

УДК 518.5:621.828.001.2

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

С.М. Гимельштейн, В.А. Луц

Проектирование сложного механизма начинается с выбора принципиальной схемы и общей компоновки его частей. Затем возникает задача подбора количественных характеристик с тем, чтобы окончательный вариант удовлетворял функциональному назначению. В статье говорится о применении оптимального программирования для синтеза одного из видов сложных механизмов.

Рассматриваются пространственные передаточные механизмы, состоящие из кривошипно-коромысловых и кривошипно-ползунных простых механизмов (рис.1). Подвижными звеньями таких механизмов являются:

- 1) коромысло-звено, вращающееся без скольжения вокруг фиксированной в пространстве оси;
- 2) ползун-звено, скользящее без вращения вдоль заданной направляющей;
- 3) шатун-звено, образующее сферические кинематические пары со звеньями первых двух типов.

Коромысло и ползун в данной задаче будем именовать плоскими элементами системы, или просто элементами. Все звенья, соединенные друг с другом в определенном порядке, образуют принципиальную кинематическую схему. В механизме будем выделять подсистемы, являющиеся 4-звеньевыми и 6-звеньевыми:

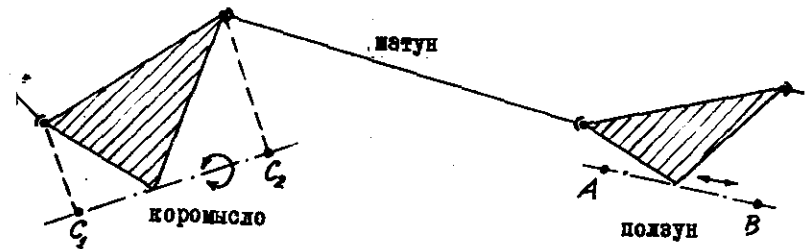


Рис. 1

ннк содержит два последовательных элемента, 6-звеньевик - три.

Количественными характеристиками механизма будут линейные и угловые величины, определяющие местонахождение шарниров на звеньях. Положение системы механизма есть геометрическое взаиморасположение между звеньями, меняющееся во время работы. Величину, характеризующую положение того или иного элемента, называем рабочей переменной. Для коромысла это угол поворота, для ползуна - линейное смещение. Отсчет ведется от некоторого фиксированного "нулевого" положения. Обозначим C_1 и C_2 ортогональные проекции шарниров H_1 и H_2 коромысла на его ось вращения. Векторы C_1H_1 и C_2H_2 назовем плечами. Исходные данные о системе механизма задаются декартовыми координатами четырех характерных точек (два шарнира и две точки на оси) каждого элемента в нулевом положении.

Параметрами являются длины шатунов, длины плеч, углы между плечами. Под состояниями системы понимаются различные наборы параметров при неизменном составе. В некотором определенном состоянии системы (т.е. при фиксированных параметрах) каждому значению входной рабочей переменной u соответствует определенное значение выходной переменной V , то есть выход есть функция входа $V = V(u)$. Значения u_0, u_m входной переменной назовем допустимыми пределами, если в каждой точке отрезка $[u_0, u_m]$ функция $V(u)$ непрерывна и монотонна.

Задача анализа состоит в отыскании значе -

ния выходной функции V для заданного входного аргумента u и решается последовательными переходами с выходного шарнира предшествующего элемента на входной шарнир последующего. В специально выбранной системе координат ищется точка пересечения возможной траектории последующего шарнира со сферой радиуса, равного длине шатуна, с центром в предшествующем шарнире. Для однозначного решения этой задачи накладывается условие сохранения ориентации репера, составленного из векторов оси элемента, плеча и шатуна.

Задача синтеза. Пусть в нулевом положении значению u_0 входной переменной соответствует значение V_0 выходной переменной. Задается набор значений u_1, u_2, \dots, u_m входной переменной, принадлежащий допустимому отрезку $[u_0, u_m]$, и набор значений V_1, V_2, \dots, V_m выходной переменной. Требуется подобрать такие значения параметров системы (при неизменном качественном составе), чтобы заданными значениями входной переменной соответствовали заданные значения выходной переменной:

$$V(u_1) = V_1, \quad V(u_2) = V_2, \dots, V(u_m) = V_m.$$

Передачная функция. Для любой системы (в том числе и подсистемы) можно ввести понятие передачной функции \mathcal{K} как производной выхода по входу $\mathcal{K} = \frac{dV}{du}$. Найдем выражение передачной функции для 4-звенника "коромысло-коромысло" (рис. 2). Пусть векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 задают направления осей коромысел, ψ - угол между осями, точки C_1 и C_2 - ортогональные проекции шарниров H_1 и H_2 на оси вращения, $\vec{R} = C_1H_1$ и $\vec{r} = C_2H_2$ - векторы-плечи, $\vec{s} = H_1H_2$ - вектор-шатун, $\vec{t} = C_1C_2$ - вектор линии центров.

Введем две ортонормальные системы координат $(x, y, z)^{(1)}$ и $(x, y, z)^{(2)}$ следующим образом. Положительное направление осей $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ дадут соответственно векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 . Оси $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ совпадают, их положительное направление задается векторным произведением $[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]$ (в случае $[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] = 0$ это направление ортогонально вектору $\vec{a} = \vec{a}_{1,2}$). Оси $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ выбирают так, чтобы обе координаты системы имели правую ориентацию.

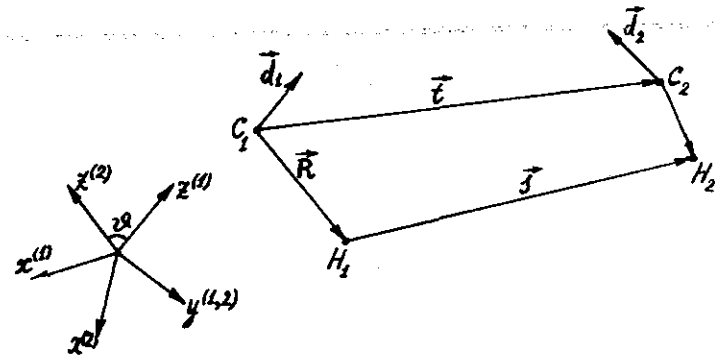


Рис. 2

Входной переменной здесь является угол α - полярный угол плеча \vec{R} относительно системы $(x, y, z)^{(1)}$. Выходной переменной β - полярный угол плеча \vec{r} относительно системы $(x, y, z)^{(2)}$. При любом α имеет место векторное равенство:

$$\vec{t} + \vec{r} - \vec{R} = \vec{s} \quad (I)$$

Приравняв модули равных векторов, получим неявную зависимость между α и β :

$$\Phi(\alpha, \beta) = (t \cos \gamma \cos \psi + r \cos \beta \cos \nu - R \cos \alpha)^2 + (t \cos \gamma \sin \psi + r \sin \beta - R \sin \alpha)^2 + (t \sin \gamma + r \cos \beta \sin \nu)^2 - s^2 = 0,$$

где ψ - полярный угол проекции вектора \vec{t} на плоскость $(x, y)^{(1)}$, γ - угол между вектором \vec{t} и плоскостью $(x, y)^{(2)}$.

Передачная функция вычисляется как производная неявной функции:

$$\mathcal{K}(\alpha, \beta) = \frac{\frac{t}{R} \cos \gamma (\sin \alpha \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi) + (\sin \alpha \cos \beta \cos \nu - \cos \alpha \sin \beta)}{\frac{t}{R} A + B} \quad (2)$$

где

$$A = [\sin \beta (\cos \gamma \cos \psi \cos \nu + \sin \gamma \sin \nu) - \cos \beta \cos \gamma \sin \psi],$$

$$B = (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos \nu).$$

Найдем выражение передачной функции 4-звенника "коромысло - ползун" (рис. 3).

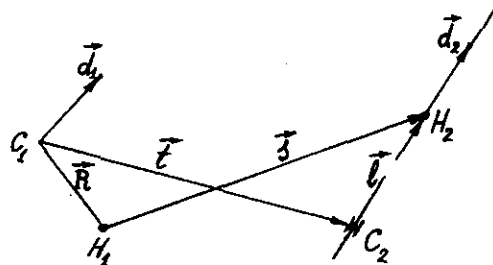


Рис. 3

Здесь вектор \vec{d}_2 задает направление поступательного перемещения ползуна, C_2 — некоторая фиксированная точка на траектории шарнира H_2 . Входная переменная, векторы \vec{R} , \vec{t} , \vec{s} и координатные системы $(x, y, z)^{(1)}$, $(x, y, z)^{(2)}$ имеют тот же смысл, что и для 4-звенника "коромысло-коромысло". Выходной переменной является координата $x^{(2)}$ вектора $\vec{t} = C_2 H_2$. В процессе работы 4-звенника "коромысло-ползун" имеет место векторное равенство

$$\vec{t} + \vec{\ell} - \vec{R} = \vec{s}, \quad (3)$$

откуда и следует требуемая неявная зависимость между α и $\nu = \ell_{x^{(2)}}$:

$$G(\alpha, \nu) = (\nu \sin \psi + t \cos \psi \cos \alpha - R \cos \alpha)^2 +$$

$$+ (t \sin \psi \cos \alpha - R \sin \alpha)^2 + (t \sin \psi + \nu \cos \psi)^2 - s^2 = 0$$

Дифференцируя неявную функцию, приходим к выражению передаточной функции 4-звенника "коромысло-ползун":

$$\mathcal{K}(\alpha, \nu) = -\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} = \frac{R[t \cos \psi (\cos \alpha \sin \psi - \sin \alpha \cos \psi) - \sin \alpha \sin \psi]}{[\nu + t (\cos \psi \cos \psi \sin \nu + \sin \psi \cos \nu)] - R \cos \alpha \sin \nu} \quad (4)$$

В случае плоских 4-звенников углы ψ и ν равны нулю, и выражения (2) и (4) упрощаются.

Связывая с 4-звенником соседний элемент, получим 6-звен-

ник. В нем можно выделить два 4-звенника с передаточными функциями \mathcal{K}_{12} и \mathcal{K}_{23} , причем средний элемент входит в оба 4-звенника. Передаточная функция 6-звенника есть $\mathcal{K}_{123} = \mathcal{K}_{12} \cdot \mathcal{K}_{23}$. Передаточная функция системы, состоящей из n элементов, равна произведению $(n-1)$ передаточных функций составляющих 4-звенников:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{12} \cdot \mathcal{K}_{23} \cdot \dots \cdot \mathcal{K}_{n-1, n} \quad (5)$$

При изменении направления передачи на противоположное передаточная функция системы меняется на обратную $\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{K}_+}$.

Передаточная функция является именно функцией (а не передаточным коэффициентом), поскольку зависит от положения системы. К сожалению, получить явную зависимость передаточной функции от входной переменной для рассматриваемых механизмов не удается. Для вычисления передаточной функции сначала приходится решать задачу анализа, находить величины β или λ по данной величине α и затем уже применять формулы (2) и (4).

Из геометрических соображений ясно, что передаточные функции (2), (4) рассмотренных 4-звенников ограничены, непрерывны и отличны от нуля почти для всех значений входной переменной. Исключения составляют "мертвые" положения, в которых передаточная функция обращается в нуль или в бесконечность. Для коромысла мертвое положение достигается, когда проекция шатуна на плоскость вращения плеча оказывается коллинеарной плечу, а для ползуна — когда шатун оказывается перпендикулярным направлению скольжения. Если угол между мертвыми и произвольными положениями шатуна есть ε , то передаточная функция при подходе к мертвому положению ведет себя как $\sqrt{\varepsilon}$ либо $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Допустимые пределы работы механизма определяются именно мертвыми положениями.

Синтез как оптимизация. Пусть имеется система из нескольких элементов. Решая задачу анализа для каждого значения u_j входной переменной из данного набора u_1, \dots, u_m получим набор фактических значений \bar{V}_j выходной переменной. Отклонение фактического набора от требуемого характеризуем величиной $F = \sum_{j=1}^m (\bar{V}_j - V_j)^2$, которую будем рассматривать как целевую функцию. Целевую функцию можно представить в

интегральной форме через передаточную функцию. Для фактического значения \bar{V}_j выходной переменной имеем выражение

$$\bar{V}_j = V_0 + \int_{u_0}^{u_j} \frac{dv}{du} du = V_0 + \int_{u_0}^{u_j} K(u, V(u)) du,$$

откуда получаем целевую функцию в виде

$$F = \sum_{j=1}^m \left[\int_{u_0}^{u_j} K(u, V(u)) du + V_0 - V_j \right]^2. \quad (6)$$

Каждому состоянию системы отвечает своя передаточная функция, последняя зависит от вектора параметров. Меняя параметры, мы меняем передаточную функцию, а следовательно, и целевую. Чем меньше величина F , тем ближе (в среднем) фактический набор значений выходной переменной к требуемому. Не всякий параметр системы можно менять независимо от остальных. Например, меняя длину шатуна, связывающего коромысла, приходится одновременно менять либо длины плеч, либо углы между ними. Параметры $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ называются взаимно независимыми, если изменение любого из них не влечет изменения остальных. Поскольку передаточная функция системы зависит от параметров $K = K(u, V(u); \rho_1, \dots, \rho_n)$, то, учитывая (6), получим выражение

$$F(\rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{j=1}^m \left[\int_{u_0}^{u_j} K(u, V(u); \rho_1, \dots, \rho_n) du + V_0 - V_j \right]^2, \quad (7)$$

то есть целевую функцию как функцию n -мерного вектора взаимно независимых параметров.

Синтез передаточного механизма можно рассматривать как поиск вектора " $\bar{\rho}$ ", дающего минимум целевой функции $F(\bar{\rho})$ при заданных ограничениях на параметры.

Свойства оптимальной задачи синтеза. Ограничения на параметры двусторонние и независимые, то есть поиск ведется в n -мерном координатном параллелепипеде. Единственное дополнительное условие на допустимую область — требование $0 < |K| < \infty$, то есть система не должна достигать мертвых положений.

Зависимость целевой функции от параметров, очевидно, не является линейной или квадратичной. Покажем, что целевая функция, вообще говоря, не относится к выпуклым. Рассмотрим плоский 6-

звенник из трех коромысел, имеющих равные плечи и прямолинейное расположение центров. Начало координат поместим в центр вращения среднего коромысла, ось x направим вдоль линии центров (рис. 4, а)

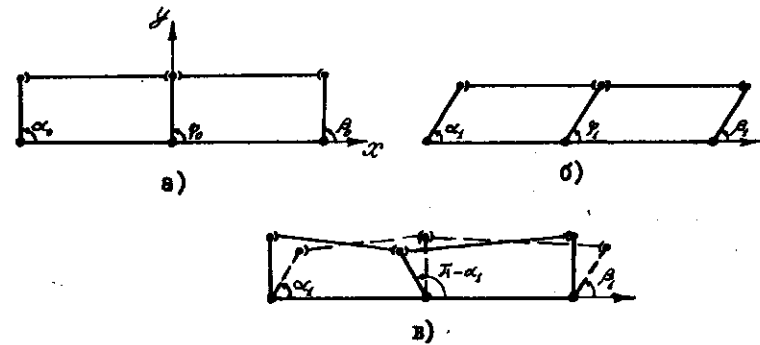


Рис. 4

Пусть $\alpha_n = \beta_n = \frac{\pi}{2}$, $m = 1$, $\beta_1 = \alpha_1$, а варьируемым параметром будет полярный угол φ_0 плеча среднего коромысла в нулевом положении.

При $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ имеем $\bar{\beta}_1(\alpha_1) = \beta_1$, то есть $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ (рис. 4, б). Из соображений симметрии ясно, что при $\varphi_0 = \pi - \alpha_1$ тоже имеет место равенство $\bar{\beta}_1(\alpha_1) = \beta_1$, и целевая функция обращается в нуль: $F(\pi - \alpha_1) = 0$. На оси параметра имеются по меньшей мере два нуля целевой функции. Если на отрезке $[\pi - \alpha_1, \frac{\pi}{2}]$ целевая функция не тождественна нулю, то она невыпукла.

Проведем формальное исследование. Поскольку равномерное растяжение — сжатие вдоль координатных осей не меняет качественной картины, будем рассматривать случай единичных длин плеч и единичных расстояний между центрами (рис. 5). Выразим длины шатунов через координаты шарниров в нулевом положении:

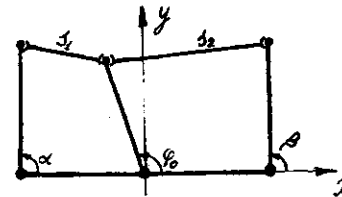


Рис. 5

$$z_1^2 = 3 - 2(\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0), \quad z_2^2 = 3 - 2(\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0). \quad (8)$$

Записывая равенства (3) для каждого из 4-звенников рассматриваемого 6-звенника, вычисляя квадраты модулей левых частей и приравнявая их соответственно одному из выражений (8), получим:

$$\cos \varphi - \cos \alpha - \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha + \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 = 0, \quad (9)$$

$$\cos \beta - \cos \varphi - \cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi + \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 = 0.$$

Эти соотношения, связывающие полярные углы плеч и варьируемый параметр φ_0 , справедливы во всех положениях системы, в том числе в положении I ($\frac{\pi}{4} < \alpha_1 < \frac{3}{4}\pi$, φ_1 , β_1). Найдем необходимые условия равенства $\beta(\alpha_1) = \alpha_1$. Положим $\alpha = \beta = \alpha_1$ в равенствах (9) и разделим их относительно $\cos \varphi_1$ и $\sin \varphi_1$, сумма квадратов которых, естественно, равна единице. Отсюда получим необходимое условие в виде:

$$\cos \alpha_1 (1 - \sin \varphi_0) \cos \varphi_1 = \cos \alpha_1 (1 - \sin \varphi_0) (\cos \alpha_1 + \cos \varphi_0) = 0. \quad (10)$$

Случай $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} = \alpha_0$ тривиален. Если $\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}$, условие (10) выполняется, во-первых, при $\sin \varphi_0 = 1$, то есть $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, во-вторых, при $\cos \alpha_1 + \cos \varphi_0 = 0$ или $\cos \varphi_0 = -\cos \alpha_1$, то есть при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \alpha_1$. Следовательно, на оси варьируемого параметра целевая функция $F(\varphi_0)$ имеет вообще только три нуля: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \pi - \alpha_1$, $\varphi_0 = \pi + \alpha_1$. Из них первые два принадлежат допустимому интервалу ($\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$) и, как показано выше, действительно реализуются. Неотрицательная функция $F(\varphi_0)$ обращается в нуль только в двух различных точках допустимого интервала и, следовательно, не является выпуклой. Доказано даже существование по меньшей мере двух минимумов целевой функции (рис. 6).

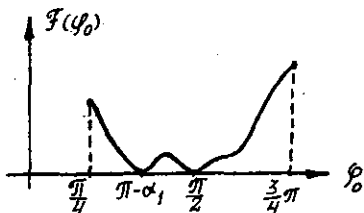


Рис. 6

Пусть имеется система из двух элементов, объединенных шатуном

3. Если независимо менять входную "u" и выходную "v" переменные, то длина шатуна будет изменяться. Длина шатуна, как функция от u и v, имеет частные производные, которые обращаются в нуль только в мертвых положениях. Но эти частные производные совпадают с частными производными $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ или $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$. Следовательно, в выражении передаточной функции 4-звенника $\mathcal{K}(u, v, \rho) = \frac{P}{Q}$ числитель и знаменатель отличны от нуля во всех допустимых положениях. Дифференцируем выражение $\mathcal{K}(u, v, \rho)$ по одному из параметров:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho_i} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \rho_i} Q - \frac{\partial Q}{\partial \rho_i} P}{Q^2}$$

Числитель есть сумма произведений синусов и косинусов различных углов с длинами векторов в качестве коэффициентов. Учитывая свойства функции $V(u)$, можно утверждать, что в допустимых положениях числитель есть ограниченная непрерывная функция рабочих переменных и ρ_i . Поскольку в допустимых положениях знаменатель отличен от нуля, справедливо утверждение: производная по параметру передаточной функции 4-звенника непрерывна, как функция двух переменных v и ρ_i во всех допустимых положениях. Аналогичное утверждение, очевидно, справедливо для передаточной функции (5) произвольной системы коромысел и ползунков.

Целевая функция (7) оптимальной задачи синтеза является непрерывной дифференцируемой функцией параметров. В силу непрерывности и непрерывной дифференцируемости по параметрам подынтегральной функции компоненты градиента функции $F(\rho_1, \dots, \rho_n)$ можно получить дифференцированием под знаком интеграла. Дифференцируя выражение (7) по i-параметру, найдем i-ю координату вектора градиента:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = 2 \sum_{j=1}^n \left[\int_{u_0}^{u_j} \frac{\partial \mathcal{K}(u, v(u), \rho)}{\partial \rho_i} du \right] (\bar{V}_j - v_j)^2. \quad (11)$$

Передаточный механизм можно разбить на подсистемы, образующие последовательную цепь. Тогда передаточная функция всего меха -

низма есть произведение $\prod_{i=1}^n K_i$ передаточных функций подсистем разбиения. Допустим, подобное разбиение удалось осуществить так, что передаточная функция каждой подсистемы зависит только от одного параметра: $K_i = K_i(p_i)$. В этом случае при отыскании i -й координаты градиента целевой функции достаточно найти обычную производную i -го сомножителя в подынтегральном выражении

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^m (\bar{V}_j - V_j) \int_{u_0}^{u_j} K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_{i-1} \cdot \frac{dK_i}{dp_i} \cdot K_{i+1} \cdot \dots \cdot K_n \cdot du. \quad (12)$$

Алгоритм минимизации целевой функции. Система механизма разбивается на 6-звенья таким образом, что два соседних 6-звенника имеют один общий элемент. Очевидно, такое разбиение возможно в двух вариантах: первый 6-звенник разбиения начинается с первого элемента системы или со второго. В зависимости от четности общего числа элементов последний 6-звенник содержит (не содержит) последний элемент системы. Если K_i - передаточная функция i -го 6-звенника, то передаточная функция всей системы есть $K_{вх} \cdot K_1 \cdot \dots \cdot K_n \cdot K_{вых}$. Здесь $K_{вх}$ и $K_{вых}$ равны либо единицам, либо передаточным функциям соответственно входного и выходного 4-звенников, не вошедших ни в один из 6-звенников разбиения. Каждый внутренний элемент системы окажется внутренним для 6-звенника в одном из вариантов разбиения. Одновременно варьируются параметры только внутренних элементов 6-звенников данного разбиения.

Разбиение на 6-звенья удобно уже потому, что позволяет пользоваться формулой (12) при вычислении координат градиента. Но, что более важно, разбиение на 6-звенья дает возможность варьировать, кроме отдельных независимых параметров, еще и некоторые комбинации зависимых параметров. Параметры такой комбинации варьируются внутренне согласованно, а комбинация в целом не зависит от прочих параметров. В качестве примера возьмем плоский 6-звенник "коромысло-коромысло-ползунок" (рис. 7). Полярные углы β_1^0 и α_2^0 плеч среднего коромысла в нулевом положении можно рассматривать как параметры и варьировать независимо. Но при этом, вообще говоря, будет меняться угол δ между плечами. Если изменение угла δ по какой-то причине неже-

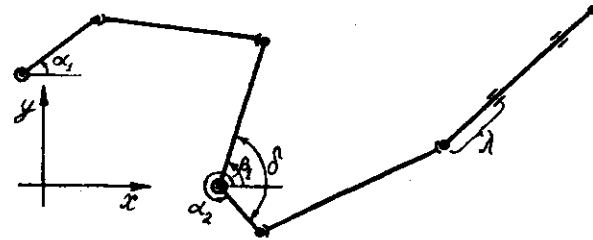


Рис. 7

лательно, то необходимо варьировать оба угла согласованно, так чтобы приращение β_1^0 равнялось приращению α_2^0 . Такое варьирование комбинации $\{\beta_1, \alpha_2\}$, то есть повороты среднего коромысла как жесткого целого, не затрагивает передаточных функций соседних 6-звенников. Комбинации $\{\beta_1, \alpha_2\}$ можно символически рассматривать как некий параметр φ . Производная передаточной функции по этому параметру имеет вид:

$$\frac{dK}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (K_{12} \cdot K_{23}) = \frac{dK_{12}}{d\beta_1} K_{23} + \frac{dK_{23}}{d\alpha_2} K_{12}$$

где K_{12} есть выражение типа (2), K_{23} - выражение типа (4).

В исходных данных для каждого элемента системы помимо координат характерных точек указываются пределы варьирования параметра. Отсутствие пределов говорит о том, что данный элемент не содержит варьируемого параметра. Количество варьируемых элементов, оказавшихся внутренними для 6-звенников некоторого разбиения, определяет размерность n параметрического пространства данного разбиения.

Пусть \bar{p}_1 определяет исходную допустимую точку в пространстве параметров одного из разбиений. В этой точке вычисляются координаты вектора-градиента \bar{q} (формулы II или I2) и значение целевой функции $F_1 = F(\bar{p}_1)$. Линейная часть приращения (в точке I) целевой функции есть $\mathcal{L}_1(\bar{h}) = (\bar{q}_1, \bar{h})$ - скалярное

произведение. Ищем вектор шага \vec{h}_2 в виде $\vec{h}_2 = \lambda \vec{g}_2$, так чтобы $L_2(\vec{h}) = (\vec{g}_2, \lambda \vec{g}_2) = -F_2$. Из этого условия получаем

$$\lambda = -\frac{F_2}{g_2^2}, \quad \vec{h} = -\frac{F_2}{g_2^2} \vec{g}_2$$

Вообще говоря, точка $\vec{P}_2 + \vec{h}$ может оказаться вне допустимой области. Сравнением компонент вектора \vec{h} с ограничениями на параметры вырабатывается вектор $\vec{\Delta}$ фактического смещения таким образом, чтобы в случае пересечения с граничной гиперплоскостью зафиксировать в ней последнюю точку $\vec{P}_2 + \vec{\Delta}$. Вектор $\vec{\Delta}$ может отличаться от вектора $-\vec{g}_2$ как по величине, так и по направлению, но проекция вектора $\vec{\Delta}$ на вектор $(-\vec{g}_2)$ всегда неотрицательна. Значение целевой функции $F(\vec{P}_2)$ в новой допустимой точке сравнивается со старым значением $F(\vec{P}_2)$. Если получено уменьшение, то в новой точке отыскивается градиент и процесс повторяется. Если нет уменьшения или даже имеет место рост целевой функции, то на отрезке $[\vec{P}_2, \vec{P}_2 + \vec{\Delta}]$ ищется точка \vec{P}_{min} локального минимума по направлению. Движение по антиградиенту продолжается из точки \vec{P}_{min} . Процесс минимизации в данном варианте разбиения системы на 6-звенья считается окончательным, когда вектор смещения $\vec{\Delta}$ оказывается равным нулю. Это может произойти либо в случае выхода на границу, либо при обращении в нуль градиента. В последнем случае возможно исследование на седловую точку, так как вторые производные целевой функции могут быть вычислены.

Пространства параметров, соответствующие первому и второму вариантам разбиения системы на 6-звенья, связаны между собой целевой функцией: смещение в одном из них влечет изменение поверхностей уровней целевой функции в другом. Окончание процесса минимизации, например, по первому варианту разбиения не означает его полного завершения: по второму варианту может оказаться возможным смещение, которое позволит ещё уменьшить целевую функцию. Если по окончании варьирования одного разбиения в первой же допустимой точке другого разбиения вектор $\vec{\Delta}$ будет равен нулю, минимизация считается завершённой.

Программа минимизации составлена для машины "Минск-22". Для хранения полной информации об элементе и его соединении с соседними отводятся 100₈ ячеек памяти. Сово-

купность этих ячеек назовем таблицей элемента. Таблицы располагаются во втором блоке МОЗУ последовательно в порядке номера ячеек элементов от входа к выходу. Максимальное количество элементов - 56. Остальные ячейки второго блока и 1000₈ ячеек первого используются как рабочие. Программа занимает первый блок МОЗУ и состоит из следующих крупных подразделений.

1. Блок заполнения таблиц по исходным данным вычисляет полную геометрическую информацию о системе.
2. Блок анализа по заданному значению входной переменной любой подсистемы отыскивает соответствующее значение выходной переменной.
3. Блок "производная" вычисляет производную передаточной функции 6-звенника по варьируемому параметру в заданном положении.
4. Блок "интеграл" производит интегрирование производной передаточной функции системы в заданных пределах входной переменной.
5. Блок "функция, градиент" вычисляет целевую функцию и ее градиент в допустимой точке пространства параметров.
6. Блок "варьирование" настраивает всю программу на первый или второй вид разбиения по 6-звеньям, на основании вектора-градиента в соответствии с ограничениями на параметры получает вектор смещения; оценивает новое значение целевой функции и принимает решение об окончании работы.
7. Блок "коррекция" по данному вектору смещения вычисляет новую точку \vec{P}_2 и соответственно меняет значения параметров в таблицах элементов.
8. Блок "минимум" отыскивает локальный минимум на отрезке $[\vec{P}_2, \vec{P}_2 + \vec{\Delta}]$.

Принципиальная схема программы приведена на рис.8. Для отладки удобно использовать центрально-симметричные механизмы. В таких механизмах любому положению входного элемента соответствует симметричное положение выходного элемента. Если наборы $\{u_1, \dots, u_m\}$ и $\{v_1, \dots, v_m\}$ задать взаимно симметричными, то целевая функция примет нулевое, то есть минимальное значение. При намеренном внесении асимметрии в такой механизм можно быть уверенным в существовании глобального минимума целевой функ-

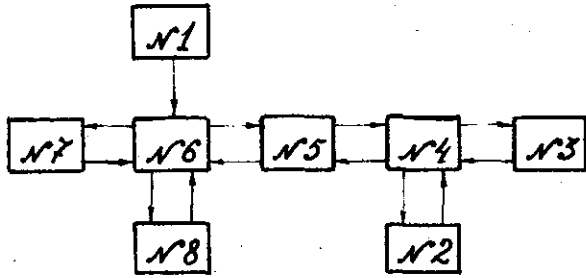


Рис. 8

ции, равного нулю и в котором градиент тоже равен нулю.

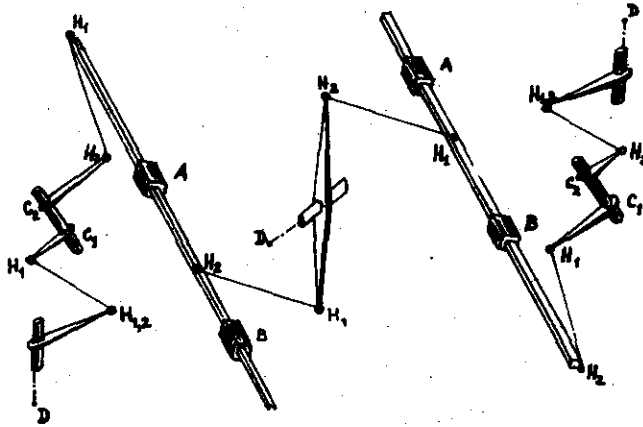


Рис. 9

На рис.9 изображен механизм, элементами которого являются два коромысла, ползун, коромысло, ползун, два коромысла. Этот механизм допускает центрально-симметричное состояние. В табл. I даны координаты характерных точек элементов в нулевом положении

Таблица

Характерные точки механизма

	Элемент						
	1	2	3	4	5	6	7
$C_1(A)$	447.4875 -12.1321 100.0	270.7107 -12.1321 100.0	129.2893 -12.1321 100.0	200.0 200.0 200.0	200.0 270.7107 300.0	200.0 482.8428 200.0	-47.4875 412.1321 300.0
$C_2(B)$	447.4875 -12.1321 30.0	200.0 306.066 -47.4875	270.7107 129.2893 100.0	400.0 200.0 200.0	270.7107 412.1321 300.0	129.2893 412.1321 300.0	-47.4875 412.1321 300.0
H_1	376.7768 58.5786 100.0	306.060 -47.4875 100.0	58.5786 -82.8428 100.0	200.0 200.0 100.0	200.0 341.4214 300.0	270.7107 412.1321 200.0	23.2232 341.4214 300.0
H_2	376.7768 58.5786 100.0	129.2893 -12.1321 200.0	200.0 58.5786 100.0	200.0 200.0 300.0	341.4214 482.8428 300.0	93.9340 447.4875 300.0	23.2232 341.4214 300.0

Таблица 2

Исходные данные

Наборы положений		Пределы варьирования	
входной	выходной	второй	шестой
$U_0 = 4.712389$	$V_0 = 1.570796$	$\delta_1 = 0.4$	$\delta_2 = 0.3$
$U_1 = 4.804757$	$V_1 = 1.478428$	$\delta_3 = -0.4$	$\delta_4 = -0.4$
$U_2 = 4.863750$	$V_2 = 1.419435$		

центрально-симметричного состояния.

Независимыми параметрами (ρ_2, ρ_6) являются комбинации углов плеч второго и шестого коромысел. Значения этих параметров в центрально-симметричном состоянии принимаются равными нулю. В табл. 2 даны значения полярных углов плеч входного и выходного коромысел в нулевом и отклоненных положениях ($m = 2$), а также допустимые пределы варьирования параметров.

На рис. 10 представлен рельеф целевой функции: на диаго-

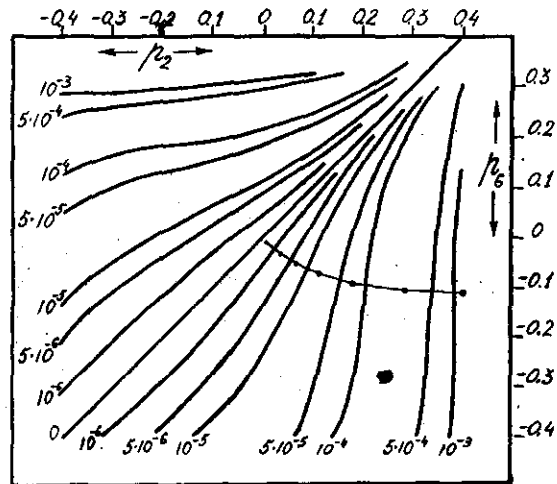


Рис. 10

нали функция достигает минимума, равного нулю, остальные линии уровней располагаются приблизительно симметрично, сгущаясь к верхнему концу диагонали. В допустимом прямоугольнике целевая функция имеет значения от нуля до 2×10^{-3} . Последнее соответствует рассогласованию $\approx 3^\circ$. Показана траектория спуска из точки $(+0,4; -0,11)$. Соответствующие значения целевой функции, векторов антиградиента и смещения приведены в табл. 3.

Кроме варианта программы синтеза, где варьируются комбинации углов, имеются модификации этой программы, предназначенные для варьирования длин плеч и углов между плечами. Все ва-

Таблица 3

	$\bar{\rho}$	целевая функция F	$-\bar{g}$	$\bar{\Delta}$
0	+0,4 -0,11	0.001240156	-0.012822 +0.0005877	- 0.096515 + 0.004424
1	+0,3035 -0,10558	0.00029677	-0.003031 +0.0003765	- 0.096427 + 0.011979
2	+0,20706 -0,09360	0.000080807	-0.000900 +0.0002255	- 0.084444 + 0.021148
3	+0,122614 -0,07245	0.000022038	-0.0003050 +0.0001319	- 0.060887 + 0.026330
4	+0,061797 -0,04612	0.000005477	-0.0001150 +0.0000736	- 0.0338015 + 0.021640
5	+0,02793 -0,02448	0.000001216	-0.0000471 +0.0000380	- 0.015639 + 0.0126287
6	+0,01229 -0,01185	0.000000255	-0.0000203 +0.0000184	- 0.0068846 + 0.0062408
7	+0,00260 -0,00275	0.000000052	-0.0000090 +0.0000086	- 0.0029927 + 0.0026616

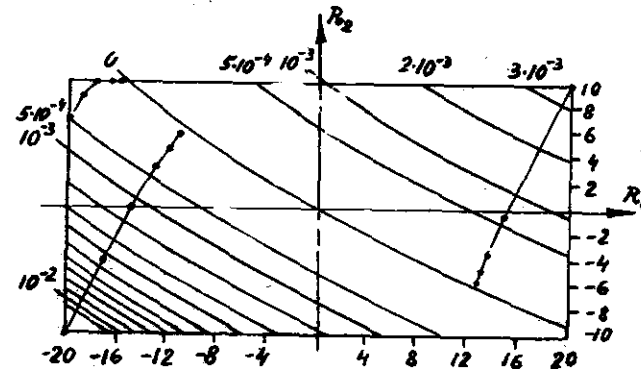


Рис. 11

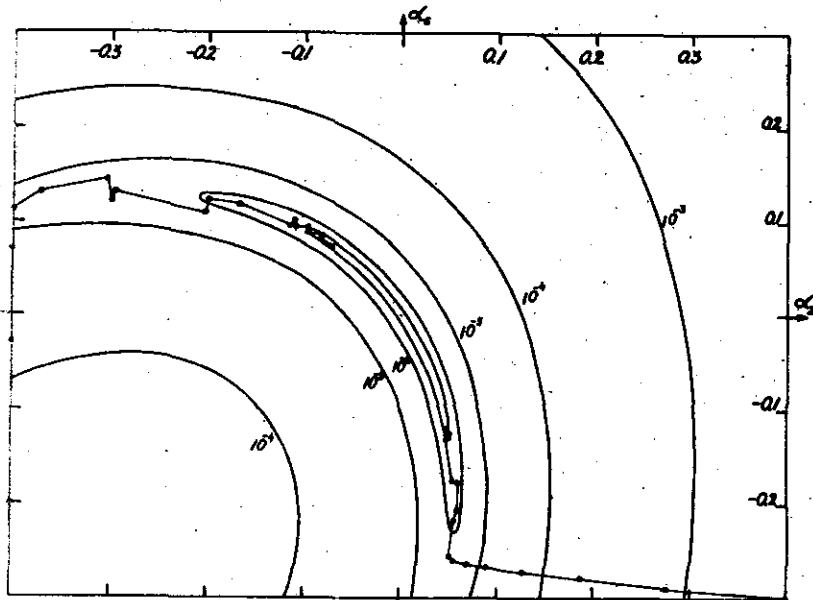


Рис. 12

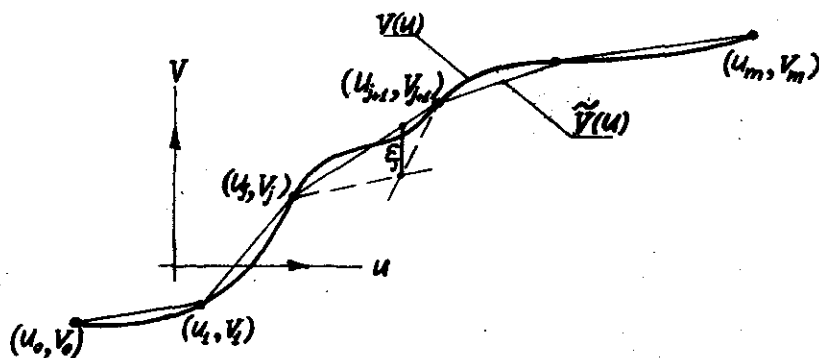


Рис. 13

рианты программы в любой последовательности можно применять для минимизации одной и той же целевой функции F . Процесс заканчивается либо при достаточном уменьшении F , либо тогда, когда во всех вариантах не сделано ни одного шага.

Два примера рельефов с траекториями спуска даны на рис.11 (варьирование длин входных плеч) и рис.12 (варьирование углов между плечами) второго и местного кормиссел.

Пусть задана кусочно-линейная зависимость $\tilde{V}(u)$ выхода от входа, изображаемая на плоскости (u, V) ломаной с вершинами в точках $(u_0, V_0), (u_1, V_1), \dots, (u_m, V_m)$ (рис.13). Допустим, что с помощью изложенной методики удалось добиться требуемых дискретных значений $V_0 = V(u_0), V_1 = V(u_1), \dots, V_m = V(u_m)$ выхода. Тогда в каждом промежутке (u_j, u_{j+1}) отклонение фактического выхода от кусочно-линейного есть

$$V(u) - \tilde{V}(u) = \int_{u_j}^u \mathcal{K}(t, V(t)) dt + b(u - u_j),$$

где

$$b = \frac{V_{j+1} - V_j}{u_{j+1} - u_j}$$

Если известна оценка $k < \mathcal{K}(u, V(u)) < \mathcal{K}$ передаточной функции в промежутке (u_j, u_{j+1}) , то отклонение $V(u) - \tilde{V}(u)$ для $u \in (u_j, u_{j+1})$ оценивается неравенством

$$|V(u) - \tilde{V}(u)| < \frac{(b - k)(\mathcal{K} - b)(u_{j+1} - u_j)}{(\mathcal{K} - k)} = \epsilon_j.$$

Таким образом, предлагаемая методика может быть использована для синтеза непрерывной выходной функции.

Поступила в ред.-изд.отд.
9. I. 1971 г.