

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСПОЗНАВАНИЯ
ИЗОМОРФИЗМА ПЛОСКИХ ГРАФОВ

В.К.Попков

Вопросы изоморфизма являются центральными в теории графов и её приложениях. Так например, решение некоторых экстремальных задач на графах, сводится к распознаванию изоморфизма графов.

В общем случае задача распознавания изоморфизма графов представляется чрезвычайно трудной и, как предположил Зыков А.А. [1], разрешима только путем полного перебора. Поэтому представляют интерес алгоритмы, позволяющие сократить перебор. В работе [2] предлагается алгоритм распознавания изоморфизма, который в лучшем случае дает оценку n^2 , а в худшем — все тот же полный перебор. Существуют также работы [1,3,4], в которых излагаются критерии изоморфизма двух графов. В этих работах проблема изоморфизма двух графов сводится к проблеме изоморфизма двух других графов.

В то же время для некоторых классов графов существуют алгоритмы, улучшающие оценки. Так, например, в работе [5] проблема изоморфизма решается для деревьев. Случай плоских графов представляет самостоятельный интерес, и вопросы изоморфизма в этом классе графов имеют много приложений.

В настоящей работе рассматриваются связанные неориентированные плоские графы без петель, кратных ребер, точек сочленения и гамаков.

Пусть задан произвольный граф $L = (X, \mathcal{U})$, где X — множество вершин ($|X| = n$), а $\mathcal{U}$ — множество ребер ($|\mathcal{U}| = m$) графа L . Сферической (плоской) реализацией [6] $S(L) | P(L) |$ графа L на-

выдается представление его вершин x_i точками сферы (плоскости) $e(x_i)$, а его ребер u — простыми дугами, лежащими на сфере (плоскости), причем выполняются следующие условия:

- если $x_i \neq x_j$, то $e(x_i) \neq e(x_j)$,
- если $u_i \neq u_j$, то $e(u_i) \cap e(u_j) = \emptyset$,
- если x_i индентна ребру u , то точка $e(x_i)$ является концом дуги $e(u)$.

Граф L сферический (плоский), если он имеет хотя бы одну сферическую (плоскую) реализацию.

Две сферические (плоские) реализации назовем изотопными, если их можно совместить на сфере (плоскости), непрерывно деформируя $S_1(L)$ и $S_2(L)$ так, чтобы никакие дуги не пересекались, а вершины не совпадали.

ЛЕММА 1. Если граф L без точек сочленения и гамаков, то число неизотопных сферических реализаций не больше двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется сферическая реализация $S_1(L)$ графа L .

Определим операцию ψ как зеркальное отражение сферы (применить операцию ψ к $S(L)$ означает "вывернуть сферу наизнанку"). В общем случае $S_1(L) \sim \psi S_1(L) = S_2(L)$ и $S_2(L)$ является сферической реализацией графа L .

Далее покажем, что не существует сферической реализации $S(L)$, которая не изотопна одновременно с $S_1(L)$ и $S_2(L)$.

Определим операцию φ на $S_1(L')$ ($L' \subset L$) как непрерывное перемещение точек $e(x_i)$ по сфере с пересечением дуг $e(u)$. В этом случае получится сферическая реализация $S(L)$, не изотопная $S_1(L)$. Очевидно, любое возможное построение сферических реализаций можно получить, применяя операцию φ к тому или иному подграфу L' графа L .

Заметим, что произвольному циклу μ графа L соответствует замкнутая кривая $e(\mu)$ в $S_1(L)$.

Итак, применим операцию φ к некоторой части $S_1(L')$ так, чтобы полученная реализация $S(L)$ была сферической.

Тогда $\psi S_1(L)$ должна располагаться внутри некоторой замкнутой кривой $e(\mu_1)$, а $S_1(L')$ внутри кривой $e(\mu_2)$.

Возможны три случая:

а) $e(\mu_1) = e(\mu_2)$, тогда $\varphi S_1(L') = \psi S_1(L) = S_2(L)$.

б) $e(\mu_1) \cap e(\mu_2) = \emptyset$, тогда, в силу связности L , $S_1(L')$ соединима с точками кривых $e(\mu_1)$ и $e(\mu_2)$, следовательно, в какой бы кривой $S_1(L')$ не располагалось, дуги, соединяющие $S_1(L')$ с другой кривой, пересекут замкнутую кривую, содержащую $S_1(L')$, а значит, $S_1(L')$ не сферическая реализация.

в) $e(\mu_1) \cap e(\mu_2) = e(q) = \emptyset$, если удалить $S_1(L')$, то $e(q)$ не замкнутая кривая. Пусть $S_1(L')$ соединима с точками этой кривой и только с ними. В противном случае будет иметь место б). С другой стороны, если $S_1(L')$ соединима только с точками кривой $e(q)$, то концевые точки $e(q)$ являются концевыми точками гамака, что противоречит условию леммы.

Если $e(q) = e(x_0)$, то x_0 — точка сочленения. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Число плоских неизотопных реализаций графа L без точек сочленения и гамаков не превышает $2(m - n + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем операцию $\omega_\alpha S(L)$, отображающую сферу без точки на плоскость. Пусть имеется сферическая реализация $S(L)$ графа L , тогда расположим точку α на какой-либо грани $z_\alpha \in S(L)$ и, спроектировав $S(L)$ на плоскость, получим плоскую реализацию $P_\alpha(L)$.

Нетрудно заметить, что если α_1 и α_2 принадлежит одной грани и не лежат на $S(L)$, то $\omega_{\alpha_1} S(L)$ изотопна $\omega_{\alpha_2} S(L)$. Следовательно, сферическая реализация $S(L)$ порождает $m - n + 2$ плоских реализаций, где $m - n + 2$ — число граней в $S(L)$ (формула Эйлера). Но $\psi S(L)$, по лемме 1, единственная не изотопная $S(L)$ сферическая реализация, которая в свою очередь порождает аналогичное число плоских не изотопных реализаций. Лемма доказана.

Пусть имеется плоская реализация $P_L(L)$ графа L . Перенумеруем точки $P_L(L)$ с помощью алгоритма A_P . Полученную нумерацию назовем правой нумерацией $P_L(L)$ и обозначим через $N_{x_j}^{P_L} P_L(L)$.

А л г о р и т м A_P

1. Выберем произвольную точку x_i из внешней замкнутой кривой $e(\mu)$ плоской реализации $P(L)$ графа L . Присвоим точке $e(x_i)$ номер 1.

2. Двигаемся по правой дуге до точки $e(x_2)$, присваиваем ей номер 2, а дугу $e(x_1, x_2)$ отмечаем.

3. При дальнейшей нумерации точек возможны два случая:

а) выходя из точки $e(x_k)$ по правой дуге в точку $e(x_{k+1})$ и отмечая дугу $e(x_k, x_{k+1})$, присваиваем точке $e(x_{k+1})$ номер, если его еще нет. Далее, если из точки $e(x_{k+1})$ исходят неотмеченные дуги, то двигаемся по самой правой неотмеченной дуге и отмечаем её. Через конечное число шагов наступит момент, когда очередная точка $e(x_e)$ станет инцидентной только отмеченным дугам.

б) если $e(x_{k+1})$ инцидентна только отмеченным дугам, то возвращаемся назад к точке $e(x_k)$, повторно отмечая дугу $e(x_k, x_{k+1})$. Если $e(x_k)$ также инцидентна только отмеченным дугам, то возвращаемся к точке $e(x_{k-1})$, отмечая дугу $e(x_k, x_{k-1})$. (Примечание: точка $e(x_{k-1})$ предшествует точке $e(x_k)$ в маршруте $e(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$).

Если все дуги оказались помеченными дважды, то процесс окончен. В противном случае найдется точка $e(x_p)$ на кривой $e(x_{k+1}, \dots, x_1)$, с которой инцидентны неотмеченные дуги; имеем случай а).

4. Так как граф L конечный и каждая дуга в $P(L)$ отмечается дважды, то за $2m$ шагов процесс будет закончен.

Так как алгоритм A_p является несущественной модификацией алгоритма Тэрри [3], то доказательство того, что все ребра будут помечены дважды, следует из доказательства, предложенного Тэрри.

Единственность нумерации при фиксированной вершине x_j и плоской реализации следует из того, что плоские реализации изотопны относительно их непрерывной деформации, а также из того, что в каждой точке выбирается крайняя правая дуга, которая при любой непрерывной деформации плоской реализации остается правой.

Очевидно, что подобным образом можно определить левую нумерацию $N_{x_j}^e P_i(L)$.

ТЕОРЕМА. Граф L имеет $4m$ различных правых нумераций, если он не содержит точек сочленения и гамма-ков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана сферическая реализация $S_i(L)$ графа L , тогда по лемме 2 она порождает $m-n+2$ неизотопных плоских реализаций $P_i(L)$. Обозначим через h_i число точек на внешней кривой плоской реализации $P_i(L)$.

Имеет место тождество [3]

$$\sum_{i=1}^{m-n+2} h_i = \sum_{j=1}^n \sigma(x_j) = 2m,$$

где $\sigma(x_j)$ — степень x_j вершины.

Так как правая нумерация определяется фиксированной плоской реализацией $P_i(L)$ и точкой $e(x_j)$ на внешней кривой $e(\mu)$ этой реализации, то число различных нумераций $N_{x_j}^p P_i(L)$ для плоских реализаций, порождаемых сферической реализацией $S_i(L)$, равно $2m$. Но по лемме I число сферических неизотопных реализаций не больше двух, откуда следует утверждение теоремы.

На основании теоремы можно предложить алгоритм распознавания изоморфизма плоских графов с заданными ограничениями.

Смысл алгоритма распознавания плоских графов заключается в перенумеровании всех плоских реализаций графа, а затем в сравнении того или иного представления графа, задающего его с точностью до нумерации.

Нетрудно заметить, что задавать все плоские реализации не имеет смысла. Действительно, пусть имеется плоская реализация $P_i(L)$ графа L . Перенумеруем грани и точки плоской реализации, тогда для получения правой нумерации некоторой плоской реализации $P_i(L)$ в точке $e(x_j)$ достаточно начать нумеровать вершины графа L , двигаясь изнутри i грани, начиная с точки $e(x_j)$. Законность такой нумерации будет очевидной, если вспомнить, каким образом получаются плоские реализации из сферической.

Далее показываем равносильность правой нумерации плоской реализации $P_i(L)$ соответствующей левой нумерации $\psi P_i(L)$; имеет место формула.

$$N_{x_j}^p P_i(L) = N_{x_j}^e \psi P_i(L).$$

Этот факт имеет простую геометрическую иллюстрацию. Пусть $P_i(L)$ — некоторая плоская реализация графа L . Посмотрим на эту реализацию снизу, тогда, очевидно, полученная реализация есть $\psi P_i(L)$, а нумерация у нее левая.

А л г о р и т м A_I

1. Построим плоскую реализацию $P(L_1)$ графа L_1 , перенумеруем вершины графа L_1 с помощью алгоритма A_P и составим матрицу смежности $M(L_1)$ графа L_1 согласно возрастанию номеров вершин графа L_1 .

2. Построим плоскую реализацию $P(L_2)$ и перенумеруем грани этой реализации.

3. Выберем пару z_i, x_j (где $P(L_2) = z_i$ — грань, а x_j — вершина, принадлежащая границе этой грани), для которой не строилась нумерация.

4. Построим нумерацию $N_{x_j}^{P_i} P_i(L_2)$ (P_i — плоской реализации соответствует z_i — грань) и соответствующую ей матрицу смежности $M(L_2)$.

5. Если $M(L_1)$ и $M(L_2)$ совпадают, то п. 10, иначе п. 6.

6. Построим нумерацию $N_{x_j}^{P_i} P_i(L_2)$ и соответствующую ей матрицу $M(L_2)$.

7. Если $M(L_1)$ и $M(L_2)$ совпадают, то п. 10, иначе п. 8.

8. Если все пары z_i, x_j просмотрены, то п. 9, иначе п. 3.

9. Графы не изоморфны.

10. Графы изоморфны.

Число операций Q_I в алгоритме A_I , очевидно, равно произведению числа операций при построении нумерации, на число сравнений матриц смежности графов и число операций при перестановке рядов матриц смежности и поэлементного сравнения матриц:

$$Q_I = c_1 m \cdot 4m \cdot c_2 n^3 = c m^2 \cdot n^3.$$

Так как $m \leq 3(n-2)$, то $Q_I = c(3n-6)^2 n^3 = c n^5$, где $c \approx 10^{2-3}$, что существенно меньше полного просмотра всевозможных нумераций.

Q_I можно существенно улучшить, если воспользоваться представлением графов, например, верным покрытием графа L [3].

Приведенные оценки будут не полными, если не указать число операций при расположении графа на плоскости. Воспользуемся алгоритмом, описанным в работе [6]. Алгоритм разбивается на два этапа:

а) построение циклов системы M графа G ($c \cdot (m-n+2)^2$ операций),

б) раскраска вершин графа и разбиение их на категории ($c n^2$ операций), следовательно, число операций при расположении графа

на плоскости равно $Q_2 = c \cdot ((m-n+2)^2 + n^2)$, но $m \leq 3(n-2)$, откуда следует, что $Q_2 \leq c n^2$, где $c \approx 10^3$.

Таким образом, число операций при распознавании изоморфизма плоских графов не превышает $Q_1 + Q_2$.

Л и т е р а т у р а

1. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, "Наука", 1969.

2. СКОРОБОГАТОВ В.А. О распознавании изоморфизма неориентированных графов. — "Вычислительные системы", Новосибирск, "Наука" СО, 1969, вып. 33, стр. 34-36.

3. ОРЕ О. Теория графов. М., "Наука", 1968.

4. HALIN R., JUNG H.A. Note on isomorphisms of graphs. — "J. London Math. Soc.", 1967, vol. 2, N 166.

5. KELLY P.I. A congruence theorem for trees. — "Pacific J. Math.", 1957, vol. 7, N 1.

6. ПЛЕСНЕВИЧ Г.С. Расположение графа на плоскости. — "Вычислительные системы" Новосибирск, 1963, вып. 6, стр. 45-56.

Поступила в ред.-изд. отд.

15 декабря 1972 г.