

УДК 518:517.949. 12

ПЕРСПЕКТИВНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕПРОЗРАЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

В.А. Луис

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования трехмерных объектов, состоящих из непрозрачных предметов. Процесс моделирования основывается на способе каркасной аппроксимации поверхностей. В качестве математического обеспечения дисплейной техники предлагаются алгоритмы, имеющие высокую экономичность.

Первая задача моделирования непрозрачных предметов состоит в численном представлении их поверхностей. Для американских авторов характерно использование аппроксимации поверхностей многогранниками, что сказывается на алгоритмах построения перспективных изображений [1,2]. У нас применен метод каркасной аппроксимации поверхности с нормалью, основанный на кубической и окружностной разновидности многозначной функции [3,4]. Процесс расчета изображения разбивается на множество одинаковых параллельных ветвей с весьма слабой взаимозависимостью. При решении подобных задач на системе вычислительных машин практически снимаются ограничения на сложность объектов.

Рассмотрим гладкую поверхность с ограниченными главными кривизнами в каждой точке ($|k_1|, |k_2| \leq \kappa$) такую, что её нормали заключены в конусе con_θ с минимальным углом раствора $\theta < \pi$ и вектором оси $\vec{c}_\theta$. Допустимой секущей будем называть пересекающую поверхность прямую $\mathcal{L}$, направляющий вектор которой $\vec{l}$ принадлежит конусу нормалей, так что множество $\{M_i\}$ точек пересечения конечно. Поверхность аппроксимирована с нормалью, если известен алгоритм решения следующих задач:

1) на допустимой секущей для каждой точки M_i найти приближенную точку M'_i , лежащую в ε -окрестности поверхности;

2) для каждой нормали $\vec{n}_{M_i}$ найти приближенный вектор $\vec{n}'_{M_i}$, составляющий с ней угол, не больший δ . Здесь ε и δ — малые величины, характеризующие точность аппроксимации.

Снимем теперь ограничения на направления нормалей и введем криволинейные координаты (u, v) на поверхности. Пусть выбрана конечная сеть $\{u_j, v_k\}$ координатных линий так, что край поверхности (если он имеется) оставлен из линий этой сети. Такую сеть будем называть каркасом. Поверхность разбивается каркасными линиями на элементарные ячейки с максимальным диаметром D_0 . На поверхностях рассматриваемого класса всегда можно выбрать достаточно густой каркас, так чтобы выполнялось неравенство $\kappa D_0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Считая такой каркас заданным, можно ставить задачи 1) и 2), поскольку в этом случае нормали во всех точках произвольной ячейки заключены в конусе con_θ .

Идея каркасной аппроксимации состоит в сведении этих задач к задачам интерполяции плоских кривых. Пусть дана некоторая прямая $\mathcal{L}$. Вычисляя коэффициенты зацепления прямой $\mathcal{L}$ с контурами ячеек каркаса, определим те из них, для которых прямая $\mathcal{L}$ является секущей. В четырех угловых точках контура ячейки, где пересекаются каркасные линии, известны векторы нормалей к поверхности и можно указать минимальный конус $\text{con}_{2\theta}(\vec{c}_{2\theta})$ ($\vec{c}_{2\theta}$ — ось конуса), содержащий эти нормали. Все нормали рассматриваемой ячейки заведомо заключены в конусе $\text{con}_{2\theta}(\vec{c}_{2\theta})$ (с углом раствора 2θ), соосном с con_θ . Если направляющий

вектор $\vec{e}$ принадлежит конусу $\text{con}(2\theta - \nu)$, то прямая L является допустимой секущей и можно решать задачи 1), 2).

Пусть M — одна из точек $\{M_i\}$, а P — некоторая плоскость, содержащая прямую L . Контур рассматриваемой ячейки пересекает одну из полуплоскостей по множеству $\{P_+\}$, вторую — по множеству $\{P_-\}$. В сечении рассматриваемой ячейки плоскостью P имеется содержащая точку M связанная кривая S , концы которой $P_+ \in \{P_+\}$ и $P_- \in \{P_-\}$ (рис. 1).

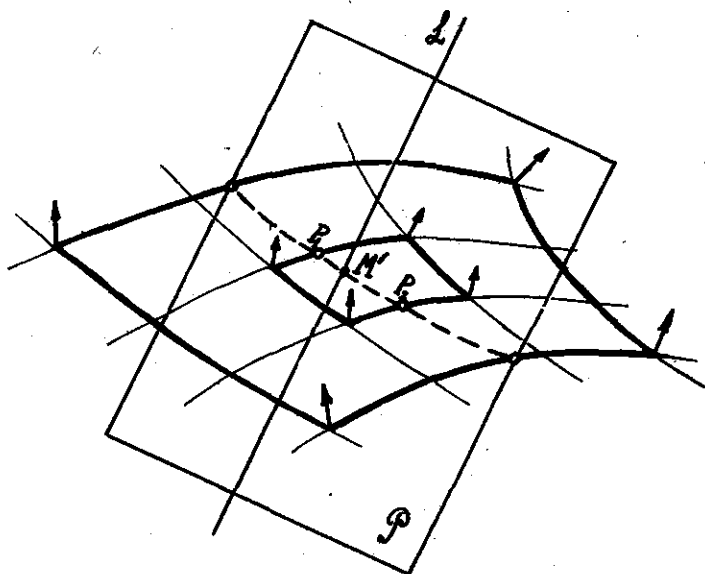


Рис. 1

Во всех точках этой кривой S нормали к поверхности уклоняются от плоскости P на угол, не превосходящий величины $3\theta - \nu$, а кривизна k_s кривой S удовлетворяет неравенству

$$|k_s| \leq \frac{\kappa}{\cos(3\theta - \nu)}$$

Точку M' найдем как точку пересечения прямой L с кривой T , интерполирующей плоскую кривую S . Оценка погрешности $E(k_s)$ плоской интерполяции является вместе с тем оценкой качества аппроксимации поверхности, так как E — окрестность кривой S входит в E — окрестность поверхности. Для увеличения числа узлов интерполяции необходимо принимать во внимание контуры ячеек, охватывающих элементарную.

Для определения направления приближенной нормали нужно проделать процедуры построения интерполяционных кривых, по меньшей мере в двух различных плоскостях P' и P'' , получить приближенные точки пересечения с допустимой прямой (M' и M'') и векторы $\vec{e}'$ и $\vec{e}''$, касательные к интерполяционным кривым в этих точках. Тогда направление приближенной нормали дается (с точностью до знака) векторным произведением $[\vec{e}' \times \vec{e}'']$. Если α — угол между плоскостями P' и P'' , τ — оценка угловой погрешности плоской интерполяции, то уклонение приближенной нормали от истинной оценивается неравенством:

$$\sin \delta < \frac{2\tau}{\sqrt{(2\tau)^2 + 1 - [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos \alpha]^2}}$$

Задача отыскивания узлов интерполяции связанного сечения S оказывается нетривиальной в случае, когда проекция контура ячейки на плоскость Q , перпендикулярную вектору $\vec{e}$, имеет самосовпадения. Рассмотрим на плоскости кусочно-аналитический замкнутый контур с выбранным положительным направлением обхода (рис. 2). Самосовпадения, число которых в силу аналитичности конечно, возможны в отдельных точках

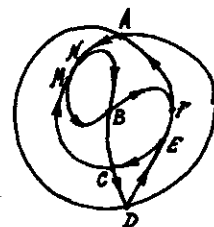


Рис. 2

(A, B, C, D) и по целым дугам (EF, MN). Самосовпадение, в котором имеют место взаимопереходы участков контура с одной стороны на другую, называем самопересечением (точки A, B, C дуга MN). Самосовпадение с односторонними подходами называем самокасанием (точка D , дуга EF).

Контур без самопересечений есть

простой контур. Для контура с самопересечениями введем понятие разбиения. Параметризуем контур. Каждому участку (j) контура соответствует на оси параметра некоторый отрезок $seg(j)$, каждому самопересечению W — два различных отрезка $seg_1(W)$ и $seg_2(W)$. Рассмотрим участок (0). Пусть при прохождении этого участка в положительном направлении имеет место переход через участок (1) справа налево (самопересечение G) и затем переход через участок (2) слева направо (самопересечение H). Пусть, кроме того, на контуре не существует самопересечений W такого, что $seg_1(W) \cap seg(0) \neq \emptyset$ и $seg_2(W) \cap seg(0) \neq \emptyset$. Дуга $G_0 H_0$ выходит из самопересечения G в направлении (0) и входит в H в направлении (0) (рис. 3, а).

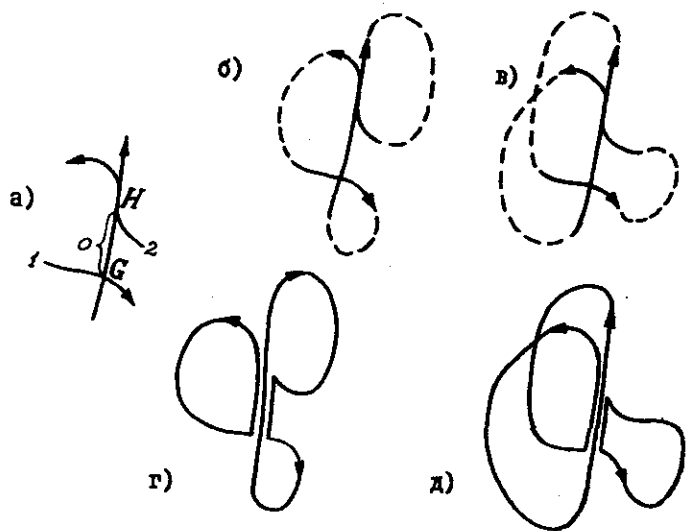


Рис. 3

Имеются только два варианта порядка прохождения самопересечений G и H при полном обходе контура: либо последовательность дуг $H_0 H_2 - H_2 G_1 - G_1 G_0 - G_0 H_1$ (рис. 3, б), либо $H_1 G_1 - G_1 H_2 - H_2 G_2 - G_2 H_0$

(рис. 3, в). В каждом из вариантов имеется дуга, непосредственно связывающая направления (1) и (2): в случае (3, б) это дуга $H_2 G_1$, в случае (3, в) — дуга $G_1 H_2$. Разобьем данный контур на два следующим образом: в случае (3, б) один из подконтуров есть последовательность дуг $H_2 G_1 - G_1 H_1$, другой — последовательность $H_1 G_2 - G_2 H_2 - H_2 G_0 - G_0 H_0$ (рис. 3, г); в случае (3, в) один из подконтуров есть $H_1 G_0 - G_0 H_2$, второй — $H_2 G_0 - G_0 H_1 - H_1 G_1 - G_1 H_0$ (рис. 3, д).

Полученную совокупность двух контуров назовем разбиением исходного контура. Каждый из контуров этого разбиения вместо самопересечений G и H имеет, самое большее, самосовпадения. Таким образом, по сравнению с исходным контуром его разбиение содержит хотя бы на два самопересечения меньше. Производя аналогичные действия с каждым из двух контуров разбиения, затем с каждым контуром их разбиений и т.д., приходим к совокупности контуров, каждый из которых имеет не более одного самопересечения. Эту совокупность назовем полным разбиением. Полное разбиение не единственно, но число различных полных разбиений конечно.

Обвращаясь к вопросу об отыскании узлов интерполяции связного сечения S , введем в точках края ячейки вектор $\vec{B}$, ортогональный вектору $\vec{n}$ (нормали к поверхности) и указывающий внутрь ячейки. Условимся задавать на контуре B (край ячейки) положительное направление обхода вектором $\vec{V}$ таким, что последовательность $\vec{V}, \vec{B}, \vec{n}$ образует репер правой ориентации. Этот выбор определяет естественным образом положительное направление обхода контура B (проекция края ячейки на плоскость Q) (рис. 4). В полном разбиении те простые контуры, которые обходятся в положительном направлении, назовем положительными простыми контурами.

Плоскость P проектируется на плоскость Q в прямую, которая пересекает B по множествам $\{\tilde{P}_1\}$ и $\{\tilde{P}_2\}$. На рис. 4 точки $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ образуют $\{\tilde{P}_1\}$, точки $\tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F}$ образуют $\{\tilde{P}_2\}$. Пусть точка $\tilde{P}_1 \in \{\tilde{P}_1\}$, точка $\tilde{P}_2 \in \{\tilde{P}_2\}$. Рассмотрим следующие контуры: а) дуга $\tilde{P}_2 \tilde{P}_1$ — отрезок $[\tilde{P}_1 \tilde{P}_2]$; б) дуга $\tilde{P}_1 \tilde{P}_2$ — отрезок $[\tilde{P}_2 \tilde{P}_1]$. Положительное направление обхода на этих контурах определяется положительным направлением на B .

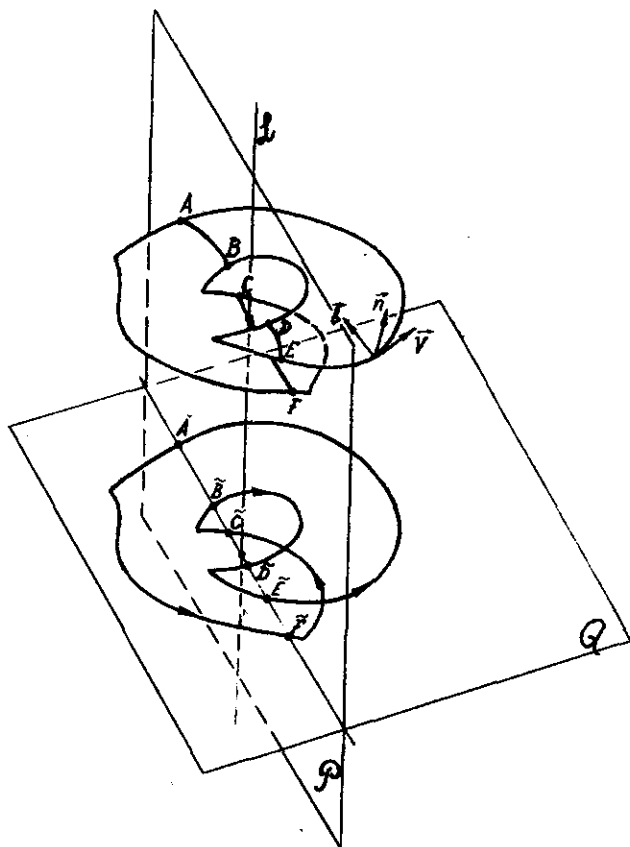


Рис. 4

Точки P_1 и P_2 принадлежат связному сечению, если у контуров (а) и (б) существуют полные разбиения, состоящие из положительных простых контуров.

Выбор каркасной аппроксимации в качестве средства матема-

тического моделирования определил специфику алгоритмов построения изображений. Эти алгоритмы приводятся здесь в упрощенной форме.

Штриховое изображение

В 3-мерном пространстве выбрана система прямоугольных координат (X, Y, Z) . Плоскость XOY является картинной плоскостью. Перспективное изображение точек пространства получается на картинной плоскости в результате центральной проекции с центром F , лежащим на оси OZ . Точка M' — образ точки M . Координаты образа вычисляются по формулам:

$$X_{M'} = \left| \frac{m Z_F}{Z_M - Z_F} \right| X_M, \quad Y_{M'} = \left| \frac{m Z_F}{Z_M - Z_F} \right| Y_M, \quad (1)$$

где m — масштабный коэффициент (рис.5).

Каркас поверхности сам по себе прозрачен, его части не экранируют друг друга. В этом смысле американское название — проволочная структура (wire structure) — весьма удачно. Расчет изображения каркаса не представляет трудности. Линии каркаса аппроксимируются вписанными ломаными. Если кривизна линии не превосходит величины K , а длины звеньев ломаной не превышают величину L ($LK < 2$), то ломаная уклоняется от кривой менее, чем на величину

$$\epsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{LK}{2}\right)^2}}{K} \quad (2)$$

По формулам (1) вычисляются координаты проекций вершин ломаных. Эти проекции определяют в картинной плоскости решетку, которая является изображением каркаса тем более точным, чем меньше величина ϵ формулы (2).

Получение неперспективного изображения непрозрачного объекта существенно отличается от проецирования каркасов. Плоское изображение создает полный зрительный образ тогда, когда оно учитывает взаимное экранирование элементов объекта при заданных точке зрения, ракурсе и расположении предметов. Штриховое изображение непрозрачного объекта есть совокупность изображе-

ний аппроксимирующих каркасов без экранируемых элементов.

Телесный угол Ω , под которым объект виден из P , разбивается на элементарные телесные углы ω . Чтобы определить, видна или не видна точка M , используются два критерия. Первый состоит в проверке знака скалярного произведения $\lambda = (\vec{n}_M, \vec{PM})$ векторов $\vec{n}_M$ (орт внешней нормали к поверхности в точке M) и $\vec{PM}$ (луч зрения). Если $\lambda > 0$, точка M не видна. При $\lambda \leq 0$ вступает в силу второй критерий. Анализируется положение точек объекта по отношению к точке M и центру P . Если в элементарном телесном угле ω между центром P и точкой M нет других точек, M считается видимой. В ином случае образ точки M исключается из рисунка.

Изменения ракурса и точки зрения моделируются вращением и сдвигом осей (X, Y, Z) относительно системы (x, y, z), жестко связанной с объектом. Перемещения предметов в объекте определяются движением координатных систем (ξ, η, ζ), связанных с каждым предметом (рис.5).

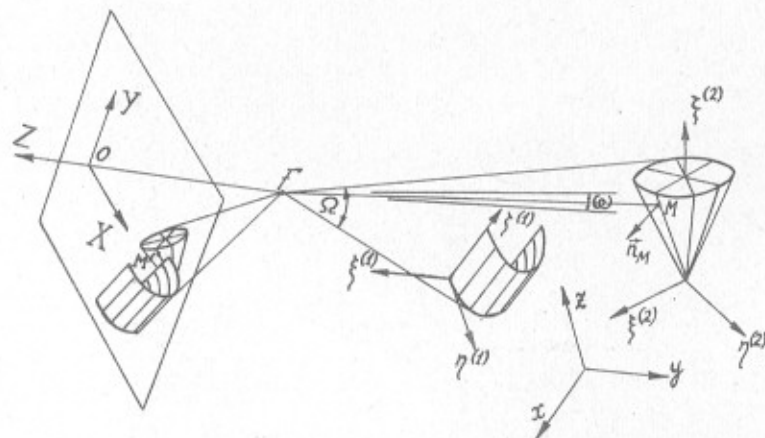


Рис. 5

На рис.6 даны примеры штриховых изображений движущихся объектов: а)-замкнутая выпуклая поверхность; б)-две незамкну - тые поверхности. Программы моделирования и расчета изображений

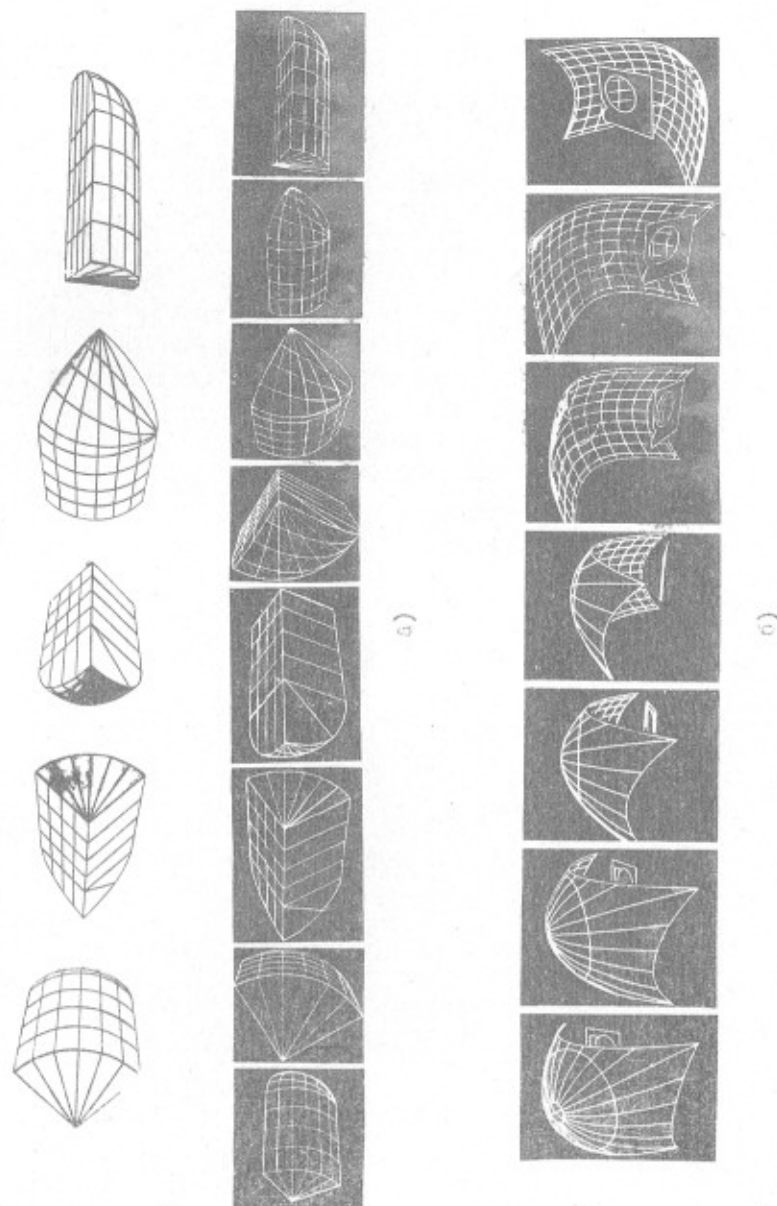


Рис.6. Примеры движущихся объектов.

выполнены при участии Е.И. Невзоровой. Снимки получены на аппаратуре, созданной в Институте математики СО АН СССР [5].

Тоновое изображение

Реальные предметы воспринимаются зрением благодаря контрастам окраски или яркости. С помощью ЦВМ можно моделировать вариации освещенности поверхностей объекта и контрасты яркости отдельных участков.

Пусть заданы: 1) положение в пространстве источника света R и его светимость I ; 2) зависящий от точки объекта коэффициент q_M , характеризующий отражательную способность поверхности в этой точке. В каждой точке объекта вычисляется $\cos \angle$ — косинус угла между внешней нормалью $\vec{n}_M$ и направлением $\vec{MR}$ на источник света (рис. 7). Освещенность в точке M есть

$$E_M = \frac{I \cos \angle}{|\vec{MR}|^2} + E_0,$$

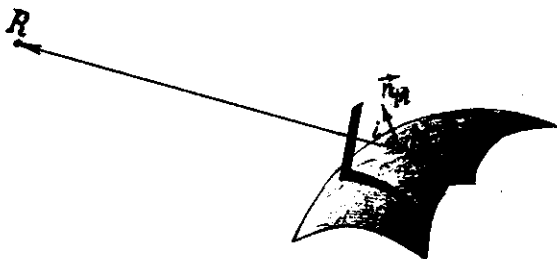


Рис. 7

где E_0 — заданная минимальная величина освещенности. Если $\cos \angle \leq 0$, точке приписывается яркость $B_M = q_M E_0$, величина которой округляется до ближайшего значения принятой шкалы градаций яркости. При $\cos \angle > 0$ проверяется расположение точек объекта по отношению к источнику R и точке M . Если источник экранирован,

точке приписывается яркость $B_M = q_M E_0$ — так моделируются тени. Если между R и M нет других точек объекта, яркость точки M есть $B_M = q_M E_M$.

Изображение в черно-белых полутонах — тоновое изображение — реализуется с помощью телевизионной техники. Для некоторых работ может оказаться удобным сочетание штрихового и тонового способов рисования. Однако следует иметь в виду, что затраты времени на последовательное нанесение штрихов огромны в сравнении с потребностями сканирующего рисования.

Экономичность алгоритмов

Скорость вычислительного и изобразительного процессов имеет решающее значение для моделирования развития объектов в масштабе истинного времени (real time). Телевизионный стандарт накладывает верхнюю границу на время t счета одного кадра. За время $t < 0.04$ сек необходимо успеть обработать всю информацию $\mathcal{H}$, содержащуюся в задании объекта, с тем, чтобы получить матрицу изображения. У первых алгоритмов зависимость времени t от количества информации объекта была квадратичной $t \sim \mathcal{H}^2$. В настоящее время имеются сообщения [6] о том, что достигнут уровень мультипликативной линейно-логарифмической зависимости $t \sim \mathcal{H} \log \mathcal{H}$. Для предлагаемых алгоритмов свойственна линейная зависимость времени счета от обрабатываемой информации $t \sim \mathcal{H}$. Но даже и в этом идеальном случае проблема ускорения вычислительного процесса остается. Использование систем вычислительных машин [7] представляется реальным путем решения этой проблемы.

Специфика задачи моделирования в истинном времени состоит в том, что здесь быстроедействие оказывается важнее эффективности. Обозначим N минимальное число простых операций, необходимых для полного решения задачи. Пусть имеется запись алгоритма в виде P_i — кортежа длины n_i , то есть в форме последовательности из n_i параллельных операций (в терминах [7]). Величина $\frac{N}{n_i}$ показывает, во сколько раз уменьшается время при реализации параллельного алгоритма на системе из достаточного количества машин по сравнению с временем решения на одной машине. Минимум этих величин по всевозможным параллельным записям дан-

ного алгоритма есть показатель параллельности этого алгоритма:

$$\pi = \min \left\{ \frac{N}{n_i} \right\}$$

Нахождение методики позволяет, в принципе, вести вычисления для каждой точки объекта по независимой ветви. Эти ветви частично встречаются только при сортировке точек, принадлежащих одному ω . Предлагаемые алгоритмы имеют показатель параллельности

$$\pi = \frac{N(1+\epsilon)}{1+\epsilon \log_2 N} \quad (\epsilon \approx 10^{-3} - 10^{-2}),$$

возрастающий с увеличением N . Если алгоритм реализуется с максимальной параллельностью, то время счета кадра с увеличением информативности объекта растет лишь по логарифмическому закону $t \sim \log N$.

Реализация параллельных вариантов алгоритмов на вычислительной системе приводит к коллекторной схеме обмена "все-одной" [8]. Доля обменных операций не превышает процента от сумм всех выполняемых.

Математическое моделирование развивающихся объектов в сочетании с дисплеем может принести пользу во многих областях научно-технического творчества. Его роль особенно велика в решении таких проблем, как разработка тренажеров - имитаторов и создание автоматизированных систем проектирования (АСП).

Л и т е р а т у р а

1. WARNOCK J.E. The hidden line problem and the use of halftone displays. Pertinent concepts in computer graphics. Proceedings of the second conference on computer graphics. University of Illinois, 1969.
2. BOUKNIGHT W.J. A procedure for generation of three-dimensional half-toned computer graphics presentations. Communications ACM, 1970, vol. 13, N 9.
3. ВАХЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многочленами. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 38.
4. ЛЕУС В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 38.

5. АЛЕКСЕЕВ В.А., ЛЬВОВ В.А. Применение управляемых ЦМ для оперативной обработки результатов эксперимента. - "Известия Сибирского отделения АН СССР", секция технических наук, Новосибирск, октябрь 1969, № 13.

6. IVAN E Sutherland. Computer Displays. Scientific American, 1970, June, N 6

7. КИРЕННОВ В.В., КОСАРЕВ В.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука" СО, 1966.

8. КОСАРЕВ В.Г. О структурах вычислительных систем, устойчивых к изменению числа машин. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 42.

Поступила в ред.-изд.отд.

3. I. 1971 г.