УДК 681.142.181.4

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО КРИТЕРИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОЦЕНТА ВЫХОДА

Е.И. Беляев

I. Общие соотношения. Рассмотрим множество двоичных логических инверторов, описываемых характеристиками передачи (ХП) вида

$$y = f(x, \bar{a}), \tag{1}$$

где $\bar{a}$ $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ – вектор параметров элемента. При разбросах значений $\bar{a}$ характеристики (I) образуют некоторое семейство (рис. I). Сколь угодно длинная цепь таких элементов должна обеспечивать незатухающую передачу двоично-квантованного потенциального сигнала. Для этого достаточно, чтобы каждый элемент удовлетворял условиям [I]:

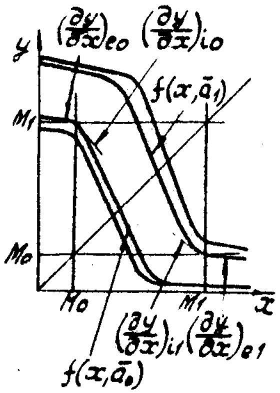


Рис. I

$$\begin{aligned} f(M_0, \bar{a}) &\geq M_1, \\ f(M_1, \bar{a}) &\leq M_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Неравенства (2) задают в пространстве параметров $\bar{a}$ область работоспособности $D(\bar{a}, M_0, M_1) \geq 0$. Функциональный процент выхода равен вероятности выполнения условий (2):

$$Q(\gamma, M_0, M_1) = \int\limits_{D(\bar{a}, M_0, M_1) \geq 0} \rho(\bar{a}|\gamma)\, da_1 \dots da_n, \tag{3}$$

где $\rho(\bar{a}|\gamma)$ – совместная плотность распределения координат вектора $\bar{a}$, определяемая некоторыми технологическими условиями γ; интеграл n-кратный.

В данной работе сформулированы необходимые условия оптимального выбора тестовых параметров M_0, M_1 по критерию максимума Q в области $0 \leq M_0 \leq M_1$. Отметим, что на границах этой области $Q = 0$; внутри области функция Q практически всегда непрерывно дифференцируема. Рассматривается случай $Q(M_0, M_1) < 1$ при всех M_0, M_1.

Пусть граничная ХП $y = f(x, \bar{a}_0)$, проходящая через точку (M_0, M_1) вправо, характеризуется значением параметра $\bar{a}_0 [a_{10}, \dots, a_{n0}]$ и производной $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{i0}$; а граничная ХП $y = f(x, \bar{a}_1)$, проходящая через точку (M_1, M_0) влево, имеет значение параметра $\bar{a}_1 [a_{11}, \dots, a_{n1}]$ и производную $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{i1}$.

Кроме того, производную граничной ХП слева от точки (M_0, M_1) обозначим $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{e0}$, а производную граничной ХП справа от точки $(M_1 M_0)$ назовем $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{e1}$.

В точках (M_0, M_1) и (M_1, M_0) должно выполняться общее условие устойчивости точек равновесия спусковых систем [2]

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{e0} \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{e1} < 1. \tag{4}$$

Покажем, что экстремум величины (3) достигается при дополнительном условии

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{i0} \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{i1} \geq 1. \tag{5}$$

Произвольно выбранную координату a_i вектора $\bar{a}$ назовем b соответственно $a_{i0} = b_0$, $a_{i1} = b_1$; $(n-1)$ – мерный вектор остальных координат обозначим $\tilde{a}$, а область его допустимых значений, соответствующую условиям (2), обозначим $\tilde{D}(\tilde{a}, M_0, M_1) \leq 0$.

При этом интеграл (3) можно представить в виде [3]:

$$Q(M_0, M_1) = \int\limits_{\tilde{D}(\tilde{a}, M_0, M)} \int\limits_{b_0(\tilde{a}, M_0, M_1)}^{b_1(\tilde{a}, M_0, M_1)} \rho(\tilde{a}, b)\, db\, d\tilde{D} \tag{6}$$

Здесь кратность внешнего интеграла n -I. Продифференцируем выражение (6) по M_0 согласно [4]:

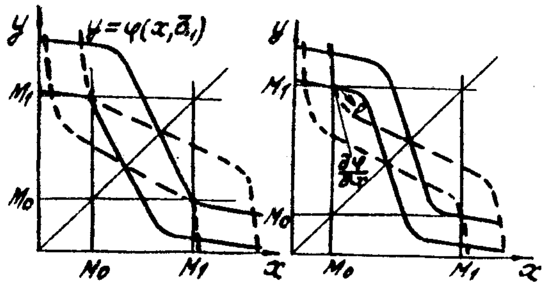
$$\frac{\partial Q}{\partial M_0} = \int\limits_{\tilde{D}(\tilde{a},M_0,M_1)} \left[\frac{\partial b_1}{\partial M_0}\, \rho(\tilde{a},b_1) - \frac{\partial b_0}{\partial M_0}\, \rho(\tilde{a},b_0) \right] d\tilde{D}. \qquad (7)$$

Аналогично выглядит производная $\dfrac{\partial Q}{\partial M_1}$.

Производная интеграла (3) по некоторому направлению ℓ в плоскости $[M \quad M_1]$ выражается формулой [3]:

$$\frac{\partial Q}{\partial \ell} = \frac{\partial Q}{\partial M_0}\,\frac{d M_0}{d \ell} + \frac{\partial Q}{\partial M_1}\,\frac{d M_1}{d \ell} . \qquad (8)$$

Построим характеристику $x=f(y,\bar{a}_1)$, обратную вышеописанной ХП $y=f(x,\bar{a}_1)$; обозначим ее $y=\varphi(x,\bar{a}_1)$. При этом выполнение условия (5) представлено на рис.2а, а его нарушение на рис. 2б. Подчеркнем, что практически ситуация рис.2б возможна лишь за счет физических ограничений на параметры a_i ,ибо функция (I) абсолютных экстремумов по этим параметрам обычно не имеет.



а) б)

Рис. 2

Предположим, что условие (5) не выполняется. Тогда в точке $x=M_0$, $y=M_1$ существует множество направлений ℓ таких, что производные $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_\ell$ удовлетворяют условиям (рис. 2б):

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{i0} < \left| \frac{dy}{dx} \right|_{\ell} < \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{M_0 M_1} . \qquad (9)$$

Рассмотрим производные $\dfrac{\partial b_0}{\partial \ell}$ и $\dfrac{\partial b_1}{\partial \ell}$ по одному из таких направлений в той же точке.

$$\frac{\partial b_0}{\partial \ell} = \frac{\partial b_0}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\ell} + \frac{\partial b_0}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\ell} = \frac{\partial b_0}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\ell}\left(1 - \frac{\frac{dy}{dx}_\ell}{\frac{\partial y}{\partial x}_{i0}} \right), \qquad (I0)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \ell} = \frac{\partial b_1}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\ell}\left(1 - \frac{\frac{dy}{dx}_\ell}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}_{M_0 M_1}} \right) . \qquad (II)$$

Подставим (7) и производную $\dfrac{\partial Q}{\partial M_1}$ в (8); затем учтем (I0) и (II). Из (9) следует, что знаки сомножителей в скобках в (I0) и (II) различны.

Напоминаем,что функция $\rho(\bar{a})$ в принятых условиях $Q(y,M_0,M_1)<1$ всюду строго положительна. При этом в случае, когда знаки $\dfrac{\partial b_0}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial b_1}{\partial x}$ одинаковы, нетрудно убедиться, что в точке M_0,M_1 ,удовлетворяющей условиям (5),производная (8) при условиях (9) строго положительна.

В случае, если знаки $\dfrac{\partial b_0}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial b_1}{\partial x}$ в рассматриваемой точке различны (при этом изменение параметра b при фиксированном $\bar{a}$ вызывает как бы вращение соответствующей ХП ;практически такой случай малореален) нетрудно показать, что точка M_0 ,M_1 обязана удовлетворять условию $b_0=b_1$: иначе на интервале $[b_0, b_1]$ нарушалось бы какое-либо из условий (2). Но при $b_0=b_1$ условия (2) задают лишь одну границу области D по параметру b , и при движении по направлению ℓ (при условиях (9) и при $b_0 = b_1$) перемещается только эта граница; другая же определяется физическими ограничениями и остается неподвижной. Производная (8) в этом случае также строго положительна.

Приходим к выводу, что точка M_0 , M_1 ,удовлетворяющая условиям (2), не может быть точкой экстремума процента выхода (3), если нарушены условия (5).

2. Алгоритм проверки ограничений. В общей программе статистической оптимизации схемы может быть применен следующий составной оператор (рис.3).

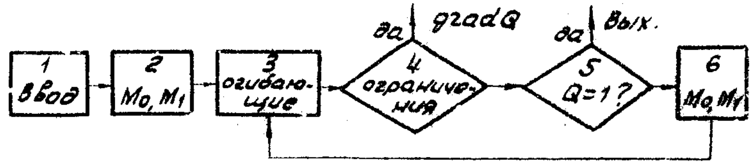


Рис. 3

1. Ввод исходных данных: модель (I) и граничные значения a_i^-, a_i^+ всех параметров a_i.

2. Выбор нулевого приближения значений M_0, M_1.

3. Построение огибающих, проходящих через выбранную точку M_0, M_1.

В общем виде такое построение является задачей на условный экстремум вида

$$f_{min}(M_0+\delta, \bar a_\alpha) \quad \text{при} \quad f(M_0,\bar a_\alpha)=M_1,$$
$$\varphi_{max}(M_0+\delta,\bar a_\beta) \quad \text{при} \quad \varphi(M_0,\bar a_\beta)=M_1, \qquad (12)$$

где $\bar a_\alpha$ и $\bar a_\beta$ – реализации вектора $\bar a$, удовлетворяющие условиям (12) и различные для f и для φ; выбор δ определяется опытом.

Но практически с учетом вышеизложенного (см. (5) и далее) задача решается гораздо проще; для всех составляющих a_i, кроме одной a_k, фиксируются (поочередно) граничные значения, а для свободной составляющей a_k значение выбирается из уравнения

$$f(M_0,\bar a)=M_1, \qquad (13)$$

решение которого производится методом Ньютона; затем проверяется величина

$$f(M_0+\delta,\bar a), \qquad (14)$$

и для огибающей выбирается та составляющая a_k, при которой величина (14) минимальна; остальные a_i остаются граничными. Аналогичные вычисления производятся для функции φ.

4. Проверка условий (5) в форме

$$f_{min}(M_0+\delta,\bar a_\alpha)-\varphi_{max}(M_0+\delta,\bar a_\beta)<\varepsilon .$$

Если условия выполнены – переход к прямому вычислению градиента процента выхода (3); иначе – блок 5.

5. Проверка, все ли параметры a_i для f и для φ приняли граничные значения; если все, то возможен стопроцентный выход, и задача статистической оптимизации отпадает (при этом возможны другие задачи, но это выходит за рамки данной работы). Иначе – блок 6.

6. Выбор новой точки $M_0:=M_0+\delta$, $M_1:=f_{min}(M_0+\delta,\bar a_\alpha)$. Возврат в блок 3.

П р и м е р . Рассмотрим цепь логических инверторов на МДП-транзисторах (рис. 4а). Статические ХП описываются выражениями [4]:

$$y=f(x,\bar a)=E-U_{0н}-\sqrt{\beta}(x-U_{0у}), \qquad (15)$$

$$y=\varphi(x,\bar a)=\frac{(E-U_{0н}-x)^2}{2\beta x}+\frac{x}{2}+U_{0у} \qquad (16)$$

и представлены на рис. 4б. В этих выражениях $\bar a=[\beta,U_{0у},U_{0н},E]$; β – отношение крутизн управляющего и нагрузочного транзисторов; $U_{0у}, U_{0н}$ – пороговые напряжения соответственно управляющего и нагрузочного транзисторов; E – напряжение питания. Реакция подложки не учтена.

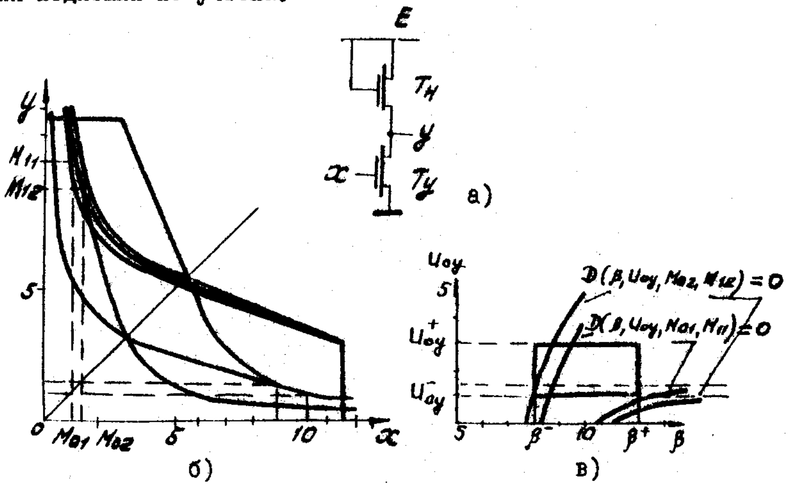


Рис. 4

Исходные данные: E = 12,6в, β^+ = 12, β^- = 9, $U^+_{0у}=U^+_{0н}$ = 2,5в, $U^-_{0у}=U^-_{0н}$ = 1 в.

Пусть первоначально выбрана точка (рис. 4б): $M_0=U^-_{0у}$ = 1в, $M_1=E-U^+_{0н}$ = 10,1 в. Соответствующая область работоспособности представлена на рис. 4в. Вправо от этой точки производные имеют значения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\sqrt{\beta^+}=-3,5 , \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = - \frac{E - U^{+}_{0H}}{2\beta x^2} + \frac{1}{2} + \frac{\beta+1}{2\beta} = -4,3 \qquad (18)$$

При этом точка M_0, M_1 не оптимальна по критерию процента выхода (3). В самом деле, перемещая точку M_0, M_1 по огибающей (15), получаем уменьшение минимально допустимого по условию (18) значения β при всех U_{0y}, т.е. всестороннее расширение области работоспособности (в пределах физических ограничений). В итоге приходим к точке M_0 = 1,3 в, M_1 = 9 в, в которой $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -3,5$.

При этом получаем частный случай: условия (5) обращаются в равенство; нетрудно показать, что при этом соответствующие составляющие градиента процента выхода (3) обращаются в нуль, т.е. выполняется одно из необходимых условий оптимизации.

Новая граница области также показана на рис. 4в.

В задаче статистической оптимизации логических элементов по критерию функционального выхода существуют необходимые достаточно простые ограничения в виде неравенств; проверка этих ограничений и их выполнение могут несколько сократить количество весьма трудоемких операций вычисления функционального процента выхода и его градиента и сэкономить машинное время.

Литература

1. МОРАЛЕВ С.А., ПАРАТОВ Г.М., МОЛЧАНОВ А.А., ХОДОШ Л.С. Математическое моделирование схем на МДП-транзисторах с применением ЭВМ.-В сб.:"Микроэлектроника", "Сов.радио",1969,вып.3.

2. ДОУ. Физическая реализация цифровых логических схем.- В сб.: "Микромощная электроника", "Сов.радио", 1967.

3. СОБОЛЕВ С.Л. Уравнения математической физики. Физматгиз, 1966.

4. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Физматгиз, 1963, т. I.

5. КРОУФОРД Р. Схемные применения МОП-транзисторов. "Мир", 1969.

Поступила в ред.-изд.отд.
3 апреля 1973 г.