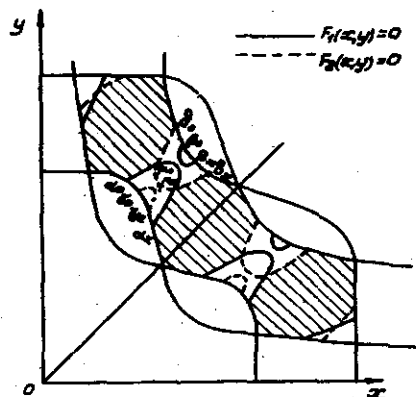


Рис. 7

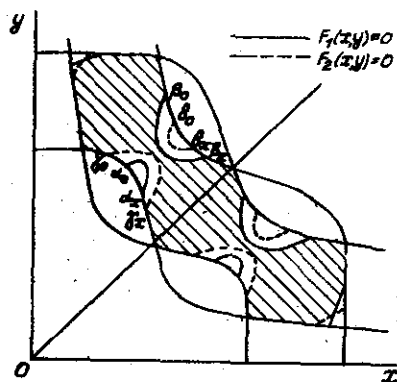


Рис. 9

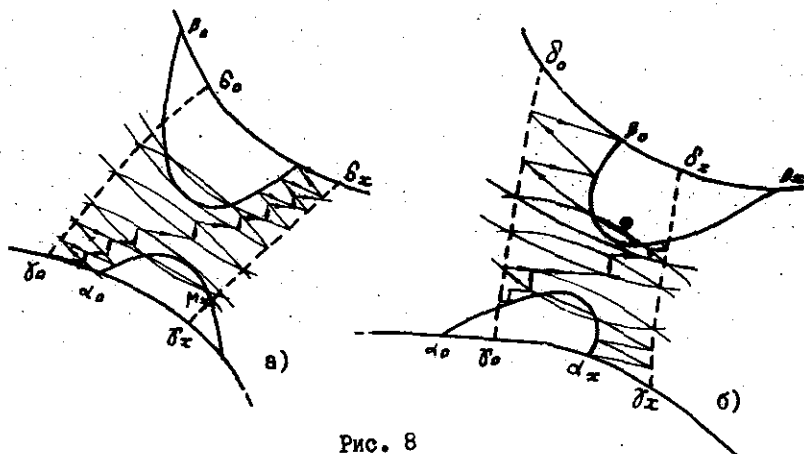


Рис. 8

§ 2. Построение области рабочих сигналов

1. Ниже дается формулировка задачи и описывается алгоритм построения границ областей (8) и (9).

Пусть

$$\begin{aligned} y &= f(x, z), \\ x &= \varphi(y, z) \end{aligned} \quad (II)$$

соответственно уравнения прямой и обратной характеристик (см. рис. 2), где через z обозначен вектор, компонентами которого являются все компоненты векторов a и b :

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Функции f и φ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Координаты точки пересечения кривых (II) (если такая существует) являются функциями от z :

$$\begin{aligned} x &= x(z), \\ y &= y(z) \end{aligned}$$

и при изменении z в некоторой области D :

$$D = \{z \mid \Phi(z) \leq 0\}.$$

(Φ — непрерывная вектор-функция) принимают значения из области F_1 :

$$F_1 = \{(x, y) \mid x = x(z), y = y(z), z \in D\}.$$

Границы этой области можно получить, вычисляя минимальные и максимальные значения $y(z)$ при изменении x в некотором интервале $[x_1, x_2]$.

Разрешим уравнения (II) относительно переменных x и y и запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} y &= f_0(z), \\ \varphi(x, z) &= 0. \end{aligned}$$

Задача отыскания границ области F_1 может быть записана в виде

$$\min \{F(x) \mid \Phi(z) \leq 0, \varphi(x, z) = 0, x_1 \leq x \leq x_2\}, \quad (I2)$$

где $F(x) = f_0 + \alpha f_0'(x)$, постоянная $f_0' > 0$ выбрана так, чтобы целевая функция была неотрицательной, а коэффициент $\alpha = \pm 1$ введен для единообразия записи задачи на минимум и максимум.

От стандартной формулировки задач нелинейного программирования [5] задача (I2) отличается наличием дополнительного ог-

раничения — равенства, делающего, вообще говоря, допустимую область невыпуклой, а задачу многоэкстремальной. В принципе не-сложно освободиться от этого ограничения — равенства, исключив с его помощью одну из координат x_j . Однако этим можно "испортить" вид допустимой области и усложнить задачу, например в случае линейной функции $\varphi(x)$.

В работе [6] рассмотрена похожая задача и предложен способ решения, сводящий ее к последовательности "задач ухода" с поверхности $\psi = 0$ и возвращения на нее. Используя эту идею, можно, по-видимому, построить более эффективную процедуру поиска, осуществляя в "задаче ухода" движение по касательной к поверхности $\psi = 0$.

Введем для множества $\psi_x = \{x / \psi(x, x) = 0\}$ характеристическую функцию $\bar{\psi}(x)$, определив её с помощью условий [6]:

$$\bar{\psi}(x) \begin{cases} = 0, & x \in \psi_x, \\ > 0, & x \notin \psi_x. \end{cases}$$

Например, можно положить $\bar{\psi} = \psi^2(x, x)$.

2. Опишем кратко (для случая линейных ограничений: $\varphi(x) = Ax - c$) алгоритм решения задачи (12), блок-схема которого изображена на рис. 10. Цифровая нумерация блоков на этом рисунке имеет отношение только к приводимому здесь описанию блок-схемы, но не к меткам внутри программы.

Исходная допустимая точка x_0 задается. Программа решает одну и ту же задачу 2^p раз: для значений $x = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, и $\alpha = \pm 1$. Внешний цикл (по α) занимает блоки с 1 по 23, внутренний (по α) — с 2 по 22.

Каждый раз перед началом решения задачи вычисляется очередное α_i , восстанавливаются логические признаки и вектор $x = x_0$, а также очищается рабочий массив S , для хранения значений вектора направлений (блоки 2, 3).

Далее решается "задача спуска на ψ_α " из точки x . Для этого в блоке 4 вычисляется S — вектор антиградиента характеристической функции. Если этот вектор мал (то есть точка x находится вблизи поверхности $\psi = 0$), то определяется антиградиент самой функции $\psi(\alpha, x)$ (блоки 5, 9). В противном случае проверяется, является ли направление S возможным [5] (блок 6) и если да, то решается задача одномерной минимизации (блок 10)

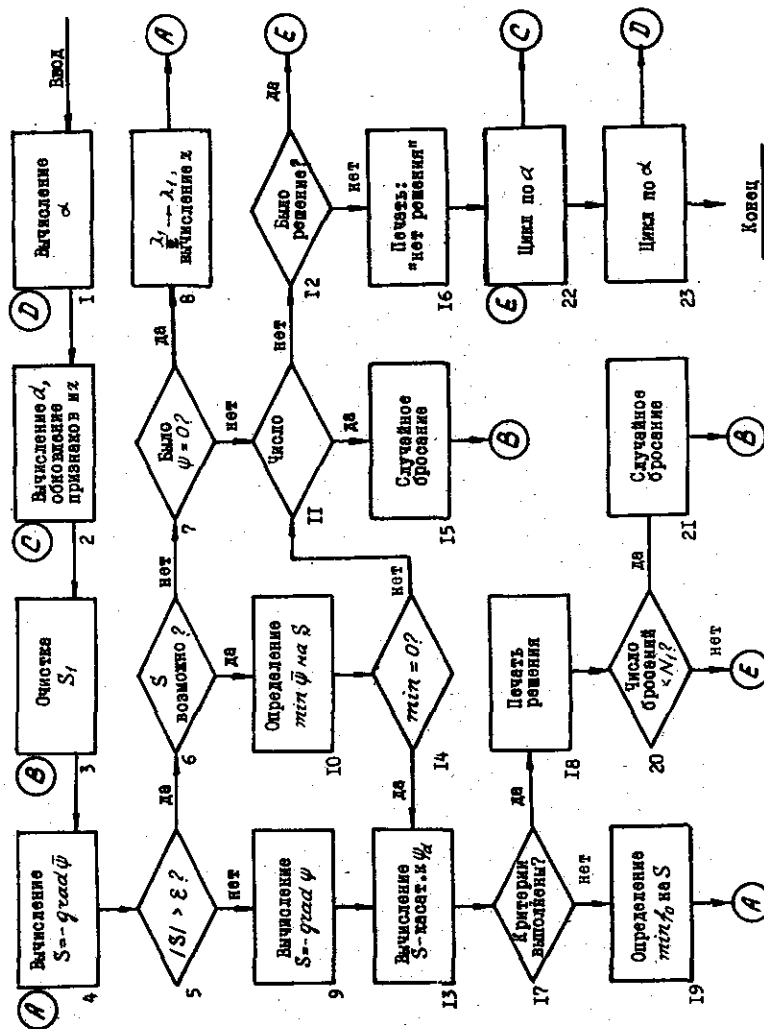


Рис. 10. Блок-схема алгоритма построения области рабочих сигналов

для функции

$$\psi_2(\lambda) \equiv \psi^2(z + \lambda S), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1,$$

где λ_1 - величина шага до границы [5].

Если вектор S выводит за пределы области D , то проверяется, была ли до этого точка на поверхности $\psi=0$ (блок 7). Если да, то λ_1 делится пополам и из новой точки z (блок 8) снова решается "задача спуска", а если нет, то производится случайное бросание z в D (блоки 11, 15) и возвращение в блок 4.

Если решение "задачи спуска" существует (блок 14), то вычисляется вектор S - проекция антиградиента функции $f_0(z)$ на касательную плоскость к поверхности $\psi=0$ (блок 13). Если же значение $\psi=0$ не достигается, то делается попытка решить "задачу спуска" из других начальных точек. В случае неудачи после некоторого заданного числа N попыток считается, что решения нет и соответствующая информация печатается.

Блок 17 проверяет выполнение критериев окончания счета: малость вектора S в блоке 13, малость шага λ_1 , малость функции ψ на границе. При выполнении хотя бы одного из них очередное решение печатается (блок 18), и решение задачи повторяется N_1 раз при помощи случайных бросаний (блоки 20, 21) для отыскания глобального минимума.

Если ни один из перечисленных критериев не выполняется, то определяется минимум функции $f_0(z)$ на направлении S (блок 19) и из найденной точки повторяется "спуск на $\psi=0$ ".

Совершенно аналогично решается задача построения области F_2 , где вместо z используется вектор

$$z^* = \left\| \frac{\delta}{a} \right\|.$$

К этому краткому описанию блок-схемы добавим, что

1) градиент функции находится путем численного дифференцирования по трем точкам,

2) задача одномерной минимизации решается при помощи аппроксимирующих парабол.

Программа по описанному алгоритму составлена на языке АКМ-400 для ЭЦМ "Минск-22".

Выводы

1. Для решения вопроса работоспособности цепи логических элементов с корреляцией параметров целесообразно свести задачу к случаю, когда корреляция односвязна и однородна.

2. Анализ цепи при этом заключается в построении границ области рабочих сигналов, что в свою очередь сводится к задаче нелинейного программирования с дополнительным ограничением - равенством.

3. В цепи логических инверторов положительная корреляция одноименных параметров повышает работоспособность.

Л и т е р а т у р а

1. ЛОУ. Физическая реализация цифровых логических схем. - "Микроэлектроника", М., "Сов. радио", 1967.

2. ПАНФЕРОВ В.П. К вопросу о расчете надежности элементов ЭЦМ в статическом режиме. - "Вопросы радиоэлектроники", 1965, серия УП, вып. 3.

3. ЛЕВИН Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники, М., "Сов. радио", 1969, т. I.

4. РОМАНОВСКИЙ В.И. Дискретные цепи Маркова. М.-Л., ГИТТЛ, 1949.

5. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. М., ИЛ, 1963.

6. БАГРИНОВСКИЙ К.А. Об одном способе минимизации выпуклой функции на невыпуклом множестве. - "Научные труды Новосибирского государственного университета", сер. экономическая, 1966, вып. 8.

Поступила в ред.-изд. отд.
29.IV.1972 г.