

УДК 681.3.001

ВЫБОР БАЗИСА ЭЛЕМЕНТА ОДНОМЕРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

А.А. Койфман, Б.А. Москов, А.В. Панков, В.К. Попков,
В.А. Скоробогатов

При проектировании устройств логического управления в одномерной вычислительной среде (ОВСр) [1] возникает задача выбора оптимального базиса элемента ОВСр. Для постановки задачи необходимы следующие понятия.

1. Пусть имеется два множества $F = \{f_i\}$, $i = \overline{1, N}$ и $\Psi = \{\psi_j\}$, $j = \overline{1, K}$, заданных в д.н.ф. монотонных бесповторных функций алгебры логики.

Базисом элемента ОВСр назовем любое фиксированное подмножество $W \subseteq \Psi$, каждая функция которого может быть реализована элементом ОВСр. Базис W мощности s будем обозначать через W_s .

Пусть, кроме того, задан метод реализации любой функции $f_i \in F$ в ОВСр с произвольным базисом $W_s \subseteq \Psi$ элемента.

Сложностью $L_i(W_s)$ функции $f_i \in F$ назовем число элементов ОВСр с базисом W_s , используемых при реализации функции заданным методом.

Предположим, что функции множества F реализуются в ОВСр независимо. Тогда сложность $L(W_s)$ множества F определяется выражением

$$L(W_s) = \sum_{i=1}^N L_i(W_s).$$

Базис W_s^0 элемента ОВСр, при котором сложность $L(W_s)$ множества F минимальна, назовем оптимальным. Оценка базиса W_s назовем значение сложности $L(W_s)$ множества F .

Теперь задачу нахождения оптимального базиса можно сформулировать так: при заданном методе реализации функций и заданных множествах F, Ψ, s найти оптимальный базис W_s^0 .

Эту задачу можно решить методом перебора всевозможных базисов W_s . Обычно такой перебор осуществим только для $s=1$. Для решения же таким методом практических задач, где $k \sim 20$, $s \sim 10$, $N \sim 10^3$, необходимо добиться как уменьшения сложности вычисления $L(W_s)$, так и существенного сокращения перебора базисов.

П. Приведем понятия и некоторые теоретические результаты, необходимые для описания метода решения, который изложен в п. III.

Ранговым составом функции $f_i \in F$ назовем вектор Γ_i , k -я компонента g_i^k которого есть количество конъюнкций ранга k в функции f_i , $k = \overline{1, R}$, где R — максимальный ранг конъюнкций в функциях из множества F .

Ранговые составы Γ_i и Γ_l функций $f_i, f_l \in F$ назовем одинаковыми, если для каждого $k = \overline{1, R}$ выполняется одно из условий: либо $g_i^k = g_l^k = 0$, либо $g_i^k \cdot g_l^k \neq 0$.

Всем компонентам g_i^k вектора Γ_i назовем величину

$$q_i^k = \frac{k \cdot g_i^k}{\sum_{k=1}^R k g_i^k} = \frac{k g_i^k}{\lambda_i}, \quad k = \overline{1, R},$$

где λ_i — длина функции $f_i \in F$.

Каждой функции $f_i \in F$ (при её реализации в ОВСр) может быть поставлен в соответствие вектор $M = (m_1^i, m_2^i, \dots, m_s^i)$, где m_j^i есть число элементов ОВСр, выполняющих функцию $\psi_j \in W_s$ и участвующих в реализации функции f_i , т.е. $\sum_{j=1}^s m_j^i = L_i(W_s)$.

Вкладом функции ψ_j базиса W_s в реализацию функции f_i назовем величину $v_j^i = \frac{m_j^i}{L_i(W_s)}$. Вектором вкладов назовем вектор $V_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_s^i)$.

Пусть реализация функций в ОВСр принятым методом удовлетворяет следующим условиям.*

*Указанным условиям удовлетворяет, например, алгоритм реализации, описанный в [2].

а) Для любого подмножества $F_7 \subseteq F$ функций, имеющих одинаковый ранговый состав, существует набор $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_R)$, $0 \leq \varepsilon_k \leq 1$, $k = \overline{1, R}$ такой, что для любой пары функций $f_i, f_e \in F_7$ удовлетворяющих условиям

$$|q_i^k - q_e^k| \leq \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, R}, \quad (I)$$

справедливы $v_j^i = v_j^e$, $j = \overline{1, 3}$, для любого заданного базиса W_3 .

б) Для любой пары базисов W_3 и W_3' и любой пары $f_i, f_e \in F_7$, удовлетворяющих условиям (I), имеет место

$$\frac{L_i(W_3)}{L_i(W_3')} = \frac{L_e(W_3)}{L_e(W_3')} \quad (2)$$

Рассмотрим следующее разбиение подмножества $F_7 \subseteq F$ функций, имеющих одинаковый ранговый состав.

Каждой функции $f_i \in F_7$ поставим в соответствие точку R - мерного единичного куба с координатами $(q_1^i, q_2^i, \dots, q_R^i)$.

Разобьем куб на R - мерные параллелепипеды такие, что длины сторон каждого из них по каждой k - й координате не превосходят ε_k .

Функции, образы которых принадлежат одному параллелепипеду, отнесем к одному классу F_y . Возьмем произвольную функцию $f_0 \in F_y$.

ТЕОРЕМА. Для любой функции $f_i \in F_y$ выполняется соотношение $L_i(W_3) = \alpha_i^y \cdot L_0(W_3)$, где α_i^y - величина, не зависящая от W_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для координат образов f_i и f_0 в R - мерном единичном кубе выполняются неравенства (I). Из условия а) следует $V_i = V_0$. Отсюда $L_i(W_3) = \frac{m_i^k}{m_0^k} L_0(W_3)$ для любого $k = \overline{1, R}$. Обозначим $\alpha_i^y = \frac{m_i^k}{m_0^k}$. Покажем, что α_i^y не зависит от W_3 . Пусть имеем два базиса W_3 и W_3' и соответствующие им коэффициенты α_i^y и $\alpha_i^{y'}$. Из условия б) имеем

$$\frac{L_i(W_3)}{L_i(W_3')} = \frac{\alpha_i^y L_0(W_3)}{\alpha_i^{y'} L_0(W_3')} = \frac{L_0(W_3)}{L_0(W_3')},$$

то есть $\alpha_i^y = \alpha_i^{y'}$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Для данного класса F_y и фиксированной $f_0 \in F_y$ имеем

$$L_{F_y}(W_3) = \beta^y L_0(W_3),$$

где β^y - постоянная величина.

Определим β^y следующим образом:

$$\beta^y = \sum_{i=1}^{N_y} \alpha_i^y,$$

где N_y - количество функций множества F_y . Тогда из равенства

$$L_{F_y}(W_3) = \sum_{i=1}^{N_y} L_i(W_3)$$

следует (3).

Таким образом, вычисление $L(W_3)$ сводится к вычислению суммы функций f_0^y . Пусть число таких функций равно B , тогда

$$L(W_3) = \sum_{y=1}^B \beta^y \cdot L_0(W_3) \text{ для любого } W_3.$$

Для сокращения перебора базисов можно использовать алгоритм случайного поиска с адаптацией СПА-1 [3]. Работа этого алгоритма успешна только в том случае, когда среди всевозможных наборов W_3 имеется достаточное число таких, что выполняется соотношение $|L(W_3) - L(W^*)| \leq \varepsilon$.

Величина ε определяет допустимое отклонение от минимальной оценки, получаемой при использовании всех базисных функций.

III. Выбор базиса по принятой методике состоит из пяти следующих этапов.

I) Подготавливается информация, состоящая в том, что каждой функции $f_i \in F$ сопоставляется набор пар $\alpha_i = \{(r_1, n_1), \dots, (r_{m_i}, n_{m_i})\}$, называемый системой символов функции f_i . Здесь r_p - ранг конъюнкции, n_p - число конъюнкций ранга r_p , m_i - число различных рангов конъюнкций в f_i .

- 2) Производится разбиением множества F на классы для чего
- для каждой функции $f_i \in F$ вычисляется ранговый состав Γ_i ;
 - для каждой компоненты Γ_i вычисляется вес;
 - упорядочивается полученный набор весов:

$$Q_i = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_i}\}, \quad q_p \geq q_{p+1};$$

- задаются матрицы

$$A = \|a_{k,p}\|, \quad B = \|b_{k,p}\|, \quad (k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, M}),$$

где M - максимальный ранг конъюнкций множества F , n - число отрезков таких, что $|b_{k,p} - a_{k,p}| \leq \varepsilon_p$. Элементы матриц удовлетворяют условию: для каждого p

$$a \leq a_{1,p} \leq b_{1,p} \leq a_{2,p} \leq b_{2,p} \leq \dots \leq a_{n,p} \leq b_{n,p} \leq 1$$

(например, элементы матриц A и B могут быть выбраны таким образом, что для каждого k и p : $a_{k,p} = b_{k-1,p}$; $a_{k+1,p} = a_{k,p} + \frac{1}{n}$. Здесь полагается $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_M = \frac{1}{n}$);

- каждому набору Q_i сопоставляется последовательность пар

$$\pi_i = \{k_{1,p_1}; k_{2,p_2}; \dots; k_{m_i,p_{m_i}}\} \quad (4)$$

такая, что для каждого Q_p

$$a_{k_p,p_p} \leq q_p \leq b_{k_p,p_p}, \quad \text{где } p_p = \tau_p.$$

Таким образом, для функций f_{i1}, f_{i2} последовательности которых π_{i1}, π_{i2} совпадают, выполняются неравенства (I).

Можно допустить, что в один класс попадут функции, у которых соответствующие последовательности различны. Эти различия возникают за счет рангов, вносящих малый вклад в длину функции. Будем прекращать построение π_i , как только сумма $\sum_{p=1}^m q_p$ превысит заданное значение параметра α_i . Зададим зависимость параметра α_i от длины функции следующим образом.

Пусть имеются два вектора

$$D = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad U = \{u_0, u_1, \dots, u_n\},$$

где $u_p \leq u_{p+1}$. Для функции f_i , длина которой E_i и $u_{p-1} \leq E_i \leq u_p$, выберем параметр α_i . Функции, имеющие совпадающие последовательности вида (4), считаются принадлежащими одному классу F_y .

- 3) В каждом классе F_y определяется функция-представитель f_y^0 и вычисляется коэффициент β_y . В качестве f_y^0 выбираем функцию, длина которой E_y^0 является ближайшей к средней длине $\bar{E}_y$.

$$\bar{E}_y = \frac{\sum_{i=1}^{N_y} E_i}{N_y},$$

где E_i - длина i -й функции класса F_y .

Значение коэффициента β_y определяется следующей формулой:

$$\beta_y = \frac{N_y \cdot \bar{E}_y}{E_y^0}.$$

- 4) Осуществляется направленный перебор базисов:

- для каждой φ_j задается начальная вероятность p_j её выбора,

- случайным образом в соответствии с вероятностями p_j комплектуется набор W_s из s функций. Производится t таких выборов, где t - заранее заданное число,

- для каждого набора функций W_s блоком оценки базиса вычисляется $L(F, W_s)$,

- среди всех t наборов ищутся наборы W_{min} и W_{max} , которым соответствуют минимальные и максимальные $L(F, W_s)$,

- для функций, вошедших в набор W_{max} , вероятности их выбора уменьшаются, для функций из W_{min} - увеличиваются. После этого процесс повторяется, начиная с п. 2.

Вся процедура повторяется заданное число раз. Набор W_{min} в последнем цикле принимается за искомый базис. Сходимость процесса зависит от t и числа циклов, а также от величины изменения вероятностей выбора функций [3].

5) При вычислении оценки базиса определяется количество применений каждой базисной функции для реализации функций представителей классов.

При этом используется описанный в [2] метод, заключающийся в последовательном переборе базисных функций, построении для каждой из них символа с максимальным весом и включении в план синтеза символа, вес которого максимален среди построенных. Количество таких символов и является значением сложности реализации данной функции f_y^0 .

IV. Принятая методика предполагает участие оператора в процессе выбора базиса. Изменением управляющих параметров: матриц A, B и наборов D и U в блоке классификации — каждый класс может быть расщеплен на несколько классов или объединен ряд близких классов. Это позволяет варьировать количество классов и распределение функций в них.

В случае необходимости процедура разбиения может быть повторена с измененными значениями указанных параметров.

В зависимости от допустимых затрат машинного времени и требуемой точности приближения искомого базиса к минимальному задаются параметры: величины изменения вероятностей выбора функций и количество выборов в одном цикле. Процесс выбора базиса может быть прекращен в любой момент.

Для выбора базиса элемента ОВСр по системе F , содержащей 737 функций применялся комплекс программ [1]. Множество F было разбито на 70 классов. В качестве множества Ψ рассматривалось множество всех монотонных бесповторных в д.и.ф. функций восьми переменных, спектры которых [3] попарно различны. Число таких функций равно двадцати двум.

Результаты выбора базиса показали, что разница между минимальными из найденных значений $L(F, W_s)$ и $L(F, \Psi)$ составляет менее 1,5% от $L(F, \Psi)$ при $s = 8$ и менее 4% при $s = 4$. Отметим, что при $s = 1$ эта разница превысила 40% от значения $L(F, \Psi)$. Успешность применения алгоритма СПА подтверждает предположение о существовании достаточного количества различных базисов (при $s \geq 4$), оценки которых близки к минимальной.

Л и т е р а т у р а

1. КОЙФМАН А.А., КУЛИШ Г.Н., МАКАРОВ Л.И., СКОРОБОГАТОВ В.А. Автоматизированное проектирование устройств логического управления в одномерной вычислительной среде. — Настоящий сборник, стр. 90—111.
2. КОЙФМАН А.А., МАКАРОВ Л.И., ПАНКОВ А.В., ПОПКОВ В.К., СКОРОБОГАТОВ В.А. Синтез устройств логического управления в одномерной вычислительной среде. — Настоящий сборник, стр. 119—128.
3. ЛБОВ Г.С. Выбор эффективной системы признаков. — "Вычислительные системы", Новосибирск, 1965, № 19, стр. 21.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 декабря 1972 г.