ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1972 год Выпуск 51

УДК 518.9:681.3.06

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Г. Хорошевский, Э.А. Талныкин

Поставлены четыре теоретико-игровые задачи, решения которых позволяют просто организовать стохастически оптимальное функционирование однородных вычислительных систем.

Однородная вычислительная система (ОВС) [1]-это программируемая регулярная структура, образованная из элементарных машин (ЭМ). Очевидно, чем больше число ЭМ в структуре, тем выше суммарная мощность ОВС.

Однако использование потенциальных возможностей ОВС сильно зависит от того, как организовано ее функционирование или как осуществляется процесс решения задач.

Требуется организовать такое функционирование ОВС,при котором в процессе решения задач обеспечивалось бы стохастически оптимальное использование ее машин.

Трудности решения проблемы значительные, так как число ЭМ в ОВС может быть большим (порядка 10^4). В работе при помощи методов теории игр [2] решаются четыре задачи данной проблемы. Возможность такого подхода впервые указана в [3].

§ 1. Задача 1

1. Постановка задачи. Имеется вычислительный центр (ВЦ), который эксплуатирует ОВС. Система состоит из n ЭМ. ВЦ для решения задачи может выставлять по своему усмотрению любое число $i \in E$, $E = \{0,1,2,\dots,n\}$, машин ОВС.

На ВЦ поступает поток задач различных рангов. Считается, что задача имеет ранг $j \in E$, если для выполнения ее программы требуется j машин. Предполагается, что интенсивность потока задач такова, что имеется конечная очередь $\mathcal{I}$ задач всех рангов*) (В настоящее время практически на любом ВЦ имеется конечная очередь задач, ранг которых равен единице.) Время решения задачи $I_i \in \mathcal{I}$ равно t_i, причем в общем случае $t_i \neq 1$ (единице времени).

Пусть $\mathcal{I}^j$ – подмножество задач,имеющих ранг*), $j \in E$. Ясно, что $\mathcal{I}^j \subset \mathcal{I}$; $\mathcal{I} = \bigcup \mathcal{I}^j$; $\mathcal{I}^j \cap \mathcal{I}^k = \phi$ при $j \neq k$; $j,k \in E$. Допустим, что число элементов подмножества $\mathcal{I}^j \subset \mathcal{I}$, $j \neq 0$, достаточно большое и такое, что допустимо разбиение $\mathcal{I}^j$ на группы, для каждой из которых справедливо:

$$\left|\sum_i t_i - T\right| = O(T),$$

где $\sum_i t_i$ — суммарное время решения задач данной группы, T – некоторое наперед заданное число, которое в дальнейшем будем считать единицей времени. Каждую такую группу подмножества $\mathcal{I}^j \subset \mathcal{I}$ будем называть задачей ранга $j \in E$.

Алгоритмы формирования групп задач,суммарное время решения которых близко к единице измерения, содержатся в [4,5].

Заметим, что если $\mathcal{I}^j = \phi$ при некотором $j \in E$, то $\mathcal{I}^j$ может быть сформировано из задач, ранг которых не более j и время выполнения которых равно единице измерения.

Имеется диспетчер, который в дискретные моменты времени назначает на ОВС задачи различных рангов, но с временем решения, равным 1 (единице времени).

*) Считается, что в процессе функционирования ОВС в любой момент времени $\mathcal{I}^0 \neq \phi$, $\mathcal{I}^0 \subset \mathcal{I}$. Любая задача, принадлежащая $\mathcal{I}^0 \subset \mathcal{I}$, требует для своего решения 0 машин и 1 единицу времени.

Итак, имеется игра I с участием двух игроков: ВЦ и диспетчера. Будем говорить, что ВЦ использует чистую стратегию с номером $i \in E$, если он для решения задач отводит i машин; а диспетчер – чистую стратегию $j \in E$, если он для решения на ОВС назначает задачу с рангом j. Если ВЦ выбирает стратегию с номером i, а диспетчер – стратегию с номером j, то диспетчер "платит" ВЦ сумму c_{ij}, $i,j \in E$. Элементы c_{ij}, $i,j \in E$, составляют матрицу платежей C.

Если ВЦ применяет смешанную стратегию $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, а диспетчер – смешанную стратегию $\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$, то средний платеж вычислительному центру составит

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} p_i \pi_j ,$$

где p_i, π_j – вероятности выбора вычислительным центром стратегии с номером i и диспетчером стратегии с номером j, соответственно.

ВЦ имеет оптимальную смешанную стратегию

$$P^* = \{ p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^* \},$$

а диспетчер – оптимальную смешанную стратегию

$$\Pi^* = \{ \pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_n^* \},$$

такие, что

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} p_i^* \pi_j \geq V \geq \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} p_i \pi_j^* ,$$

$$V = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} c_{ij} p_i^* \pi_j^* .$$

Требуется для заданной матрицы платежей найти решение $\{P^*, \Pi^*\}$ и цену V игры.

Поставленная задача *) может быть решена одним из известных методов [2,6–8].

Алгоритм функционирования ОВС заключается в том, чтобы обеспечить оптимальные смешанные стратегии P^* и Π^*. Это может быть осуществлено при помощи двух случайных механизмов,

*) Возможны игры с учетом веса задач, решаемых на ОВС, а также игры с участием ВЦ и нескольких пользователей.

реализующих распределения вероятностей

$$\{ p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^* \}, \{ \pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_n^* \} .$$

Может оказаться, что любая компонента p_i^*, $i \in E$, вектора P^* будет вероятностью того, что в стационарном режиме функционирования система находится в состоянии i (имеет i исправных машин [9]). Тогда случайный механизм будет естественным. Если это не так, то путем подбора параметров надежности (например, таких, как среднее время восстановления отказавшей ЭМ, число восстанавливающих устройств) можно найти такое распределение вероятностей состояний системы, которое будет достаточно близко к оптимальной смешанной стратегии ВЦ. Если же последнее сделать не удается и ВЦ вынужден применять неоптимальную стратегию, то цена игры для диспетчера будет меньше.

2. Подбор элементов платежной матрицы. Найдено [3], что если i, j – чистые стратегии соответственно ВЦ и диспетчера, то элементы платежной матрицы

$$c_{ij} = \begin{cases} j c_1 + (i-j) c_2 & \text{при } i \geq j , \\ i c_2 + (j-i) c_3 & \text{при } i < j , \end{cases} \qquad \text{(I.I.)}$$

где c_1 – платеж за использование одной машины в течение единицы времени, c_2 и c_3 – штрафы в единицу времени соответственно за простой одной машины и при $(j - i) = 1$, $i, j \in E$.

Наиболее общей будет ситуация, при которой в процессе эксплуатации ОВС на ВЦ будут поступать задачи всех рангов. Тогда игра не должна иметь решения в чистых стратегиях, то есть матрица $\|c_{ij}\|$ не должна иметь седловых точек [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Матрица $\|c_{ij}\|$ не имеет седловых точек тогда и только тогда, когда

$$c_1 < \min\{ c_2 , c_3 \}.$$

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть матрица $\|c_{ij}\|$ не имеет седловых точек. Из (I.I) следует, что максимальным элементом нулевого столбца является c_{n0}. Так как по условию $\|c_{ij}\|$ не имеет седловых точек, то c_{n0} не должен быть минимальным в своей строке. Минимум в последней строке, как видно из (I.I), должен достигаться в c_{nn}. Значит, $c_{nn} < c_{n0}$; но так как $c_{n0} = n c_2$, а $c_{nn} = n c_1$, то $c_1 < c_2$, Проведя аналогичные рассуждения с нулевой строкой и последним столбцом, получим $c_1 < c_3$.

Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Если $c_1 < \min\{c_2, c_3\}$, то легко увидеть, что диагональные элементы являются минимальными в своей строке и в своем столбце, причем минимум строгий. Следовательно, матрица не имеет седловых точек.

Утверждение I доказано.

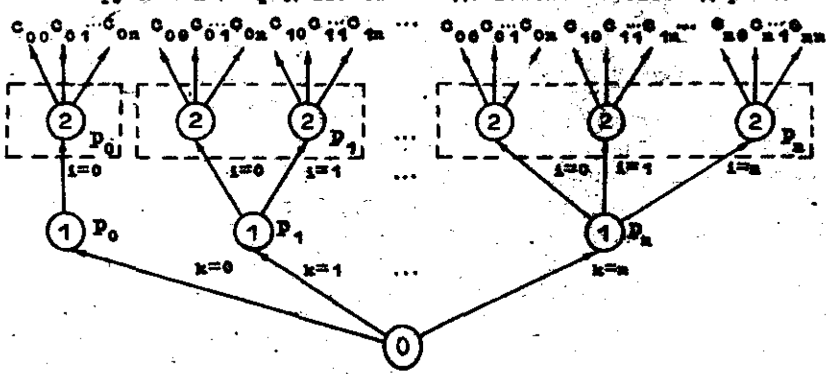
§ 2. Задача II

I. Постановка задачи. В игре I предполагалось, что надежность ОВС позволяет ВЦ выставлять для решения задач столько машин, чтобы удовлетворить оптимальной смешанной стратегии. В игре II будем считать, что распределение вероятностей состояний системы $P=\{p_k\}$, $k\in E$, не может быть изменено. Однако будем считать, что если ОВС находится в состоянии $k\in E$, то ВЦ в соответствии с некоторым законом может отвести для решения задач $0\le i\le k$ машин. Остальные условия игры II совпадают с условиями игры I.

Рассматривается следующая трехходовая игра.

Нулевой ход делает случайный механизм, который выбирает число $k\in E$ с вероятностью p_k. ВЦ, зная k, выставляет для решения i машин, где $0\le i\le k$ (I-й ход). Диспетчер независимо от этого, зная только p_k, $k\in E$, назначает задачу ранга $j\in E$ (2-й ход) и платит ВЦ c_{ij} денежных единиц (c_{ij} зависят только от i, j и не зависят от того, при каком k выбрано i, $0\le i\le k$).

Игру II можно представить в виде топологического дерева.



Цифра в кружке означает номер хода. Число стрелок, выходящих из вершин дерева, есть число альтернатив. При осуществлении хода диспетчеру неизвестно, в какой из вершин с номером 2 он находится, но ему известны вероятности p_k, $k\in E$, нахождения в любом из объединений этих вершин.

Игру II можно представить в матричном виде. В самом деле, пусть чистой стратегией ВЦ будет вектор

$$\{i_0, i_1, \dots, i_n\},$$

где $0\le i_k\le k$, $k\in E$ (это означает, что ВЦ выбирает i_k машин, если есть k исправных). Всего у ВЦ $(n+1)!$ таких стратегий. Диспетчер имеет $(n+1)$ чистую стратегию, так как он может назначить задачу любого ранга $j\in E$.

Если ВЦ применяя чистую стратегию $\{i_0,i_1,\dots,i_n\}$, а диспетчер – чистую стратегию j, то диспетчер платит суммы $c_{i_0 j}, c_{i_1 j}, \dots, c_{i_n j}$ соответственно с вероятностями $p_0, p_1, \dots, p_n$, то есть математическое ожидание платежа будет равно

$$C_{i_0 i_1 \dots i_n, j} = \sum_{k=0}^{n} p_k c_{i_k j}, \qquad (2.I.)$$

где $0\le i_k\le k$, $k, j\in E$.

Таким образом, имеется игра с матрицей $\| C_{i_0 i_1\dots i_n, j}\|$ порядка $[(n+1)!]\times(n+1)$. Пусть смешанной стратегией ВЦ будет

$$\mathcal{P} = \{P_{i_0 i_1\dots i_n}\}, \qquad (2.2)$$

$$P_{i_0 i_1 \dots i_n}\ge 0, \quad \sum P_{i_0 i_1\dots i_n} = 1,$$

где суммирование происходит по всем наборам $\{i_0,i_1,\dots,i_n\}$, $0\le i_k\le k$, $k\in E$. Смешанной стратегией диспетчера будет $\Pi=\{\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_n\}$.

Игра II решается стандартно. При решении полезно учесть, что матрица платежей игры II образуется лишь только из $(n+1)^2$ величин c_{ij} и n величин p_i (см. формулу (2.I)).

Сравним цены игры I и игры II.

2. Свойства цены игры II

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Цена V игры I не меньше цены v игры II, $V\ge v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [2], что два вектора

$$P^* = \{ p_0^*, p_1^*, \dots, p_m^* \}, \qquad (2.3)$$

$$\Pi^* = \{ \pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_n^* \} \qquad (2.4)$$

и число V являются тогда и только тогда решением игры с матрицей платежей $\| c_{ij} \|$ порядка $m \times n$, когда

$$p_i^* \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{m} p_i^* = 1, \ \pi_j^* \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{n} \pi_j^* = 1,$$
$$\sum_{j=0}^{n} c_{ij} \pi_j^* \leqslant V \leqslant \sum_{i=0}^{m} c_{ij} p_i^*, \qquad (2.5)$$

где $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Если (2.3),(2.4) – решение игры I, то $m = n$, выполняется (2.5), а значит, и

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{j=0}^{n} c_{i_k j} \pi_j^* \leqslant V \qquad (2.6)$$

для любого набора $\{ i_0, i_1, \dots, i_n \}$. С другой стороны, если

$$\mathcal{P}^* = \{ P_{i_0 i_1 \dots i_n} \}$$

есть оптимальная смешанная стратегия НЦ в игре П (2.2), то из (2.5) видно, что

$$\sum_{\{i_0, i_1, \dots, i_n\}} c_{i_0 i_1 \dots i_n j} P^*_{i_0 i_1 \dots i_n} \geqslant v$$

для всех j. Следовательно,

$$\sum_{\{i_0, i_1, \dots, i_n\}} P^*_{i_0 i_1 \dots i_n} \left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_k c_{i_k j} \pi_j^* \right] \geqslant v, \qquad (2.7)$$

а значит, хотя бы для одного набора $\{ i_0, i_1, \dots, i_n \}$ выражение в квадратных скобках в (2.7) больше или равно v и на основании (2.6) меньше или равно V. Таким образом, $V \geqslant v$, ут-

верждение 2 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Независимо от смешанной стратегии НЦ (2.2) цена игры П для диспетчера не больше цены игры I, если он применяет оптимальную смешанную стратегию диспетчера (2.4) игры I.

Это видно из (2.2), (2.6), (2.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Игра называется вполне смешанной [8], если в любых оптимальных стратегиях обоих игроков отсутствуют нулевые компоненты.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Независимо от смешанной стратегии НЦ (2.2) цена игры П равна цене вполне смешанной игры I, если диспетчер применяет оптимальную стратегию диспетчера игры I.

В самом деле, если игра I вполне смешанная, то [2]:

$$\sum_{j=0}^{n} c_{i_k j} \pi_j^* = V.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_k c_{i_k j} \pi_j^* = V,$$

и для любой смешанной стратегии НЦ (2.2)

$$\sum_{\{i_0, i_1, \dots, i_n\}} P_{i_0 i_1 \dots i_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_k c_{i_k j} \pi^* = V.$$

Из последнего видно, что $v = V$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. При условии, что диспетчер игры П применяет оптимальную смешанную стратегию диспетчера вполне смешанной игры I, цена игры П реализуется ($v=V$) даже, если ВЦ применяет чистую стратегию $\{0,1,\dots,n\}$ (назначает столько ЭМ, сколько есть исправных, или берет $i_k=k$, $k\in E$).

Это утверждение, по сути дела, является следствием утверждения 4.

§ 3. О методах решения игр

Вычислительные трудности существующих методов решения прямоугольных игр не являются препятствием к их применению при организации функционирования ОВС. В самом деле, для заданных ОВС и матрицы платежей требуется только один раз найти решение. Кроме того, это решение может быть найдено при помощи исследуемой вычислительной системы.

В качестве иллюстрации здесь будет рассмотрен лишь итеративный метод Брауна*) [6,7], который легко реализуется как на вычислительной машине, так и на ОВС. Скорость сходимости итеративного процесса характеризуется величиной

$$|V(\ell)-V| < \frac{\delta}{2n-2\sqrt{\ell}},$$

где V – истинное значение цены игры с $(n\times n)$ – матрицей платежей, $V(\ell)$ – значение цены игры после ℓ-й итерации, δ – некоторый постоянный масштабный коэффициент.

1. Метод Брауна. Пусть $C=\|c_{ij}\|$ есть $(n\times n)$ – матрица; $C_{i\cdot}$ означает i-ю строку C, а $C_{\cdot j}$ – j-й столбец.

Рассмотрим следующие последовательности векторов:

$$X(0),X(1),X(2),\dots,X(\ell),\dots,$$
$$Y(0),Y(1),Y(2),\dots,Y(\ell),\dots,$$

где

$$X(\ell)=\{x_0(\ell),x_1(\ell),\dots,x_n(\ell)\},$$
$$Y(\ell)=\{y_0(\ell),y_1(\ell),\dots,y_n(\ell)\},$$

*) Анализ существующих методов решения сложных прямоугольных игр, например, можно найти в [2].

$x_i(\ell)$, $i\in E$, есть относительная оценка выигрыша ВЦ, если он в ℓ-й итерации выбирает i-ю строку матрицы; $y_j(\ell), j\in E$, есть относительная оценка выигрыша диспетчера, если он в ℓ-й итерации выбирает j-й столбец матрицы C.

В ℓ-й итерации ВЦ и диспетчер выбирают соответственно строку i и столбец j, для которых

$$x_i(\ell)=\max_{0\le i\le n}\{x_i(\ell)\}=\max X(\ell),$$

$$y_j(\ell)=\{\min_{0\le j\le n} y_j(\ell)\}=\min Y(\ell).$$

Учитывая таким образом найденные i и j, игроки пересматривают свои оценки значений строк и столбцов для (ℓ+1)-й итерации:

$$X(\ell+1)=X(\ell)+C_{\cdot j},$$
$$Y(\ell+1)=Y(\ell)+C_{i\cdot}.$$

Очевидно, что

$$X(\ell)=X(0)+\sum_{j=0}^{n}\ell\pi_j(\ell)\cdot C_{\cdot j},$$

$$Y(\ell)=Y(0)+\sum_{i=0}^{n}\ell p_i(\ell)\cdot C_{i\cdot},$$

где $\ell\pi_j(\ell)$ равно числу выборов столбца j, а $\ell p_i(\ell)$ равно числу выборов строки i в матрице C при реализации ℓ итераций. Тогда

$$P(\ell)=\{p_0(\ell),p_1(\ell),\dots,p_n(\ell)\},$$
$$\Pi(\ell)=\{\pi_0(\ell),\pi_1(\ell),\dots,\pi_n(\ell)\}$$

будут смешанными стратегиями ВЦ и диспетчера, которые сходятся к оптимальным стратегиям P^* и Π^*.

Практически можно положить, что

$$X(0)=Y(0)=0.$$

В этом случае $\frac{1}{\ell}X(\ell)$ является средним взвешенным столбцов, $\frac{1}{\ell}Y(\ell)$ – средним взвешенным строк матрицы C. Следовательно,

$$\frac{1}{\ell}\min Y(\ell)\le V\le\frac{1}{\ell}\max X(\ell).$$

Доказано [6,7], что

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{\min Y(\ell)}{\ell} = \lim_{\ell \to \infty} \frac{\max X(\ell)}{\ell} = V.$$

Итак, при больших ℓ

$$P^* \approx P(\ell), \quad \Pi^* \approx \Pi(\ell),$$

$$V \approx \frac{1}{2\ell}\left[\max X(\ell) + \min Y(\ell)\right] = V(\ell).$$

В качестве меры близости $V(\ell)$ к V можно взять

$$\frac{1}{\ell}\left[\max X(\ell) - \min Y(\ell)\right] \leq e, \qquad (3.I)$$

где $e > 0$.

2. Алгоритм Брауна на языке АЛГОЛ-60. При реализации алгоритма выдаются значения цены игры V, стратегий P и Π и признак $g = 0$, если выполняется условие (3.I); иначе через каждые r итераций выдаются значения

$$\frac{1}{\ell} \max X(\ell), \frac{1}{\ell} \min Y(\ell).$$

```
begin integer n; read (n);
begin array P, П, X, Y, [0:n];
real c1, c2, c3, x, y, V, e; integer i, j, k, l, g, r;
read (c1, c2, c3, e, r);
for k:=0  step 1 until  n do X [k]:=Y[k]:=P[k]:=П[k]:=0; l:=0;
    i:=n;  g:=0;  M: g:=g+1 ; P[i]:=P[i]+ 1; for k:=0  step 1
    until n do Y[k]:=Y[k]+(if k ≤ i then c1 x k+c2 x (i-k)else
    c2 x i+c3 x (k-i)); y:=Y[0]; j:=0;  for k:=1 step 1 until
    n do if Y[k] < y then begin y:=Y[k]; j:=k  end; for k:=0
    step 1 until n do X[k]:=X[k]+(if j ≤ k then c1 x j+c2   x
    (k-j) else c2 x k+c3 x (j-k)); П[j]:=П[j]+ 1;     x:=X[0];
    i:=0; for k:=1  step 1  until n do if X[k]> x then  begin
    x:=X[k]; i:=k end; l:=l+1;  if (x-y)/l ≤ e  then go to N;
    if g=r  then begin x:=x/l;  y:=y/l; g:=0; print (x,y)end;
    go to M; N: V:=(x+y)/(2xl); g:=0; for k:=0 step 1 until n
    do begin P[k]:=P[k]/l; П[k]:=П[k]/l end; print  (V,P,П,g)
    end end
```


Легко заметить, что вычислительный процесс при отыскании оптимальных смешанных стратегий методом Брауна состоит из независимых циклов сложения компонент векторов. Это существенно упрощает задачу написания параллельного алгоритма, эффективного [I] при реализации на однородной вычислительной системе.

3. Параллельный алгоритм. Как было показано выше, при организации функционирования ОВС требуется решить игру с квадратной матрицей $\|c_{ij}\|$ порядка n. Если исследуемая ОВС имеет высокую производительность, то число ее ЭМ может быть большим ($10^2 \leq n \leq 10^4$). Поэтому при решении игры численными методами требуется выполнить большое количество операций и запомнить большой объем информации. Указанные трудности не всегда могут быть преодолены даже при помощи вычислительной машины.

Однако численные методы решения сложных игр обладают тем достоинством, что для них легко написать параллельный алгоритм [I](P - алгоритм). Здесь будет приведен P - алгоритм Брауна, который реализуется на n машинах.

Итак, пусть все машины ОВС пронумерованы и в каждой машине имеется ячейка памяти с ее номером $0 \leq N \leq n$. Положим в N -й машине $a[i] = c_{iN}$, $b[j] = c_{Nj}$, $i, j \in E$. Пусть также в каждой N -й ЭМ имеется ячейка памяти для хранения N -ых компонент векторов $P(\ell)$, $\Pi(\ell)$, $X(\ell)$, $Y(\ell)$ для итерации $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, то есть для хранения $p_N(\ell)$, $\pi_N(\ell)$, $x_N(\ell)$, $y_N(\ell)$. Кроме того, имеются ячейки для V, i, j, k, ℓ, n, r, u, v, w, α, e, где α - целое число ($0 \leq \alpha \leq n$), служащее для выбора значения вектора $Y(1) = C_{\alpha}.;$ k, u, v, w - вспомогательные величины, смысл которых ясен из P - алгоритма; остальные величины были определены ранее.

Будем считать, что P - оператор вида $\langle A \rangle$ означает следующее: A реализуется в каждой машине, A - операторы, написанные на языке АЛГОЛ-60.

Введем следующие P -операторы:

λ_1 : $\langle\ P := \Pi := X := Y := \ell := 0;\ \rangle$

λ_2 : $\langle\ i := \alpha;\ \rangle$

λ_3 : $\langle\ Y := Y + a[i];\ \rangle$

λ_4 : $\langle\ \underline{if}\ i = N\ \underline{then}\ P := P + 1;\ \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_5$: $\langle\, u := v := Y;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_6$: $\langle\, j := N;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_7$: $\langle\, k := 0;\, \rangle$

$\dot{L}_8$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ k = N\ \underline{\textbf{then}}\ \gamma := 0\ \underline{\textbf{else}}\ \gamma := 1;\, \rangle$

$\dot{H}_9$: оператор настройки (возможны два способа передачи информации на регистр настройки: либо из ЭМ, у которой $\gamma = 0$, во все остальные, либо из каждой ЭМ в собственный регистр настройки; содержимое регистра определяет вид соединительной функции коммутатора каналов связи машин и участие машины в выработке обобщенного признака Ω);

$\dot{O}_{10}$: оператор обмена (ЭМ, у которой $\gamma = 0$, передает в канал связи содержимое своей ячейки v ; машины, у которых $\gamma = I$, вводят информацию из канала связи в свои ячейки u);

$\dot{L}_{11}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ u < v\ \underline{\textbf{then}}\ \underline{\textbf{begin}}\ v := u;\ j := k\ \underline{\textbf{end}};\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{12}$: $\langle\, k := k+1;\, \rangle$

$\dot{P}_{15}$: оператор обобщенного условного перехода (вырабатывается обобщенное условие

$$\Omega = \mathop{\&}_{N=0}^{n} \omega_N ,$$

где

$$\omega_N = \begin{cases} \text{I, если в ЭМ } N \text{ значение } k \le n, \\ \text{0 – в противном случае;} \end{cases}$$

при $\Omega = I$ осуществляется переход на $\dot{L}_8$, а при $\Omega = 0$ – переход на $\dot{\mathcal{L}}_{14}$);

$\dot{\mathcal{L}}_{14}$: $\langle\, X := X + b[j];\, \rangle$

$\dot{L}_{15}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ i = N\ \underline{\textbf{then}}\ \Pi := \Pi + 1;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{16}$: $\langle\, u := w := X;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{17}$: $\langle\, i := N;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{18}$: $\langle\, k := 0;\, \rangle$

$\dot{L}_{19}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ k = N\ \underline{\textbf{then}}\ \gamma := 0\ \underline{\textbf{else}}\ \gamma := 1;\, \rangle$

$\dot{H}_{20}$: оператор настройки (выполняется так же, как H_9);

$\dot{O}_{21}$: оператор обмена (в отличие от $\dot{O}_{10}$ в канал передается содержимое ячейки w машины, у которой $\gamma = 0$);

$\dot{L}_{22}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ u > w\ \underline{\textbf{then}}\ \underline{\textbf{begin}}\ w := u;\ i := k\ \underline{\textbf{end}};\, \rangle$

$\dot{L}_{23}$: $\langle\, k := k+1;\, \rangle$

$\dot{P}_{24}$: оператор обобщенного условного перехода (при $\Omega = I$ осуществляется переход на $\dot{L}_{19}$, а при $\Omega = 0$ – переход на $\dot{\mathcal{L}}_{25}$);

$\dot{\mathcal{L}}_{25}$: $\langle\, \ell := \ell + 1;\, \rangle$

$\dot{L}_{26}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ \ell > r\ \underline{\textbf{then}}\ \underline{\textbf{go}}\ \underline{\textbf{to}}\ \dot{\mathcal{L}}28;\, \rangle$

$\dot{L}_{27}$: $\langle\, \underline{\text{if}}\ (w - v)/\ell > e\ \underline{\textbf{then}}\ \underline{\textbf{go}}\ \underline{\textbf{to}}\ \dot{\mathcal{L}}3;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{28}$: $\langle\, P := P/\ell;\, \rangle$

$\dot{\mathcal{L}}_{29}$: $\langle\, \Pi := \Pi/\ell;\, \rangle$

$\dot{L}_{30}$: $\langle\, V := (w + v)/(2 \times \ell);\, \rangle$

$\dot{Я}_{31}$: оператор конца.

Операторная схема P -алгоритма имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc}
\dot{\mathcal{L}}_1 & \dot{\mathcal{L}}_2 & {}^{2,27}\dot{\mathcal{L}}_3 & \dot{L}_4 & \dot{\mathcal{L}}_5 & \dot{\mathcal{L}}_6 & \dot{\mathcal{L}}_7 & {}^{7,13}\dot{L}_8 \\
\dot{H}_9 & \dot{O}_{10} & \dot{L}_{11} & \dot{\mathcal{L}}_{12} & \dot{P}^{\uparrow 8}_{13\uparrow 14} & {}^{13}\dot{\mathcal{L}}_{14} & \dot{L}_{15} & \dot{\mathcal{L}}_{16} \\
\dot{\mathcal{L}}_{17} & \dot{\mathcal{L}}_{18} & {}^{18,24}\dot{L}_{19} & \dot{H}_{20} & \dot{O}_{21} & \dot{L}_{22} & \dot{\mathcal{L}}_{23} & \dot{P}^{\uparrow 19}_{24\uparrow 25} \\
{}^{24}\dot{\mathcal{L}}_{25} & \dot{L}^{\uparrow 28}_{26} & \dot{L}_{27} & {}^{26,27}\dot{\mathcal{L}}_{28} & \dot{\mathcal{L}}_{29} & \dot{\mathcal{L}}_{30} & \dot{Я}_{31} & .
\end{array}$$

Видно, что реализация алгоритма заканчивается либо после r итераций, либо после выполнения условия (3.I). В машине с номером N будет получено P_N , π_N , V .

Мы показали, что метод Брауна удобен для построения параллельных алгоритмов. Количество ветвей в схеме алгоритма и машин в исследуемой ОВС совпадает. Если число L машин системы, на которой должен реализоваться алгоритм, не совпадает с порядком матрицы $\| c_{ij} \|$, то необходимо провести L -развертку построенного алгоритма. Это не представляет значительного труда[I].

§ 4. Обратные игры

В играх I и II решается задача отыскания оптимальных смешанных стратегий игроков и цен игр по заданным матрицам платежей. Здесь мы рассмотрим две обратные постановки задач. В первой предполагается, что смешанная стратегия ВЦ и матрица платежей заданы, требуется найти оптимальную смешанную стратегию диспетчера. Во второй – требуется построить такую матрицу платежей, чтобы заданные смешанные стратегии ВЦ и диспетчера стали оптимальными.

I. Игра III. Пусть $C=\| c_{ij} \|$ – матрица платежей порядка n;

$$P=\{p_0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n\}$$

– смешанная стратегия вычислительного центра. В частном случае p_i, $i \in E$, может быть вероятностью нахождения ОВС в состоянии i.

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию диспетчера Π^*, для которой

$$F(\Pi^*) = \min_{\Pi} F(\Pi),$$

где

$$F(\Pi) = \sum_{j=0}^{n} \pi_j \sum_{i=0}^{n} p_i c_{ij},$$

является проигрышем диспетчера при применении смешанной стратегии $\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Координатами Π^* являются

$$\pi_j^* = 0, j \in E, j \neq k; \quad \pi_k^* = 1,$$

где k – стратегия диспетчера, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=0}^{n} p_i c_{ik} = \min_j \left\{ \sum_{i=0}^{n} p_i c_{ij} \right\}. \qquad (4.I)$$

Таким образом, в данной ситуации наиболее эффективно решать задачи ранга $k \in E$, определяемого из условия (4.I). При решении сложных задач этому требованию легко удовлетворить. В самом деле, для достаточно широкого круга сложных задач могут быть составлены универсальные программы [I], которые настраиваются на число машин, равное $k \in E$.

Для иллюстрации рассмотрим ОВС "Минск-222", состоящую из 10 ЭМ и имеющую одно восстанавливающее устройство. Стационарное распределение вероятностей состояний данной системы [9]:
$P = \{0; 0; 0; 0; 0; 0{,}005; 0{,}01; 0{,}028; 0{,}067; 0{,}24; 0{,}65\}$.

Пусть $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$. Учтя (I.I) и (4.I), находим $k = 9$.

В результате машинного моделирования установлено, что на ОВС "Минск-222" эффективнее всего решать задачи ранга $k \geq 0{,}9n$. При этом $(n-k) \leq 0{,}1n$ машин составят структурную избыточность. Это является общим выводом, который следует из рассмотрения основных показателей надежности систем (с учетом современного состояния вычислительной техники).

2. Игра IУ. Пусть заданы смешанные стратегии ВЦ $P=\{p_i\}$, $p_i > 0$, и диспетчера $\Pi = \{\pi_j\}$, $\pi_j > 0$; $i,j \in E$. Допустим также, что V – цена игры.

Практически, например, распределение P может быть установлено из анализа надежности ОВС, распределение Π – из анализа потока задач, а V – из технико-экономического анализа работы вычислительного центра.

Требуется найти матрицу платежей $C=\| c_{ij} \|$ такую, чтобы $\{P, \Pi, V\}$ стало решением рассматриваемой игры.

Используя результаты работы [8], легко установить, что элементы искомой матрицы платежей могут рассчитываться по формулам:

$$\left.\begin{aligned} & c_{00} = \frac{1}{p_0 \pi_0}\Big[V(p_0 + \pi_0 - 1) - \sum_{k=1}^{n} p_k \pi_k \Big], \\ & c_{i0} = \frac{1}{\pi_0}(V - \pi_i), \; c_{0j} = \frac{1}{p_0}(V - p_j), \\ & c_{ij} = 1, \; i=j; \; c_{ij} = 0; \; i \neq j; \; i,j = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

В случае, если $V \neq 1/n$, стратегии P и Π являются единственным решением игры с матрицей C.

Однако легко заметить, что некоторые элементы (4.2) могут быть меньше нуля. Поэтому если диспетчер распределяет задачи от различных пользователей системы, то одна часть пользователей будет получать положительную плату с ВЦ за решение своих задач, а другая часть платить неоправданно много. Следовательно, в этой игре целесообразно, чтобы диспетчер был представителем одного пользователя или вначале решал все задачи одного пользователя, затем другого и т.д.

Выводы

Теоретико-игровой подход к проблеме позволяет просто найти стохастически оптимальный режим решения задач на ОВС.

Задача организации функционирования решается только один раз для одной системы. Кроме того, решение может быть найдено при помощи исследуемой системы.

Алгоритмы функционирования ОВС чрезвычайно просты; они реализуются генератором случайных чисел. В качестве такого генератора может быть естественный "механизм" (например, механизм отказов и восстановления машин и т.п.).

Литература

1. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука" СО, 1966.

2. ДРЕШЕР М. Стратегические игры. Теория и приложения. М., "Сов.радио", 1964.

3. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Об алгоритмах функционирования однородных универсальных вычислительных систем. -"Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 39, стр. 3-14.

4. МИРЕНКОВ Н.Н. Алгоритмы планирования для диспетчера однородной вычислительной системы. -"Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 42, стр. 34-46.

5. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г., СЕДУХИНА Л.А. Стохастические алгоритмы функционирования однородных вычислительных систем. -Данный сборник, стр. 3-19.

6. РОБИНСОН Дж. Итеративный метод решения игр.-"Матричные игры", М., ГИФМЛ, 1961, стр. 110-117.

7. ШАПИРО Г.Н. Замечание о вычислительном методе в теории игр. -"Матричные игры", М., ГИФМЛ, 1961, стр. 118-127.

8. БОНЕБЛАСТ Х.Ф., КАРЛИН С., ШЕПЛИ Л.С. Решения дискретных игр двух лиц. -"Матричные игры", М., ГИФМЛ, 1961, стр. 17-44.

9. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Надежность однородных универсальных вычислительных систем. -"Использование избыточности в информационных системах", Труды второго симпозиума, Л., "Наука", 1970, стр. 72-80.

Поступила в ред.-изд.отд.
7. IУ. 1971г.