

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

М.М.Григоренко, В.А.Скороспелов

Ю.С. Завьяловым в [1] предложена математическая модель процесса сглаживания конструкторских обводов упругой рейкой. В линейном приближении задача формулируется на языке кубических сплайнов.

Отрезок $[\alpha, \beta]$ разделен точками

$$\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = \beta. \quad (1)$$

Из $N+3$ -мерного пространства кубических сплайнов $S(x)$, определенных на заданной сетке, выделим $N-1$ -мерное множество F , каждый элемент которого принимает заданные значения S_0 и S_N на концах отрезка $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяет граничным условиям типов I-III с заданными значениями S_{-1} и S_{N+1} [2].

Пусть на сетке Δ задано множество значений $\{y_i\}$ и граничные значения y_{-1}, y_{N+1} . Найти сплайн $\tilde{S}(x)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_i |\tilde{S}_i - y_i| = \min_{S(x) \in F} \sum_{i=1}^{N-1} C_i |S_i - y_i| \quad (2)$$

при условиях

$$|S_{i,0}''' - S_{i-1,0}'''| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

где C_i - заданные веса. Узлам, положение которых после сглаживания не должно сильно изменяться, соответствуют большие веса. Наоборот, некоторые узлы можно "освободить", снабдив их нулевыми весами. Соотношение (3) есть математический аналог условий гладкости, применяемых в плазовых работах. Если положить $h_i = x_{i+1} - x_i$,

то

$$s_i = \frac{1}{2} G^* \frac{(h_i + h_{i-1})^4}{h_{i-1}^3 \cdot h_i^3}, \quad (4)$$

где G^* задано.

Кубический сплайн можно записать в виде:

$$S(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \alpha_{\lambda} (x-x_0)^{\lambda} + \sum_{\ell=1}^{N-1} z_{\ell} (x-x_{\ell})_+^3, \quad (5)$$

где

$$(x-x_{\ell})_+ = \begin{cases} 0, & \text{если } x-x_{\ell} < 0; \\ (x-x_{\ell}), & \text{если } x-x_{\ell} \geq 0. \end{cases}$$

Заменим

$$s_i - y_i = t_i^{(1)} - t_i^{(2)}; \quad \alpha_{\lambda} = \alpha_{\lambda}^{(1)} - \alpha_{\lambda}^{(2)}; \quad z_{\ell} = z_{\ell}^* - \delta_{\ell};$$

где

$$t_i^{(1)} \geq 0; \quad t_i^{(2)} \geq 0; \quad \alpha_{\lambda}^{(1)} \geq 0; \quad \alpha_{\lambda}^{(2)} \geq 0; \quad 0 \leq z_{\ell}^* \leq 2\delta_{\ell}.$$

Тогда задача минимизации функционала (2) с условиями (3) может быть заменена следующей эквивалентной задачей линейного программирования [3]. Минимизировать функционал

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_i (t_i^{(1)} + t_i^{(2)}) \quad (6)$$

при условиях:

$$\sum_{\lambda=0}^3 (\alpha_{\lambda}^{(1)} - \alpha_{\lambda}^{(2)}) (x_i - x_0)^{\lambda} + \sum_{\ell=1}^{N-1} z_{\ell}^* (x_i - x_{\ell})_+^3 - (t_i^{(1)} - t_i^{(2)}) = b_i; \\ i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$$s_{-1} = y_{-1};$$

$$s_{N+1} = y_{N+1};$$

$$\alpha_{\lambda}^{(1)} \geq 0; \quad \alpha_{\lambda}^{(2)} \geq 0; \quad t_i^{(1)} \geq 0; \quad t_i^{(2)} \geq 0; \quad 0 \leq z_{\ell}^* \leq 2\delta_{\ell};$$

где

$$b_i = y_i + \sum_{\ell=1}^{N-1} \delta_{\ell} (x_i - x_{\ell})_+^3;$$

$$t_0^{(1)} = t_0^{(2)} = t_N^{(1)} = t_N^{(2)} = 0;$$

S_{-1} и S_{N+1} — символическое обозначение соответствующих граничных условий.

Для решения этой задачи использован модифицированный симплексный метод с двусторонними ограничениями на переменные [4]. В этом случае в матрицу задачи D включены только условия типа равенства из (7). Ее размерность — $3N + 5$ столбцов и $N + 3$ строк. Оптимальное решение всегда существует, поскольку всегда существует опорное решение. Ниже приводится алгоритм определения последнего. Для столбцов матрицы D введем обозначения:

$$A_{\lambda}^{(j)} - \text{столбец, соответствующий переменной } \alpha_{\lambda}^{(j)};$$

$$R_{\ell} - \text{столбец, соответствующий переменной } z_{\ell}^*;$$

$$T_i^{(j)} - \text{столбец, соответствующий переменной } t_i^{(j)}.$$

Выберем начальный базис в $N + 3$ -мерном пространстве

$$D_0 = (A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, R_1, R_2, \dots, R_{N-1}).$$

соответствующий вектору переменных

$$Z_0 = (\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, z_1^*, z_2^*, \dots, z_{N-1}^*),$$

значения которых определяются из системы $Z_0 = D_0^{-1} \bar{B}_0$, где $\bar{B}_0$ — вектор-столбец с компонентами $(b_0, b_1, \dots, b_N)$. Матрица D_0 невырожденная, поскольку является матрицей для соответствующей задачи интерполяции сплайнами вида (5), которая имеет единственное решение [1].

Остальные переменные примем равными нулю. Пусть L есть множество значений индекса ℓ , для которых $z_{\ell}^* < 0 \cup z_{\ell}^* > 2\delta_{\ell}$. Определим величины

$$P_{\ell} = \begin{cases} 0, & \text{если } z_{\ell}^* < 0; \\ 2\delta_{\ell}, & \text{если } z_{\ell}^* > 2\delta_{\ell}; \end{cases} \quad (\ell \in L).$$

Для всех $\ell \in L$ исключим из базиса z_{ℓ}^* , заменив их на соответствующие переменные $t_{\ell}^{(1)}$, и присвоим им значения P_{ℓ} . Нетрудно

убедиться в том, что полученная матрица D_i будет невырожденной. Значения базисных переменных определяются из системы $\bar{Z}_i = D_i^{-1} \bar{B}_i$, где $\bar{B}_i = \bar{B}_0 - \sum_{l \in L} \bar{P}_l P_l$.

Продолжаем эту процедуру, пока для $\bar{Z}_i$ множество индексов L не окажется пустым. Это произойдет не более чем через $N - 2$ подобных итераций. На практике их число значительно меньше. Последний шаг - из базиса исключаются все отрицательные переменные $\alpha_2^{(1)}$, $\epsilon_i^{(1)}$. Они заменяются соответственно на $\alpha_2^{(2)}$ и $\epsilon_i^{(2)}$. Полученное решение будет опорным для задачи (6), (7).

Описанный алгоритм реализован на ЭВМ "Минск-22" с использованием программы модифицированного симплексного метода [5]. Работа с программой организована по принципу "человек-машина", то есть результат сглаживания представляется в удобной форме для обозрения. С этой целью предполагается использовать дисплей и графопостроитель. Конструктор оценивает результат с точки зрения выполнения некоторых условий, не включенных в систему (7). К ним относятся: сохранение знака кривизны на отдельных участках, сохранение некоторых заданных размеров и т.д. Он изменяет значения некоторых весов и повторяет сглаживание.

Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 38, с. 3-21.
2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвеньями. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 38, с. 23-73.
3. ЗУХОВИЦКИЙ С.И., АВДЕЕВА Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М., "Наука", 1967.
4. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач линейного программирования большого объема. - "Оптимальное планирование", Новосибирск, 1964, вып. 2, с. 3-22.
5. ГРИГОРЕНКО М.М., СКОРОСТЕЛОВ В.А. Программа реализации на ЭВМ "Минск-22" мультипликативного алгоритма для задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями на переменные. "Алгоритмы и программы для решения задач оптимизации". Часть III, Новосибирск, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
8 июня 1973 года