

ОБ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ВНУТРЕННЕ УСТОЙЧИВЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МНОЖЕСТВА ВЕРШИН ГРАФА

А.Н.Мелихов, Л.С.Берштейн, В.М.Курейчик, В.В.Лисяк

При техническом проектировании дискретных устройств часто возникают задачи, сводимые к комбинаторно-логическим задачам на графах. К ним относятся разложение графа на плоские суграфы, раскраска множества вершин графа, размещение графа на плоскости, разрезание графа на максимально связанные подграфы.

Одним из возможных методов решения перечисленных задач является анализ семейства максимальных внутренне устойчивых подмножеств (МВУП) множества вершин графа, который, как известно [1,2], во многих случаях оказывается наиболее эффективным.

Работа посвящена исследованию метода анализа семейства МВУП с точки зрения его практической реализации на ЦВМ. Пока — зывается, что семейство всех МВУП графа является избыточным, что приводит к невозможности решения задач на графах достаточно большого порядка. В связи с этим в работе рассматривается вопрос выделения в графе квазимиимального по числу МВУП семейства и приводятся оценки его мощности. Анализ полученных оценок позволяет упростить процедуру выделения семейства МВУП и показывает, что использование этого семейства дает возможность оперировать с графами значительно большего порядка.

§ 1. О наибольшем возможном числе МВУП графа

Пусть задан граф $G=(X, \alpha, F)$, где X — множество вершин, α — множество ребер, а F — трехместный предикат, устанавливающий отображение α на X . Подмножество $\varphi_j \subset X$, для которого

выполняется условие $\forall x_i, x_j \in \psi_j [F(x_i, u, x_j)]$, называется внутренне устойчивым. По аналогии подмножество $\psi_\delta \subset X$, для которого $\forall x_i, x_j \in \psi_\delta [F(x_i, u, x_j)]$, назовем внутренне неустойчивым. Если $\psi_j(\psi_\delta)$ не входит ни в какое большее подмножество, то оно называется максимальным внутренне устойчивым (внутренне неустойчивым) подмножеством.

Известно [2], что семейство $\Psi = \{\psi_j\}, j \in I = \{1, 2, \dots, k\}$, всех максимальных внутренне устойчивых подмножеств однозначно определяет исходный граф G с точностью до природы его ребер. Следовательно, семейство Ψ является способом исходного задания графа, и, как показывают исследования Зыкова А.А. [1], в некоторых случаях этот способ может оказаться удобнее матричного. Однако если граф задан в матричной форме, а в связи со спецификой решаемой задачи необходимо семейство Ψ , то возникает вопрос выделения такого семейства.

Известны способы получения Ψ , которые используют аппарат булевой алгебры или непосредственно язык матриц. Например, оригинальные способы построения Ψ предложили Мару [3], Уэйсман [4], Ильзиня [5], Петухов [6].

Возникает вопрос: каковы возможности задания графа семейством Ψ применительно к современным ЭЦВМ?

Воспользуемся оценками наибольшего возможного числа МВУП, выведенными Дж. Муном и Л. Мозером [7], обозначив $|\Psi| = \omega(G)$.

$$\begin{aligned} \omega(G) &= 3^{\frac{n}{3}} && \text{при } n = 3k, \\ \omega(G) &= 4 \cdot 3^{\left[\frac{n}{3}\right] - 1} && \text{при } n = 3k + 1, \\ \omega(G) &= 2 \cdot 3^{\left[\frac{n}{3}\right]} && \text{при } n = 3k + 2. \end{aligned} \quad (I)$$

Исследование этих оценок показывает, что на современных ЭЦВМ можно в общем случае решать задачи, использующие семейство Ψ для графов, содержащих не более 20 вершин. Очевидно, что оценки (I) являются завышенными, так как используют один параметр — число вершин графа, т.е. $\omega(G) = f(n)$.

Предлагается модификация оценок (I), которая устанавливает зависимость $\omega(G) = f(n, z)$, где z — число ребер графа.

Назовем структуру графа, которая использовалась при выводе (I), q, ρ — структурой, где q — число вершин в связанной компоненте, ρ — число связанных компонент ($q=3, \rho = \frac{n}{3}$).

Пусть дан граф $G=(X, u), |X|=n, |u|=z$. Сохранив идею q, ρ — структуры, получим некоторую q', ρ' — структуру, отображающую зависимость $\omega(G) = f(n, z)$.

Рассмотрим вопрос отыскания q' , для чего запишем уравнение вида $\frac{n(n-1)}{2} = z$ при наличии ρ связанных компонент.

$$\frac{q'_1(q'_1-1)}{2} + \frac{q'_2(q'_2-1)}{2} + \dots + \frac{q'_\rho(q'_\rho-1)}{2} = z, \quad (2)$$

где каждый член левой части выражает число ребер некоторого полного подграфа, содержащего q вершин.

Положим в (2) $q'_1 = q'_2 = \dots = q'_\rho = q$, тогда $\rho q^2 - \rho q = 2z$, при $\rho = \frac{n}{q}$, откуда

$$q = \left[\frac{2z}{n} + 1 \right]_{\text{б.ц.}} \quad (3)$$

Для отыскания верхней оценки в выражении (3) возьмем большее целое. Пусть $\rho = \frac{n}{q}$ — дробное число, которое указывает, что последняя связанная компонента содержит $n - q \left[\frac{n}{q} \right]$ вершин.

Тогда по аналогии с оценками Дж. Муна и Л. Мозера можно записать

$$\omega(G) \leq \left[\frac{2z}{n} + 1 \right]_{\text{б.ц.}} \left[\frac{n}{\left[\frac{2z}{n} + 1 \right]_{\text{б.ц.}}} + 1 \right]_{\text{б.ц.}}, \quad \text{при } n = qk; \quad (4)$$

$$\omega(G) \leq n - \left[\frac{2z}{n} - 1 \right]_{\text{б.ц.}} \left[\frac{n}{\left[\frac{2z}{n} - 1 \right]_{\text{б.ц.}}} + 1 \right]_{\text{б.ц.}}, \quad \text{при } n \neq qk. \quad (5)$$

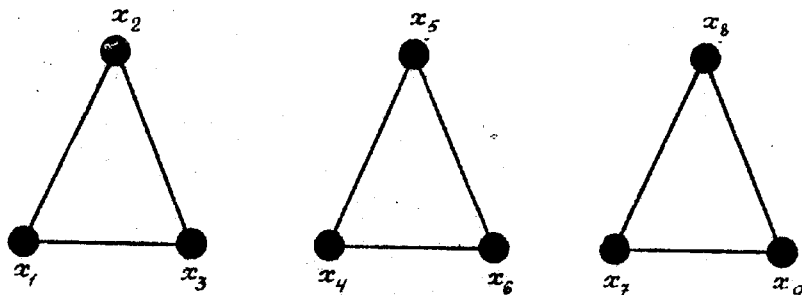
Нетрудно видеть, что сравнительная характеристика оценок (4), (5) и (I) описывается выражением

$$\lg 4 = \frac{n}{3} \lg 3 - \frac{n}{q} \lg q. \quad (6)$$

§2. Построение квазимиимальных семейств МВУП графа

Основываясь на оценках, приведенных в §1, следует сказать, что представление графа семейством всех МВУП является малоэффективным при современных средствах вычислительной техники. Однако такое представление графа часто полезно при решении определенных задач.

Возникает необходимость построения такого семейства $\Phi = \{\varphi_i\}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, s\}$, которое содержало бы минимизированное число МВУП, задающее исходный граф с точностью до природы его ребер. Это следует из того, что семейство Ψ всех МВУП содержит в себе избыточную информацию. Рассмотрим, например, граф, изображенный на рисунке, который имеет 27 МВУП, хотя для его построения по системе МВУП достаточно выбрать из них определенным образом 9 МВУП.



Приведем алгоритмы получения семейства Φ' , использующий задание графа матрицей смежности $R = \|z_{ij}\|_{n \times n}$.

А л г о р и т м А - 1

1°. В матрице R заменим нулевые элементы главной диагонали на единицы.

2°. Из строки $x_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ выбираем элемент $z_{ij} = 0$, $i \neq j, j \in I$, который определяет строку x_j . Если все $z_{ij} = 1$, то получаем подмножество вида $\varphi_i = \{x_i\}$, $i = 1$, и переходим к 9°, иначе к 3°.

3°. Определяем поэлементную дизъюнкцию строк x_i и x_j . Находим $M_{ij} = x_i \vee x_j$.

4°. Из строки M_{ij} выбираем элемент $m_k = 0$, $k \in I$. Переходим к 5°. Если все $m_k = 1$, то переходим к 6°.

5°. Определяем $M_{ij,k} = M_{ij} \vee x_k$. Заменяем индекс i, j на i , а k на j . Переходим к 4°.

6°. Получено $\varphi_j = \{x_i, x_j, \dots, x_k\}$. Переходим к 7°.

7°. Из строки x_i выбираем элемент $z_{i\ell} = 0$, $\ell \in I$, причем $z_{i\ell} \notin \varphi_j$. Переходим к 8°. Если все $z_{i\ell} = 1$, то переходим к 9°.

8°. В выражении $M_{ij} = x_i \vee x_j$ заменяем индекс j на ℓ . Переходим к 3°.

9°. Заменяем индекс i на $i+1$. Переходим к 2°. Если все $i = n$, то переходим к 10°.

10°. Получено семейство $\Phi = \{\varphi_i\}, i \in I$.

Дальнейшую минимизацию числа МВУП можно провести с помощью алгоритма А-2.

А л г о р и т м А - 2

1°. Выбираем подмножество $\varphi_i, i \in I$, проверяем, содержатся ли все пары элементов из φ_i в каких-либо других МВУП. Если содержатся, то переходим к 2°, иначе к 3°.

2°. Подмножество φ_i удаляем из семейства Φ . Заменяем i на $i+1$. Если $i+1 = s$, то переходим к 3°, иначе к 1°.

3°. Получено квазимиимальное по числу подмножеств семейство МВУП Φ' .

ТЕОРЕМА. Последовательное применение алгоритмов А-1 и А-2 приводит к квазимиимальному по числу МВУП семейству, однозначно задающему исходный граф с точностью до природы его ребер.

Покажем сначала, что, применяя алгоритм А-1, получаем некоторое семейство МВУП, задающее исходный граф.

Для этого достаточно показать, что по алгоритму А-1 выделяются максимальные внутренние устойчивые подмножества и что в семейство Φ вошли все элементы $z_{ij} = 0$ матрицы R .

Допустим, что выделено подмножество $\varphi_i = \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$ и что существует элемент x_k , который не вошел в подмножество

φ_i , но который составляет с элементами φ_i внутренне устойчивое подмножество. Следовательно, в суммарной строке M_{ij} должен существовать элемент $m_k = 0$, который не был выбран алгоритмом, что противоречит п. 4⁰ алгоритма.

Существование элемента $z_{ij} = 0$, который не вошел в семейство Φ , противоречит пп. 2⁰, 4⁰, 7⁰ алгоритма. Следовательно, все элементы $z_{ij} = 0$ матрицы R входят в семейство Φ , и семейство Φ задает исходный граф с точностью до природы его ребер.

Согласно п. 1⁰ алгоритма А-2, подмножество φ_i удаляется из Φ только в том случае, когда каждая пара элементов φ_i входит в другие МВУП, следовательно, после удаления таких подмножеств семейство Φ' будет содержать все элементы $z_{ij} = 0$ матрицы R и задавать исходный граф с точностью до природы его ребер.

Так как на основании п. 2⁰ алгоритма А-2 исследуются все $\varphi_i \in \Phi$, то семейство Φ' содержит только те МВУП, ни одно из которых нельзя удалить. Поэтому семейство Φ' , содержащее меньшее число подмножеств, чем семейство Φ , задает исходный граф θ с точностью до природы его ребер.

Приведем оценки наибольшего возможного числа МВУП семейства Φ , для чего рассмотрим матрицу R графа с q, p -структурой и применим к ней алгоритм А-1.

	1	2								n
1	1	1	1	1	x					x
2	1	1	1	1	x					x
...	1	1	1	1	x					x
...	1	1	1	1	x					x
...						1	1	1	1	x x x x
...						1	1	1	1	x
...						1	1	1	1	x
...						1	1	1	1	x
...										1 1 1 1
...										1 1 1 1
...										1 1 1 1
n										1 1 1 1

Из исследования матрицы R графа с q, p -структурой вытекают следующие предложения.

Для того чтобы задать исходный граф с точностью до природы его ребер, достаточно выписать все отсутствующие ребра, т.е. элементы $z_{ij} = 0$ матрицы R всего таких элементов $\frac{n(n-q)}{2}$. Согласно пп. 3⁰, 4⁰, 5⁰ алгоритма А-1, может происходить объединение некоторых пар элементов в одно подмножество. Тогда в пп. 2⁰, 7⁰ алгоритма А-1 не будет

выбрано некоторое число z элементов $z_{ij} = 0$. Следовательно, число МВУП

$$\omega(G) = \frac{n(n-q)}{2} - z. \quad (7)$$

Значение z нетрудно найти, рассмотрев матрицу R . Заметим, что каждый столбец матрицы R содержит $n-q$ элементов, равных нулю. Так как, согласно пп. 2⁰ и 7⁰, в матрице R не исследуются $p-2$ столбца, которые отмечены на матрице крестиками, то число нулевых элементов в этих столбцах запишется в виде прогрессии $(n-q) + (n-q-1) + \dots + (n-q-p+3)$, сумма членов которой равна

$$S = \frac{[2(n-q) - p + 3](p-2)}{2}.$$

Согласно пп. 2⁰, 7⁰, в матрице R не будут исследованы элементы строки, содержащей $(p-2)(q-1)$ нулевых элементов, поэтому

$$\omega(G) \leq \frac{n(n-q)}{2} - \frac{[2(n-q) - p + 3](p-2)}{2} - (p-2)(q-1),$$

откуда

$$\omega(G) \leq \frac{n(n-q)}{2} - n\left(\frac{n}{q} - 2\right) + \frac{n}{2q}\left(\frac{n}{q} - 3\right) + 1. \quad (8)$$

Если подставить в (8) параметр $q=3$ -структуры, исследованной Муном и Мозером, то получим оценки, аналогичные (1), для системы

$$\omega(G) \leq \frac{2}{9} n^2 + 1. \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что, используя для решения задачи системы Φ , можно обрабатывать на современных ЭВМ графы с $n \leq 145$.

Применяя к семейству Φ алгоритм А-2, получаем минимизированное по числу МВУП семейство Φ' , для которого соответствующие оценки равны:

$$\omega_M(G) \leq \frac{n(n-q)}{2} - n\left(\frac{n}{q} - 2\right) + \frac{n}{2q}\left(\frac{n}{q} - 3\right) + 1 - q + (p-2)(q-1), \text{ при } p > 3; \quad (10)$$

$$\omega_M(G) \leq \frac{n(n-q)}{2} - n\left(\frac{n}{q} - 2\right) + \frac{n}{2q}\left(\frac{n}{q} - 3\right) + 1 - (q-1)(p-1), \text{ при } p \leq 3. \quad (11)$$

Подставив в (I0) и (II) $q=3$, получим

$$\omega_M(G) \leq \frac{2}{9}n^2 + 1 - \frac{2}{3}n - 7, \text{ при } \rho > 3; \quad (I2)$$

$$\omega_M(G) \leq \frac{2}{9}n^2 + 1 - \frac{2}{3}n - 2, \text{ при } \rho \leq 3. \quad (I3)$$

Нетрудно видеть, что оценки (I2) и (I3) можно представить в виде $\omega_M(G) = \omega(G) - \omega'(G)$, где $\omega(G)$ — число МВУП, полученное по алгоритму А-І. Так как $\omega(G) \gg \omega'(G)$, то практически можно пренебречь членом $\omega'(G)$, в результате чего для решения задач на ЦВМ достаточно пользоваться семейством Φ , полученном по алгоритму А-І.

В заключение отметим, что определение минимального по числу МВУП семейства сводится к классической задаче нахождения минимального покрытия, которая в общем случае может быть решена путем полного перебора вариантов, что для практических целей неприемлемо.

Л и т е р а т у р а

1. ВИЗИНГ В.Г., ПЛЕСНЕВИЧ Г.С. К проблеме минимальной раскраски вершин графа. — "Сиб.матем.ж.", 1965, с. 234-236.
2. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, "Наука", 1969, с. 62-70.
3. MARY X. Sur la determination des nombres de stabilite et du nombre chromatique d'un graph. C.r. Acad. sci., Paris, 1959, N 25, p.3522-3523.
4. WEISSMAN I. Boolean algebra, map coloring, and interconnections. — "Amer.Math.Monthly", 1962, N 7, p.608-613.
5. ИЛЬЗИНА И.Г. О нахождении наибольших полных подграфов данного графа. — В сб.: Автоматика и вычислительная техника, Рига, "Зинатне", 1965, с. 43-48.
6. ПЕТУХОВ Г.А. О проблеме синтеза многослойных печатных плат. — "Труды аспирантов ЛИТМО", 1966, № 6, с. 34-43.
7. MOON I.W., MOSER L. On cliques in graphs. — "Israel J. Math", 1965, N 1, p.23-28.

Поступила в ред.изд.отд.
29 июня 1972 г.