1972 год ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 51

УДК 621.019.3

ОБ ОСУЩЕСТВИМОСТИ РЕШЕНИЯ ПОТОКА ПРОСТЫХ ЗАДАЧ НА ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.А. Павский

Теория надежности [1] не учитывает вероятностные свойства задач, решаемых на однородных вычислительных системах (ОВС)[2]. Поэтому предпринимается попытка связать показатели надежности с показателями потока задач, что и является предметом теории осуществимости [3,4]. Настоящая работа является дополнением работы [4]. Введены и рассчитаны показатели осуществимости решения потока задач, дано определение P^K – осуществимости, приведены числовые результаты и примеры, построены графики, составлена программа на АЛГОЛе.

Постановка задачи

Имеется ОВС из n элементарных машин (ЭМ). Каждая ЭМ, независимо от других, может выходить из строя и восстанавливаться в случайные моменты времени. На ОВС поступает поток простых задач [4]. Поступившая задача либо сразу начинает решаться, либо становится в очередь и ждет некоторое, заданное случайным образом, время, по истечении которого покидает систему. Если ЭМ вышла из строя в момент решения задачи, то задача остается в

системе, а ЭМ либо начинает восстанавливаться одним из $m \le n$ восстанавливающих устройств (ВУ), либо становится в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится любое ВУ.

Пусть λ – интенсивность потока отказов в одной ЭМ, μ – интенсивность восстановления ЭМ одним восстанавливающим устройством, α – интенсивность потока простых задач, β – интенсивность решения задач одной ЭМ, $1/\sigma$ – среднее время ожидания нерешенной задачи в очереди.

Введем обозначения: $P_{ij}(t)$ – вероятность того, что в момент времени t в ОВС находится i задач и j ЭМ в состоянии отказа, где $i = 0,1,\ldots,$ $j = 0,1,\ldots,n$.

Требуется найти значения $P_{ij}(t)$ для стационарного режима функционирования ОВС, то есть

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t).$$

Расчет P_{ij}.

Используя методы теории массового обслуживания [5], можно получить для P_{ij} следующую алгебраическую систему уравнений:

$$-(\alpha+n\lambda)P_{00}+\beta P_{1,0}+\mu P_{0,1}=0; \qquad (1)$$

$$-(\alpha+(n-j)\lambda+\delta^{j}\mu)P_{0j}+\beta P_{1,j}+(n-j+1)\lambda P_{0,j-1}+\delta^{j+1}\mu P_{0,j+1}=0,\ 0<j<n; \qquad (2)$$

$$-(\alpha+m\mu)P_{0,n}+\sigma P_{1,n}+\lambda P_{0,n-1}=0; \qquad (3)$$

$$-(\alpha+i\beta+(n-j)\lambda+\delta^{j}\mu)P_{ij}+\alpha P_{i-1,j}+(i+1)\beta P_{i+1,j}+(n-j+1)\lambda P_{i,j-1}+$$
$$+\delta^{j+1}\mu P_{i,j+1}=0,\ i<n-j,\ 0<j<n; \qquad (4)$$

$$-(\alpha+(n-j)\beta+(n-j)\lambda+\delta^{j}\mu+i\sigma)P_{n-j+i,j}+\alpha P_{n-j+i-1,j}+[(n-j)\beta+(i+1)\sigma]P_{n-j+i+1,j}+$$
$$+(n-j+1)\lambda P_{n-j+i,j-1}+\delta^{j+1}\mu P_{n-j+1,j+1}=0,\ 0<i<n-j,\ 0<j<n; \qquad (5)$$

$$-(\alpha+m\mu+i\sigma)P_{i,n}+\alpha P_{i-1,n}+(i+1)\sigma P_{i+1,n}+\lambda P_{i,n-1}=0,\ 0<i; \qquad (6)$$

$$-(\alpha+i\beta+n\lambda)P_{i,0}+\mu P_{i,1}+(i+1)\beta P_{i+1,0}+\alpha P_{i-1,0},\quad i>0; \qquad (7)$$

$$-(\alpha+i\sigma+n\beta+n\lambda)P_{n+i,0}+\mu P_{n+i+1,0}+[(i+1)\sigma+n\beta]P_{n+i+1,0}+\alpha P_{n+i-1,0}=0,\ i>0; \qquad (8)$$

где

$$\delta^{k} = \begin{cases} k, & \text{если } k < m, \\ m, & \text{если } k \geq m. \end{cases}$$

Добавим к этой системе условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} = 1 .$$

Введем обозначения:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,j} , \tag{9}$$

$$P_i = \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} , \tag{10}$$

π_j – вероятность того, что в ОВС находится в состоянии отказа j ЭМ; P_i – вероятность того, что в ОВС имеется i задач. Суммируя (I), (7) и уравнение (8) для $i = 0$ и используя (9), получим:

$$-n\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0. \tag{11}$$

Аналогично, суммируя уравнения (2), (4), (5), (8) и учтя (9), найдем:

$$-(\lambda(n-j) - \delta^{j}\mu)\pi_j + (n-j+1)\lambda \pi_{j-1} + \delta^{j+1}\mu \pi_{j+1} = 0. \tag{12}$$

Наконец, из уравнений (3), (6) с учетом (9) получаем:

$$-m\mu \pi_n + \lambda \pi_{n-1} = 0. \tag{13}$$

Из (II), (I2), (I3) имеем:

$$\pi_j = C_j^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} \pi_0 , \text{ если } 0 < j < m ; \tag{14}$$

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} \frac{n!}{(n-j)!\, m!\, m^{j-m}} \cdot \pi_0 , \text{ если } m < j \leq n , \tag{15}$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} C_j^{n} + \frac{n!}{m!} \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j} \Big/ (n-j)!\, m^{j-m} \right]^{-1}. \tag{16}$$

Для определения вероятностей P_i используем тот же метод, что при нахождении π_j , с той лишь разницей, что суммирование будем проводить по индексу j с использованием условия (I0) и очевидного, следующего из физических соображений, равенства:

$$P_{ij} = P_i \cdot \pi_j .$$

Для P_i имеем следующую систему:

$$-\alpha P_0 + \beta(P_1 - P_{1,n}) + \sigma P_{1n} = 0 ; \tag{17}$$

$$-\alpha P_i + i\beta \sum_{j=0}^{n-i} P_{ij} - \beta \sum_{j=n-i+1}^{n} P_{ij} - \sigma \sum_{j=n-i+1}^{n} (n-j+1) P_{ij} + \alpha P_{i-1} + (i+1)\beta \sum_{j=0}^{n-i-1} P_{ij} +$$

$$+ \beta \sum_{j=n-i}^{n} P_{ij}(n-j) + \sigma \sum_{j=n-i}^{n} (i+j-n+1) P_{ij} = 0, \tag{18}$$

$$0 < i \leq n , \quad 0 < j \leq n ;$$

$$-\alpha P_{n+i} - \beta \sum_{j=0}^{n} P_{n+i,j}(n-j) + \sigma \sum_{j=0}^{n} P_{ij}(i+j) + \lambda P_{n+i-1} + \mu \sum_{j=0}^{n} P_{ij}(n-j) +$$

$$+ \sigma \sum_{j=0}^{n} P_{ij}(i+j+1) = 0, \quad i > 0. \tag{19}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$P_i = \alpha^{i} P_0 \left\{ \prod_{k=1}^{i} \left[k\beta \sum_{j=0}^{n-k} \pi_j + \sum_{j=n-k+1}^{n} \pi_j \big((n-j)\beta + (k+j-n)\sigma \big) \right] \right\}^{-1}, \quad 0 < i \leq n ; \tag{20}$$

$$P_i = \alpha^{i} P_n \left\{ \prod_{k=1}^{i-n} \left[\sum_{j=0}^{n} \big(\beta(n-j) + \sigma(k+j) \big) \pi_j \right] \right\}^{-1} , \quad i > n ; \tag{21}$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_0} + \frac{P_n}{P_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{n+i}}{P_n} \right]^{-1}. \tag{22}$$

Зная π_j и P_i , легко получить не только $P_{i,j}$, но и следующие показатели осуществимости решения:

среднее число отказавших ЭМ – $M_1 = \sum_{j=0}^{n} j \pi_j$;

среднее число задач, находящихся в ОВС – $M_2 = \sum_{i=0}^{\infty} i P_i$;

среднее число задач в очереди – $M_3 = M_2 - (n - M_1)$;

вероятность того, что задача покидает ОВС необслуженной :

$$P_{\text{отк.}} = \frac{\sigma}{\alpha} \left(\sum_{s=1}^{\infty} s P_{n+s} + \sum_{k=1}^{n} P_k \sum_{j=n-k+1}^{n} (k+j-n)\pi_j \right).$$

Числовые значения показателей осуществимости

Для вычисления показателей осуществимости взяты значения параметров, характерные для современных машин и имеющие размерность [час$^{-1}$].

Среднее число задач, находящихся в ОВС:

σ \ λ/μ	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
0	1,2980	0,5002	0,5000	0,5000
10^{-2}	1,2980	0,5002	0,5000	0,5000
10^{-1}	1,3000	0,5002	0,5000	0,5000

$\alpha = 5,\quad \beta = 10,\quad n = 10,\quad m = 1;$

σ \ λ/μ	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
0	32,000	5,531	5,042	5,037
10^{-2}	31,056	5,503	5,038	5,021
10^{-1}	29,678	5,340	5,010	5,009

$\alpha = 5,\quad \beta = 1,\quad n = 10,\quad m = 1.$

Среднее число ЭМ, находящихся в состоянии отказа:

λ/μ	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
M_1	9,000	2,1458	0,1085	0,0101

$n = 10,\quad m = 1.$

Вероятность отказа $P_{отк}$ для $1 \geq \frac{\lambda}{\mu} \geq 10^{-3}$, $n = 10$, $m = 1$, $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\sigma \leq 10^{-1}$ не превышает 10^{-4}; а для $\alpha = 5$, $\beta = 1$:

σ \ λ/μ	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
10^{-1}	0,0136	0,0035	0,0035	0,5935
10^{-2}	0,0018	0,0044	0,0001	0,1000

P^{κ} – осуществимость

Пусть

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\alpha(t), \beta(t), \dots, \mu(t))$$

– вероятностная функция, являющаяся показателем осуществимости решения задач на ОВС, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, ..., $\mu(t)$ – параметры, необходимые для построения математической модели задачи, t – время, $i_1, \dots, i_k$ – произвольные целые положительные числа.

Зададим вероятность P^0, время t^0 и целые положительные числа $m_1, \dots, m_k$, $m_1', \dots, m_k'$, значения которых выбираются из физических соображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При одновременном выполнении условий:

$$\sum_{i_1 = m_1}^{m_1'} \dots \sum_{i_k = m_k}^{m_k'} P_{i_1, \dots, i_k}(t) \geq P^0, \quad t \leq t^0,$$

будем говорить, что решение задач P^{κ} о с у щ е с т в и м о.

Для стационарного процесса будем под P^{κ}–осуществимостью понимать выполнение условия

$$\sum_{i_1 = m_1}^{m_1'} \dots \sum_{i_k = m_k}^{m_k'} P_{i_1, \dots, i_k} \geq P^0,$$

где

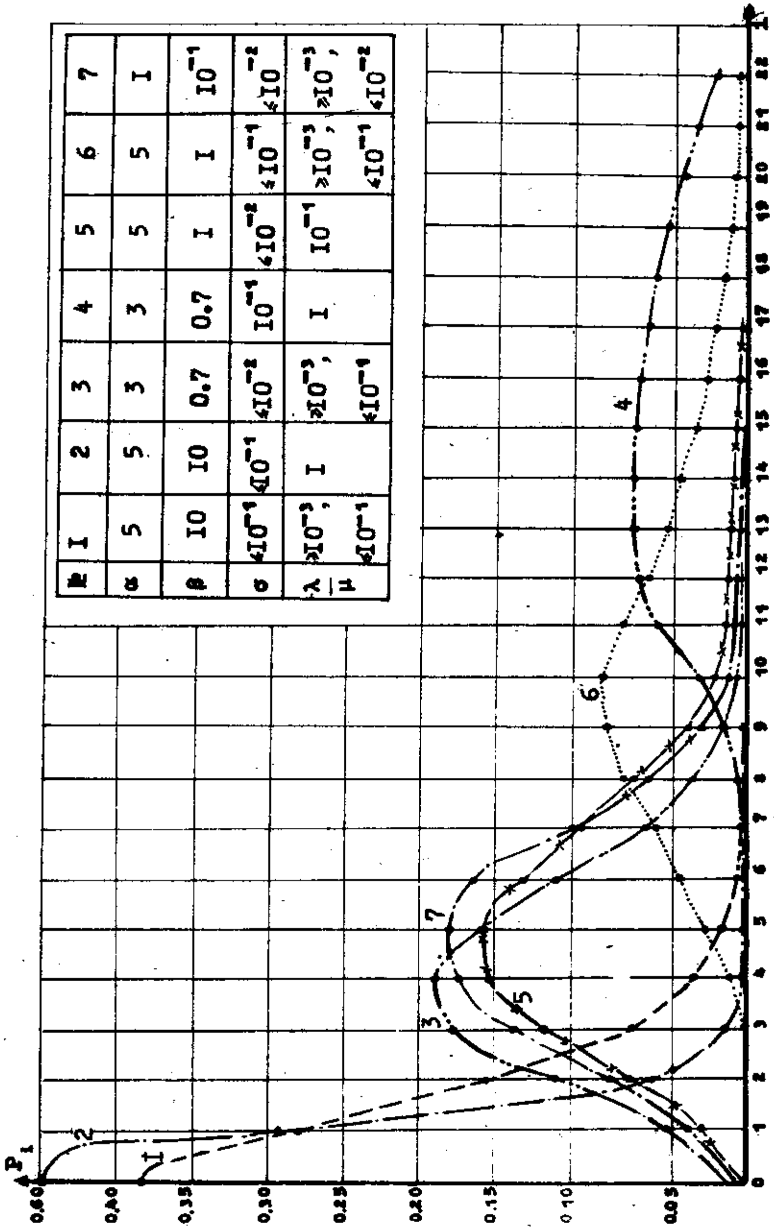
$$P_{i_1, \dots, i_k} = \lim_{t \to \infty} P_{i_1, \dots, i_k}(t).$$

Для многих задач теории массового обслуживания функция $P_{i_1, \dots, i_k}(t)$ имеет вид:

$$P_{i,j}(\alpha, \dots, \mu, t) = P_{i,j}(t) \text{ или } P_i(\alpha, \dots, \mu, t) = P_i(t).$$

Очевидны определения P^2– и P^1 – осуществимости.

Для случая $P_{i,j} = p_i \cdot \pi_j$ решение задач P^2 о с у щ е с т в и м о при заданных p^0, π^0 и целых m, κ, α ($m = 0, 1, \dots, \kappa$, $\kappa \geq m$, $\alpha = 1, \dots, n$), если одновременно выполняются условия:



№	I	2	3	4	5	6	7
α	5	5	3	3	5	5	I
β	IO	IO	0.7	0.7	I	I	IO^{-1}
σ	$\le IO^{-1}$	$\le IO^{-1}$	$\le IO^{-2}$	IO^{-1}	$\le IO^{-2}$	$\le IO^{-1}$	$\le IO^{-2}$
λ/μ	$\ge IO^{-3}$, $\le IO^{-1}$	I	$\ge IO^{-3}$, $\le IO^{-1}$	I	IO^{-1}	$\ge IO^{-3}$, $\le IO^{-1}$	$\ge IO^{-3}$, $\le IO^{-2}$

Рис. I. Зависимость значений P_i от параметров ОВС

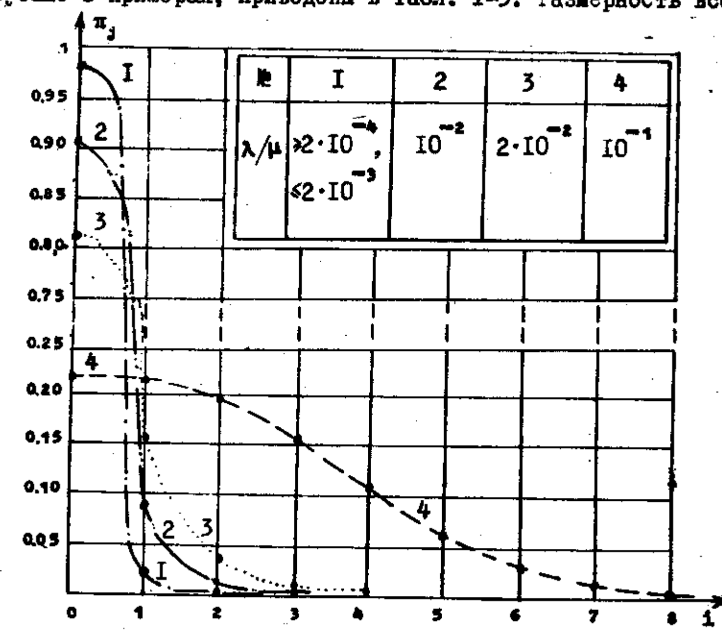
$$\sum_{i=m}^{k} P_i \ge P^o \; , \quad \sum_{j=0}^{d} \pi_j \ge \pi^o \, .$$

Заметим, что если вероятность $P_i(t)$ равна $\pi_j(t)$, то есть $P_i(t) = \pi_j(t)$, где $\pi_j(t)$ – вероятность того, что j ЭМ в состоянии отказа, то под P – осуществимостью будем понимать:

$$1 - \sum_{i=m_1}^{n} P_i(t) \ge P^o \; , \; t \le t^o .$$

Числовые примеры P^2 – и P^1 – осуществимости

Показатели эффективности решения P_i и π_j найдены по формулам (I4) – (I6) и (20) – (22) соответственно. Некоторые значения этих показателей представлены в виде графиков на рис. I и 2 (n = IO, m = I). Числовые значения P_i, π_j, используемые в примерах, приведены в табл. I-3. Размерность всех па-



№	I	2	3	4
λ/μ	$\ge 2 \cdot IO^{-4}$, $\le 2 \cdot IO^{-3}$	IO^{-2}	$2 \cdot IO^{-2}$	IO^{-1}

Рис. 2

Таблица 1

i	P_i	j	π_j
0	0,21458	0	0,00603
1	0,21458	1	0,03015
2	0,19312	2	0,07543
3	0,15450	3	0,12594
4	0,10815	4	0,15835
5	0,06488	5	0,16069
6	0,03244	6	0,13821
7	0,01298	7	0,10483
8	0,00389	8	0,07261
9	0,00078	9	0,04744
10	[illegible]	10	0,03019

$\alpha = 5,\ \beta = 1,\ \lambda/\mu = 10^{-1},\ \sigma = 10^{-2}$

Таблица 2

j	π_j
0	0,90108
1	0,09011
2	0,00810
3	0,00064
4	0,00006
5	0,00001
6	0,00000
7	0,00000
8	0,00000
9	0,00000
10	0,00000

$\lambda/\mu = 10^{-2}$

Таблица 3

j	π_j	i	P_i
0	0,000000	0	0,37311
1	0,000000	1	0,29495
2	0,000000	2	0,16432
3	0,000007	3	0,08395
4	0,000051	4	0,04203
5	0,00306	5	0,01042
6	0,01533	6	0,00518
7	0,06133	7	0,00257
8	0,18394	8	0,00127
9	0,377888	9	0,00063
10	0,37788	10	0,00031

$\alpha = 5,\ \beta = 10,\ \lambda/\mu = 1,\ \sigma = 10^{-2}$

раметров – [час$^{-1}$].

Пример 1. Вычисление P^2 -осуществимости. Пусть $p^0 = 0{,}8$, $\pi_0 = 0{,}8$, $m = 3$, $k = 10$ $\alpha = 4$. Значения π_j, p_i найдем из табл. 1, тогда

$$\sum_{i=3}^{10} p_i \simeq 0{,}86 > 0{,}8; \quad \sum_{j=0}^{4} \pi_j \simeq 0{,}84 > 0{,}8 .$$

Решение P^2 – осуществимо.

Пример 2. Вычисление P^1 -осуществимости для выхода ЭМ из строя. Пусть $\pi_0 = 0{,}9$, $\alpha = 2$. Значение π_j найдем из табл. 2.

$$1 - \sum_{j=3}^{10} \pi_j = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 > 0{,}9.$$

Решение P -осуществимо.

Пример 3. Вычисление P -осуществимости. Зададим $p_0 = 0{,}7$, $m = 3$, $k = 10$, $\alpha = 4$. Значения π_j, p_0 найдем из табл. 3. Так как $P_{i,j} = p_i \pi_j$, то

$$\sum_{i=3}^{10} \sum_{d=0}^{4} p_i \pi_j = 0{,}1 < 0{,}7.$$

Решение не осуществимо.

Таким образом, показатель осуществимости P_{ij} характеризует ход решения задач на ОВС. Из определения P^2 – осуществимости следует, что при заданной надежности ЭМ можно определить необходимое число задач, при котором система будет функционировать достаточно эффективно.

Литература

1. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. О надежности однородных вычислительных систем. – Труды второго симпозиума по использованию избыточности в информационных системах, Л., 1968, стр. 72–80.

2. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука"СО, 1966.

3. ФЛЕЙШМАН Б.С. Конструктивные методы оптимального кодирования для каналов с шумами. М., Изд-во АН СССР, 1963.

4. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Об осуществимости решения задач на однородных вычислительных системах. Данный сборник, стр. 38–47.

5. ТКАЧЕНКО П.Н., КУЦЕВ Л.Н. и др. Математические модели боевых действий. М., "Сов.радио", 1969.

Поступила в ред.-изд.отд.
22. IV. 1972 г.

Программа для вычисления показателей осуществимости.

Вводятся следующие величины:

N – число ЭМ в ОВС;

m – число восстанавливающих устройств;

k – целое достаточно большое число, заменяющее ∞;

al – интенсивность потока задач;

be – интенсивность решения задач на ЭМ;

la – интенсивность выхода ЭМ из строя;

mu – интенсивность восстановления ЭМ одним восстанавливающим устройством;

ci – среднее число задач, покидающих ОВС необслуженными.

На печать выдаются:

P[*i*] – вероятность того, что в ОВС находится *i* задач;

PI[*j*] – вероятность того, что *j* ЭМ находятся в состоянии отказа;

M1 – среднее число отказавших ЭМ;

M2 – среднее число задач в ОВС;

SOT – вероятность отказа.

```
Begin integer N,k,m,i,j;real la,mu,S,be,ci,S1,M1,M2,SOT,al;read
(N,k,m,al,be,la,mu,ci); begin array Pi1[1:N],Pi[0:N],P1[0:N+k],
P[0:N+k]; Pi1[1]:=N x la/mu;for j:=2 step 1 until N do if j ≤ m
then Pi [j]:=(N-j+1)/j x la/mu x Pi1[j-1] else Pi1[j]:= (N-j+
+1)/m↑(j-m) x la/mu xPi1[j-1] S:=0 for j:=1 step 1 until N do
S:=S+Pi1[j];Pi[0]:=1/(1+S);for j:=1 step 1 until N do Pi[j]:=
Pi1[j] x Pi[0];print (Pi);P1[0]:=1;for i:=1 step 1 until N+k
do begin if i ≤ N then begin S:=0;for j:=0 step 1 until N do
if j ≤ N-i then S:=S+i x bc x Pi[j] else S:=S+((N-j) x be+ci x
(j+i-N)) x Pi[j];P1[i]:=al/S x P1[i-1] end else begin S1:=0;
for j:=0 step 1 until N do S1:=S1+(be x (N-j)+ci x (i±j)) x
Pi[j];P1[i]:=al/S1 x P1[i-1] end end;S:=0;for i:=1 step 1 until
N+k do S:=S+P1[i];P[0]:=1/(1+S);for i:=1 step 1 until N+k do
P[i]:=P1[i] x P[0];print (P);M1:=0;for i:=1 step 1 until N do
M1:=M1+i x Pi[i];M2:=0;for i:=N+1 step 1 until N+k do M2:=M2+
i x P[i];print (M1,M2);S:=0 for i:=N+1 step 1 until N+k do S:=
S+i x P[i];S1:=0;for i:=1 step 1 until N do for j:=N-i+1 step
1 until N do S1:=S1+P[i] x Pi[j] x (i+j-N);SOT:=ci/al x (S+S1);
print (SOT) end end
```