

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

В.Л.Мирошниченко

Пусть на промежутке $[\alpha, \beta]$ имеется разбиение

$$\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \beta,$$

в узлах которого заданы значения функции $y(x_i) = y_i$. Через $S(x)$ будем обозначать кубическую сплайн-функцию дефекта I, построенную на Δ и удовлетворяющую условиям $S(x_i) = y_i$ ($i = 1, \dots, N$). На концах промежутка $[\alpha, \beta]$ предполагаются выполненными граничные условия одного из типов:

I. $S'(x_i) = y'(x_i), \quad i = 0, N;$

II. $S''(x_i) = y''(x_i), \quad i = 0, N;$

III. условия периодичности: $S^{(p)}(x_0) = S^{(p)}(x_N), \quad p = 1, 2.$

В литературе по теории сплайн-функций [1-3] в предположении, что $y(x) \in C^4[\alpha, \beta]$, имеются оценки остаточных членов

$$\|S^{(p)}(x) - y^{(p)}(x)\|_C \leq B_p H^{4-p} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |y^{(4)}(x)|, \quad (I)$$

$$p = 0, 1, 2, 3.$$

где $H = \max_i h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, и постоянные B_p не зависят от H .

При этом показано, что порядок относительно H не может быть повышен. В данной заметке мы получим оценки вида (I) при более слабых требованиях к гладкости функции $y(x)$.

ТЕОРЕМА I. Если $y(x) \in C^2[\alpha, \beta]$ и $y(x) \in C^4[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, N-1$), то имеют место оценки (I) с константами:

$$B_0 = \frac{7}{64}, \quad B_1 = \frac{7}{8}, \quad B_2 = \frac{7}{8}, \quad B_3 = (1 + \frac{2}{3} K), \quad K = \frac{H}{\min h_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай периодических граничных условий. Величины $M_j = S''(x_j)$, ($j = 0, 1, \dots, N$) удовлетворяют системе уравнений

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left[\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right], \quad (2)$$

$$j = 0, 1, \dots, N-1,$$

с циклической заменой индексов N на 0 и -1 на $N-1$. Здесь

$$\lambda_j = 1 - \mu_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}.$$

Из (2) тождественным преобразованием приходим к системе

$$\mu_j (M_{j-1} - y_{j-1}'') + 2(M_j - y_j'') + \lambda_j (M_{j+1} - y_{j+1}'') =$$

$$- \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left[\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right] - \mu_j y_{j-1}'' - 2y_j'' - \lambda_j y_{j+1}'', \quad (3)$$

$$j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Преобразуя правые части уравнений системы (3) с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$M_j (M_{j-1} - y_{j-1}'') + 2(M_j - y_j'') + \lambda_j (M_{j+1} - y_{j+1}'') =$$

$$= \frac{1}{4(h_j + h_{j+1})} \left[h_{j+1}^3 y^{(4)}(\xi_{j,j+1}) + h_j^3 y^{(4)}(\xi_{j-1,j}) - 2h_{j+1}^3 y^{(4)}(\xi_{j,j+1}) - \right.$$

$$\left. - 2h_j^3 y^{(4)}(\xi_{j-1,j}) \right] \leq \frac{3}{4} (h_{j+1}^2 - h_j h_{j+1} + h_j^2) \max_{x \in [\alpha, \beta]} |y^{(4)}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4} H^2 \max_{x \in [\alpha, \beta]} |y^{(4)}(x)|, \quad (4)$$

где $\xi_{j,j+1}, \xi_{j-1,j} \in [x_j, x_{j+1}]$, $\xi_{j-1,j}, \xi_{j,j+1} \in [x_{j-1}, x_j]$.

Используя оценку $\|A^{-1}\| \leq 1$ [1], где A - матрица системы (3), из (4) имеем

$$\max_j |M_j - y_j''| \leq \frac{3}{4} H^2 \max_{x \in [\alpha, \beta]} |y^{(4)}(x)|. \quad (5)$$

Пусть $L(x)$ — кусочно-линейная функция, удовлетворяющая условиям

$$L(x_j) = y_j'' \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Так как $y(x) \in C^4[x_j, x_{j+1}]$, то

$$\|L(x) - y''(x)\|_C \leq \frac{1}{8} H^2 \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (6)$$

Учитывая, что разность $S''(x) - L(x)$ есть линейная функция на каждом из промежутков $[x_j, x_{j+1}]$, из (5) и (6) получаем

$$\|S''(x) - y''(x)\|_C \leq \frac{7}{8} H^2 \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (7)$$

Функция $S(x) - y(x)$ обращается в нуль в точках x_j ($j = 0, 1, \dots, N$). Согласно теореме Ролля на каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ существует точка $\xi_{j,j+1}$ такая, что

$$S'(\xi_{j,j+1}) - y'(\xi_{j,j+1}) = 0.$$

Поэтому

$$\|S'(x) - y'(x)\| = \int_{\xi_{j,j+1}}^x [S''(x) - y''(x)] dx, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Учитывая (7), находим

$$\|S'(x) - y'(x)\|_C \leq \frac{7}{8} H^3 \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (8)$$

На $[x_j, x_{j+1}]$ введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = S(x) - y(x) - (x - x_j)(x - x_{j+1})K_j,$$

где K_j — некоторая постоянная. Пусть x — произвольная точка промежутка $[x_j, x_{j+1}]$. Определим K_j так, чтобы $\varphi(x) = 0$. Кроме того, очевидно $\varphi(x_j) = \varphi(x_{j+1}) = 0$. Поэтому существует точка $\xi \in [x_j, x_{j+1}]$ такая, что $\varphi''(\xi) = 0$. Следовательно,

$$K_j = \frac{1}{2} [S''(\xi) - y''(\xi)]$$

и

$$|S(x) - y(x)| \leq \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2} \|S''(x) - y''(x)\|_C.$$

Учитывая (7) и произвольность точки x , имеем

$$\|S(x) - y(x)\|_C \leq \frac{7}{64} H^4 \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (9)$$

Функция $L(x) - y''(x)$ в точках x_j обращается в нуль. Следовательно, на каждом $[x_j, x_{j+1}]$ имеется точка η , в которой $L'(\eta) - y'''(\eta) = 0$. Поэтому

$$\|L'(x) - y'''(x)\|_C \leq H \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (10)$$

Кроме того, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

$$L'(x) - S'''(x) = \frac{1}{h_{j+1}} (y_{j+1}'' - y_j'') - \frac{1}{h_{j+1}} (M_{j+1} - M_j).$$

Отсюда, в силу (5), имеем

$$\|L'(x) - S'''(x)\|_C \leq \frac{3}{2} K H \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (11)$$

Объединяя (10) и (11), получаем

$$\|y'''(x) - S'''(x)\|_C \leq (1 + \frac{3}{2} K) H \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|. \quad (12)$$

Доказательство завершено. Другие типы граничных условий рассматриваются аналогично.

При доказательстве теоремы существенно использовалось условие $y(x) \in C^4[x_j, x_{j+1}]$. Если ограничиться условием $y(x) \in C^2[a, b]$, то известны оценки

$$\|S^{(\rho)}(x) - y^{(\rho)}(x)\|_C \leq B_\rho H^{2-\rho} \omega(y''; H), \quad \rho = 0, 1, 2,$$

где $\omega(y''; H)$ — модуль непрерывности функции $y''(x)$. Если к тому же $y''(x) \in L_{\infty}^{\rho} M$, то

$$\|S^{(\rho)}(x) - y^{(\rho)}(x)\|_C \leq B_\rho^2 M H^{2+\alpha-\rho}, \quad \rho = 0, 1, 2. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $y(x) \in C^2[a, b]$ и $y(x) \in C^5[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$), то

$$\begin{aligned} \|S^{(\rho)}(x) - y^{(\rho)}(x)\|_C &\leq A_\rho H^{5-\rho} \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)| + \\ &+ B_\rho H^{4-\rho} \max_{x \in [a, b]} |y^{IV}(x)|, \end{aligned} \quad (14)$$

$\rho = 0, 1, 2, 3,$

где

$$A_0 = \frac{\rho}{32}, \quad B_0 = \frac{3}{64}, \quad A_1 = A_2 = \frac{\rho}{4},$$

$$B_1 = B_2 = \frac{3}{8}, \quad A_3 = \frac{1}{2} \rho K, \quad B_3 = 1 + \frac{3}{4} K,$$

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \rho, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно повторить рассуждения, сделанные при доказательстве теоремы I. Следует только учесть, что в этом случае вместо (4) можно получить

$$\mu_j(M_{j-1} - y''_{j-1}) + 2(M_j - y''_j) + 2_j(M_{j+1} - y''_{j+1}) \leq \\ \leq \frac{\rho H^3}{4} \max_{x \in [a, b]} |y'(x)| + \frac{H^2}{4} \max_{x \in [a, b]} |y''(x)|.$$

Л и т е р а т у р а

1. АЛБЕРТ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и её приложения. М., "Мир", 1972.
2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвеньями — ками. — "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып.38, с.23-73.
3. HALL C.A. On error bounds for spline interpolation. — "J. Approximation Theory", 1968, vol.1, p.209-218.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 июля 1973 года