

УДК 517.9:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Л.З. Новгородцева, С.И. Фадеев.

Физические процессы в микрозазоре между контактами пленочного электростатического реле [1] в значительной степени обусловлены величиной временного интервала T_* , за который подвижный контакт — предварительно натянутая пластинка с цилиндрической формой изгиба (струна) — окажется притянутым к неподвижному контакту под действием электростатической силы. Будем считать, что разность потенциалов U между контактами зависит от времени τ :

$$U(\tau) = U_k \Pi(\tau), \quad U_k = \max |U(\tau)|.$$

Пусть, например,

$$U(\tau) = U_k [1 - \exp(-\lambda \tau)], \quad \tau \geq 0.$$

Очевидно, T_* существенно зависит от U_k и λ : T_* увеличивается с уменьшением U_k и λ , и, кроме того, из физического смысла задачи следует, что для всякого $\lambda > 0$ существует минимальное значение U_k такое, что T_* конечно лишь при $U_k > \bar{U}_k$. Аналогично, если $\Pi(\tau)$ — периодическая функция с частотой ω , то должно существовать минимальное в указанном смысле $\bar{U}_k$ для каждого ω , отличного от резонансного. Ниже предлагается метод исследования динамики подвижного контакта реле, позволяющий, в частности, рассчитать указанные динамические параметры T_* и $\bar{U}_k$, если электростатическую силу F_e можно представить как сосредоточенную.

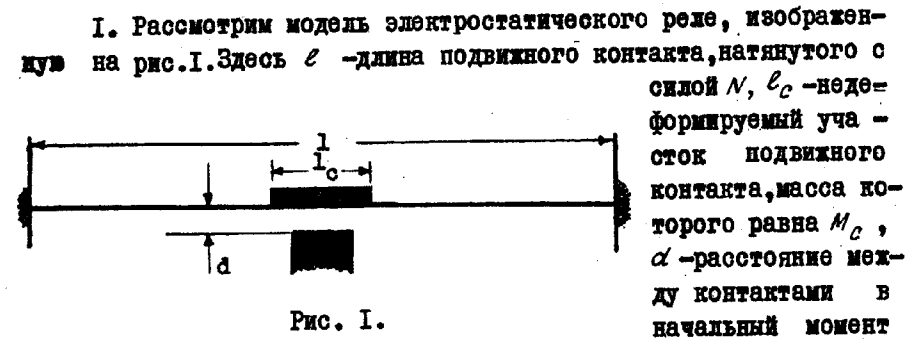


Рис. 1.

Рассмотрим модель электростатического реле, изображенную на рис. 1. Здесь l — длина подвижного контакта, натянутого с силой N , l_c — недеформируемый участок подвижного контакта, масса которого равна M_c , α — расстояние между контактами в начальный момент времени. Массу M остальной части пластинки будем считать равномерно распределенной.

Поскольку зазор α мал по сравнению с другими линейными размерами, то электростатическую силу притяжения F_e можно рассматривать как сосредоточенную по отношению ко всему подвижному контакту, а значение этой силы определить выражением [1]:

$$F_e(\tau) = \frac{\epsilon_0 U_k^2 S_k \Pi^2(\tau)}{2[\alpha - y_c(\tau)]^2}, \quad (1)$$

где $\alpha - y_c(\tau)$ — зазор между контактами в момент τ , ϵ_0 — диэлектрическая постоянная для пустоты, S_k — площадь взаимодействия контактов. При этом недеформированный участок подвижного контакта можно считать точечным с массой M_c и поместить его в середине струны длиной $l - l_c$.

Принимая во внимание отмеченные особенности нашей задачи, запишем уравнение колебаний струны с учетом сопротивления среды, которое будем характеризовать коэффициентом R . Обозначив через $y(x, \tau)$ изгиб струны в момент τ , имеем

$$\frac{M}{l - l_c} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{R}{l - l_c} \frac{\partial y}{\partial \tau} = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(\tau) \delta\left(x - \frac{l - l_c}{2}\right), \quad (2)$$

где $y(x, \tau)$ удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям

$$y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial \tau}(x, 0) = 0, \quad y(0, \tau) = y(l - l_c, \tau) = 0, \quad (3)$$

а сосредоточенная сила $F(\tau)$ есть результат сложения $F_e(\tau)$ с силами инерции и сопротивления недеформируемого участка подвижного контакта:

$$F(\tau) = F_e(\tau) - M_c \frac{\partial^2 y_c}{\partial \tau^2} - \frac{\ell_c \cdot R}{\ell - \ell_c} \frac{\partial y_c}{\partial \tau}, \quad (4)$$

$$y_c(\tau) = y\left(\frac{\ell - \ell_c}{2}, \tau\right).$$

Для записи интенсивности "нагрузки" в правой части (2) мы использовали δ - функцию.

Приведем эквивалентную (2) - (3) формулировку задачи [2]. Требуется найти функцию $y(X, \tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{M}{\ell - \ell_c} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{R}{\ell - \ell_c} \frac{\partial y}{\partial \tau} = N \frac{\partial^2 y}{\partial X^2},$$

с начальными и граничными условиями (3) и условиями сопряжения в точке $X = \frac{\ell - \ell_c}{2}$

$$y\left(\frac{\ell - \ell_c}{2} + 0, \tau\right) = y\left(\frac{\ell - \ell_c}{2} - 0, \tau\right) = y_c(\tau),$$

$$N \left[\frac{\partial y}{\partial X} \left(\frac{\ell - \ell_c}{2} + 0, \tau \right) - \frac{\partial y}{\partial X} \left(\frac{\ell - \ell_c}{2} - 0, \tau \right) \right] + F(\tau) = 0.$$

Последнее равенство выражает динамическое равновесие недеформируемого участка подвижного контакта. С учетом симметрии $y(X, \tau)$ относительно $X = \frac{\ell - \ell_c}{2}$ оно принимает вид:

$$2N \frac{\partial y}{\partial X} \left(\frac{\ell - \ell_c}{2} - 0, \tau \right) = F(\tau). \quad (5)$$

Далее уравнения (2) - (5) целесообразно преобразовать, выполнив переход к безразмерным величинам x, t и y :

$$X = (\ell - \ell_c)x, \quad \tau = \bar{\tau}t = t \sqrt{\frac{N(\ell - \ell_c)}{M}}, \quad y = \alpha y. \quad (6)$$

При этом задача (2) - (3) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(t) \delta\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad (7)$$

$$y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0,$$

где

$$f(t) = \frac{\sigma \rho^2(t)}{[1 - u(t)]^2} - m \frac{\alpha^2 u}{\alpha t^2} - 2c\alpha \frac{\alpha u}{\alpha t},$$

$$u(t) = y\left(\frac{1}{2}, t\right), \quad \rho(t) = \rho(\bar{\tau}t).$$

Безразмерные параметры σ, m, c и α связаны с размерными параметрами по формулам:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0(\ell - \ell_c)u_k^2 s_k}{2\alpha^3 N}, \quad m = \frac{M_c}{M}, \quad c = \frac{\ell_c}{\ell - \ell_c}, \quad 2\alpha = R \sqrt{\frac{\ell - \ell_c}{MN}}. \quad (8)$$

Подставив (6) в (5), получим условие сопряжения в виде

$$2 \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - 0, t \right) = f(t). \quad (9)$$

2. Покажем, что задача (7) сводится к решению интегро-дифференциального уравнения относительно $u(t)$. При $m = c = 0$ это уравнение переходит в нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, а при $\alpha = 0$ - в обыкновенное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Воспользуемся выражением функции влияния G мгновенного сосредоточенного единичного импульса

$$G(x, \xi, t - \tau; \alpha) = 2e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin[(t-\tau)\sqrt{\pi^2 n^2 - \alpha^2}]}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \alpha^2}} \sin(\pi n x) \sin(\pi n \xi)$$

и преобразуем (7) к интегральному уравнению [2]. Поскольку интенсивность "нагрузки" имеет вид δ - функции, то

$$y(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^t \int_{\frac{1}{2}-\Delta}^{\frac{1}{2}+\Delta} G(x, \xi, t-\tau; \alpha) f(\tau) d\xi d\tau.$$

Выполнив предельный переход, после элементарных вычислений получим

$$y(x, t) = \int_0^t G_0(x, t-\tau; \alpha) f(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где

$$G_0(x, t-\tau; \alpha) = 2e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\sin[(t-\tau)\sqrt{\pi^2(2i-1)^2 - \alpha^2}]}{\sqrt{\pi^2(2i-1)^2 - \alpha^2}} \sin[\pi(2i-1)x].$$

Так как при $x = \frac{1}{2}$ $y = u(t)$, то из (10) следует уравнение для $u(t)$ вида:

$$u(t) = \int_0^t K(t-\tau; \alpha) \left\{ \frac{\sigma \rho^2(\tau)}{[1-u(\tau)]^2} - m \frac{d^2 u}{d\tau^2} - 2c\alpha \frac{du}{d\tau} \right\} d\tau, \quad (11)$$

$$u(0) = \frac{du}{d\tau}(0) = 0.$$

Здесь

$$K(t-\tau; \alpha) = G_0\left(\frac{1}{2}, t-\tau; \alpha\right) = 2e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin[(t-\tau)\sqrt{\pi^2(2i-1)^2 - \alpha^2}]}{\sqrt{\pi^2(2i-1)^2 - \alpha^2}}.$$

В частности, при $m = c = 0$ мы имеем для определения $u(t)$ интегральное уравнение Вольтерра

$$u(t) = \sigma \int_0^t K(t-\tau; \alpha) \frac{\rho^2(\tau) d\tau}{[1-u(\tau)]^2} \quad (12)$$

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$K(t-\tau; 0) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin[\pi(2i-1)(t-\tau)]}{\pi(2i-1)} \quad (13)$$

Ряд (13) представляет, как известно, кусочно-непрерывную функцию, которая определяется следующим образом:

$$K(x; 0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } 2n < x < 2n+1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } 2n+1 < x < 2n+2; \\ 0, & \text{если } x = n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Используя это обстоятельство, преобразуем правую часть (II) к виду:

$$\int_0^t K(t-\tau; 0) f(\tau) d\tau = \int_0^t K(x; 0) f(t-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t-n} f(\tau) d\tau, \quad t \geq n.$$

Нам осталось продифференцировать обе части равенства (II) по t , чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(x_n), \quad x_n = t-n, \quad f(x_n < 0) = 0, \quad (14)$$

$$u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0,$$

где

$$f(x_n) = \frac{\sigma \rho^2(x_n)}{[1-u(x_n)]^2} - m \frac{d^2 u}{dt^2}(x_n) - 2c\alpha \frac{du}{dt}(x_n).$$

(Сохранив последнее слагаемое, мы хотели лишь подчеркнуть, что при необходимости можно учесть сопротивление недеформируемой части подвижного контакта).

Например, при $0 \leq t \leq 1$ уравнение (14) имеет вид:

$$\mathcal{L}[u(t)] = m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2(1+c\alpha) \frac{du}{dt} - \frac{\sigma \rho^2(t)}{[1-u(t)]^2} = 0, \quad (15)$$

$$u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

Если существует решение $u(t) < 1$ уравнения (15), то значения $u(1)$ и $\frac{du}{dt}(1)$ берутся как начальные данные при решении (14) на интервале $1 \leq t \leq 2$. При этом (14) запишется следующим образом:

$$\mathcal{L}[u(t)] + 4 \frac{du}{dt}(t-1) = 0,$$

где $\frac{du}{dt}(t-1)$ — уже известная функция, и т.д. Поэтапно решение (I4) может быть построено на любом временном интервале, если при некотором $t=t_*$ $u(t)$ не станет равной 1. Легко видеть, что u , $\frac{du}{dt}$ и $\frac{d^2u}{dt^2}$ непрерывны, если $p(t)$ — непрерывная функция.

Уравнение (I4) обладает свойством, которое позволяет строить решение на интервале $n \leq t \leq n+1$, если известно его решение только на интервале $n-1 \leq t \leq n$, $n=1, 2, \dots$. Действительно, пусть $n \leq t \leq n+1$, так что

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(t-1) - \left[\frac{1}{2} f(t-1) - \sum_{i=2}^n (-1)^i f(t-i) \right].$$

Заменяя t на $s+1$, получим в квадратных скобках выражение (I4) при $t-1$:

$$\frac{1}{2} f(t-1) + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s f(t-1-s) = \frac{du}{dt}(t-1).$$

Таким образом, рекуррентное соотношение имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(t-1) - \frac{du}{dt}(t-1),$$

$$\text{или } \mathcal{L}[u(t)] + 4 \frac{du}{dt}(t-1) - \mathcal{L}[u(t-1)] = 0. \quad (\text{I7})$$

3. Присутствие запаздывающего аргумента в уравнении (I4) обусловлено тем, что колебания струны без сопротивления среды являются суперпозицией бегущей и отраженных волн [2]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (\text{I8})$$

с нулевыми начальными данными при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и граничными условиями вида

$$y(0, t) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}, t\right) = u(t),$$

причем

$$u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0, \quad u(t < 0) = \frac{du}{dt}(t < 0) = 0.$$

Очевидно, сформулированная задача о распространении граничного режима, подчиненная условиям (9), эквивалентна (I0) при $\alpha = 0$.

Воспользуемся методом суперпозиции бегущей и отраженных волн. Решение (I8) с указанными начальными и граничными условиями можно представить в виде:

$$y(x, t) = u\left(t+x-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-x-\frac{1}{2}\right) + u\left(t+x-\frac{3}{2}\right) - u\left(t-x-\frac{3}{2}\right) + \\ + u\left(t+x-\frac{5}{2}\right) - u\left(t-x-\frac{5}{2}\right) + \dots,$$

где слагаемые с отрицательным аргументом равны нулю. Отсюда для $n \leq t \leq n+1$ имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{du}{dt}(t), \quad n=0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{du}{dt}(t-i) + \frac{du}{dt}(t-i-1) \right] + \frac{du}{dt}(t-n), \quad n > 0.$$

Приравняв выражение $\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, t\right)$ к $\frac{1}{2} f(t)$ для каждого n , $n=0, 1, 2, \dots$, получим после простых преобразований уравнение (I4).

Пусть сосредоточенная "сила" $f(t)$ из (7) приложена в точке $x=x_0$, $0 < x_0 < 1$. Из решения задачи о распространении граничного режима для левой части струны ($0 \leq x \leq x_0$), левый конец которой закреплен, а правый движется по закону $u(t)$,

$$y(x, t) = \begin{cases} u(t+x-x_0), & 0 \leq t \leq x_0, \\ u(t+x-x_0) - u(t-x-x_0), & x_0 \leq t \leq 2x_0, \\ \dots \end{cases}$$

и из решения соответствующей задачи для правой части струны ($0 \leq \xi = 1-x \leq \xi_0 = 1-x_0$)

$$y(x, t) = \begin{cases} u(t-\xi), & 0 \leq t \leq \xi_0, \\ u(t-\xi) - u(t+\xi-2\xi_0), & \xi_0 \leq t \leq 2\xi_0, \\ \dots \end{cases}$$

следует, что для $2nx_0 \leq t \leq 2(n+1)x_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} = \frac{du}{dt}(t), \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} = -\frac{du}{dt}(t), \quad n=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} = \frac{du}{dt}(t) + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{du}{dt}(t-2ix_0), \quad n>0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} = -\frac{du}{dt} - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{du}{dt}(t-2i+2ix_0), \quad n>0.$$

При этом условие сопряжения

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0=0} + p(t) = 0. \quad (19)$$

определяет $u(t)$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть в точках $x=x_i$ ($x_i=ih$, $i=0, 1, \dots, N$, $x_0=0$, $x_N=1$) приложены сосредоточенные "силы" f_i ($f_0=f_N=0$). Обозначим через $u_i(t)$ значение $y(x_i, t)$ ($u_0=u_N=0$, $u_i(0)=\frac{du_i}{dt}(0)=0$). Запишем решение задачи о распространении граничного режима для отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, считая $u_{i-1}(t)$, $u_i(t)$ и $u_{i+1}(t)$ заданными. Используя условие сопряжения типа (19) при $x=x_i$, получим

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} f_i(t), \quad 0 \leq t \leq h; \quad (20)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} f_i(t) + \sum_{s=1}^n \left[\frac{du_{i-1}}{dt}(x_{2s-1}) + \frac{du_{i+1}}{dt}(x_{2s+1}) - 2 \frac{du_i}{dt}(x_{2s}) \right],$$

$$n>0, \quad x_n = t - nh \geq 0.$$

В случае, когда f_i зависит от u_i и её производных, (20) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$, решение которой строится аналогично (14). В принципе система (20) может описывать приближенное решение задачи о движении струны, в которой распределенная нагрузка (включая сюда и сопротивление среды) заменена системой сосредоточенных сил.

4. Остановимся подробнее на предельном случае уравнения (14) $m=0$ ($\alpha=0$). При этом начальное условие $\frac{du}{dt}(0)=0$ может

оказаться невыполненным, когда $p(0) \neq 0$. Мы встречаемся здесь с типичной ситуацией, возникающей при нерегулярной зависимости решения от параметра m , $m \rightarrow 0$. Далее нас будет интересовать поведение $u(t)$, если

$$p(t) = p(\bar{t}t) = 1 - e^{-kt}, \quad k = \lambda \bar{t}. \quad (21)$$

На этом примере мы покажем, что сведение проблемы к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения позволяет довольно просто выявить все основные особенности поведения решения в зависимости от параметров $\bar{t}$ и k численным способом.

Имеем из (14):

$$0 \leq t \leq 1, \quad u = u_0(t), \quad \frac{du_0}{dt} = \frac{\sigma p^2(t)}{2[1-u_0(t)]^2}, \quad u_0(0) = 0;$$

$$1 \leq t \leq 2, \quad u = u_1(t), \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{\sigma p^2(t)}{2[1-u_1(t)]^2} - \frac{\sigma p^2(t-1)}{[1-u_0(t-1)]^2}, \quad (22)$$

$$u_1(1) = u_0(1);$$

$$2 \leq t \leq 3, \quad u = u_2(t), \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{\sigma p^2(t)}{2[1-u_2(t)]^2} - \frac{\sigma p^2(t-1)}{[1-u_1(t-1)]^2} + \frac{\sigma p^2(t-2)}{[1-u_0(t-2)]^2},$$

$$u_2(2) = u_1(2),$$

и т.д. Используя рекуррентное соотношение (17), представим (22) следующим образом

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\sigma p^2(t)}{2[1-u_i(t)]^2} - q_i(t-1), \quad u_i(t) = u_{i-1}(t), \quad i=1, 2, \dots, \quad (23)$$

где

$$q_i(t-1) = \frac{du_{i-1}}{dt}(t-1) + \frac{\sigma p^2(t-1)}{2[1-u_{i-1}(t-1)]^2}.$$

При $0 \leq t \leq 1$ $u(t)$ выражается в конечном виде

$$u = u_0(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2} \sigma \int_0^t p^2(\tau) d\tau},$$

или с учетом (21)

$$u_0(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2} \sigma \left[t - \frac{2}{k} (1 - e^{-kt}) + \frac{1}{2k} (1 - e^{-2kt}) \right]}. \quad (24)$$

Поскольку $u=1$ при $t=t_*$, то из (24) следует уравнение

$$\eta(\theta) = \frac{4k}{3\sigma} = \theta - 3 + 4e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{-\theta}, \quad \theta = 2kt_*, \quad (25)$$

связывающее заданные σ и k с неизвестным t_* . В силу того, что t_* должно быть не более единицы, (25) имеет смысл, если $\eta(\theta) \leq \eta(2k)$. График $\eta(\theta)$ приведен на рис. 2. Заметим, что при $0 < t \leq 1$ влияние граничных условий $y(0,t) = y(1,t) = 0$ не успевает сказаться на значении $y(\frac{1}{2}, t) = u(t)$, и, таким образом, закон движения середины струны, выражающийся через $u(t)$, будет таким же, как и в случае бесконечно длинной струны.

Нелинейное уравнение (23) интегрировалось на ЭВМ методом Рунге-Кутты с погрешностью на одном шаге порядка h^3 , где h — величина шага. Из-за специфики данной задачи, приводящей к уравнению с запаздывающим аргументом, при построении алгоритма решения (23) использовалась одна из формул Рунге-Кутты с системой чисел: $\tau=2, \alpha_1=\beta_{11}=1, \gamma_1=\gamma_2=\frac{1}{2}, \ell=3$ [3]. Отметим, что для достижения заданной точности вычислений с меньшим числом шагов можно было бы применить любую другую систему чисел с $\tau > 2$, но это привело бы к существенному усложнению алгоритма.

На рис. 3 приведены графики $u(t)$ при различных $\sigma, k=10$. В зависимости от величины σ выделяются два типа решений (23): если $\sigma > \bar{\sigma} = 0.51001$, то $u(t)$ достигает значения 1, причем t_* возрастает с уменьшением σ ; если $\sigma < \bar{\sigma}$, то $u(t)$ описывает колебательный процесс, при котором для всех $t > 0$ $u(t) < 1$. Напомним, что t_* и $\bar{\sigma}$ связаны с τ_* и $\bar{u}_k$ по формулам

$$t_* = \tau_* \sqrt{\frac{N}{M(\ell - \ell_0)}}, \quad \bar{\sigma} = \bar{u}_k^2 \frac{\varepsilon_0(\ell - \ell_0) s_k}{2 \alpha^3 N}.$$

Вычисления при других значениях k дают качественно такую же картину: для каждого $k > 0$ существует $\bar{\sigma}$, разделяющее решения (23) на два указанных типа. Зависимости t_* от σ ($\sigma > \bar{\sigma}$) при

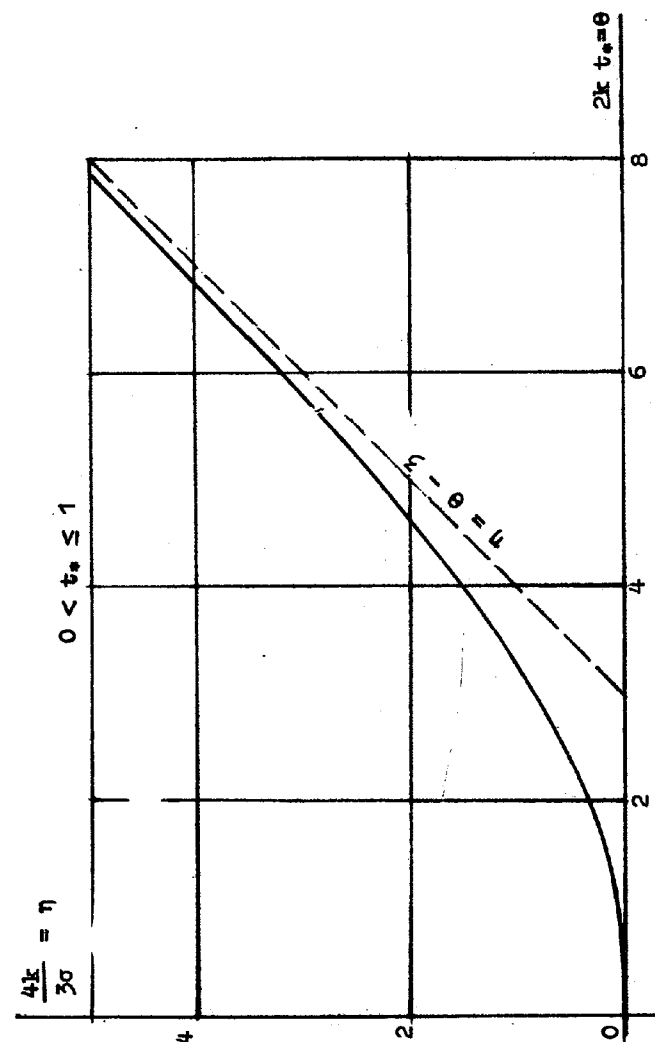


Рис. 2.

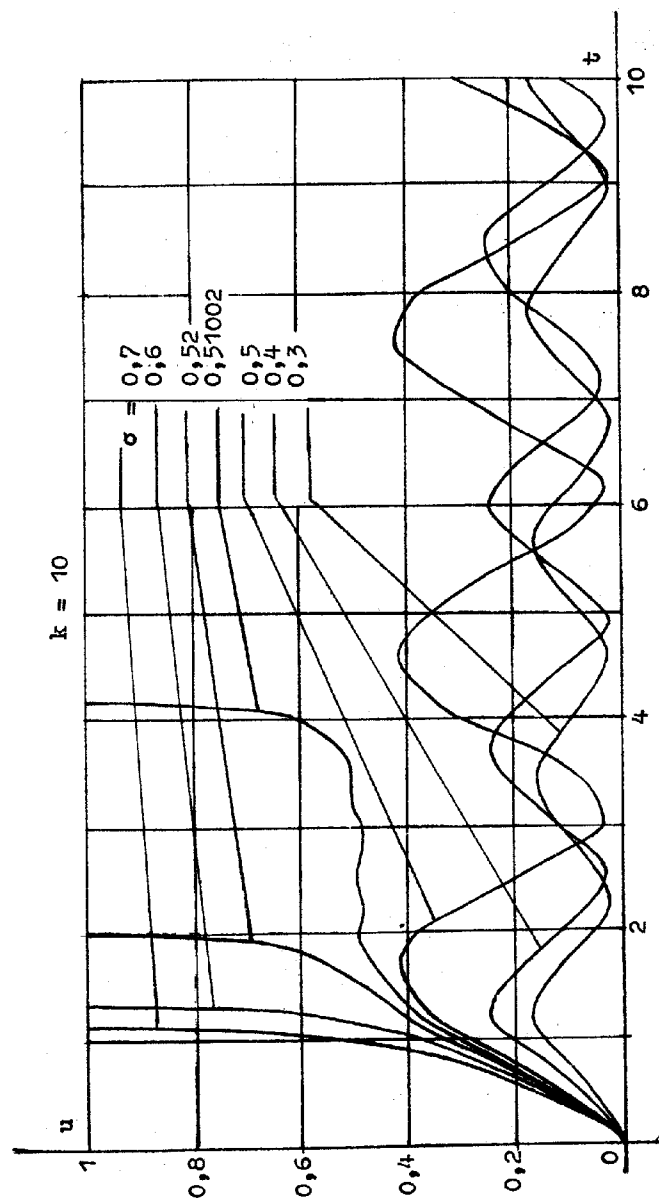


Рис. 3.

различных k приведены на рис. 4. Рис. 5 содержит пример зависимости t_* от k , $\bar{\sigma} = 0.6$.

Результаты вычислений $\bar{\sigma}$ допускают простую физическую интерпретацию. Пусть k мало, так что $\rho(t)$ — медленно меняющаяся во времени функция. В этом случае инерционными силами можно пренебречь и рассматривать $u(t)$ как параметр, характеризующий последовательность квазистатических положений равновесия струны при $t \rightarrow \infty$. В пределе статическое равновесие струны определяется из решения краевой задачи:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\bar{\sigma}}{(1-u)^2} \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$4u_{cr} = \frac{\bar{\sigma}}{(1-u_{cr})^2}, \quad u_{cr} = u\left(\frac{1}{2}\right). \quad (26)$$

Нетрудно показать, что (26) определяет два значения u_{cr} , если $\bar{\sigma} < \frac{16}{27}$ (физический смысл каждого обсуждался в [1]). При $\bar{\sigma} > \frac{16}{27}$ решения (26) не существует. Поскольку мы пренебрегли силами инерции, то $\frac{16}{27}$ служит верхней оценкой для $\bar{\sigma}$.

Пусть $k = \infty$, $\rho(t) = 1$. Очевидно, рассматривая те $\bar{\sigma}$, при которых $u(t)$ монотонно стремится к 1, мы оценим сверху влияние сил инерции, если всю массу струны сосредоточим в середине. При этом закон движения середины струны удовлетворяет уравнению

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} + \frac{4N}{l-l_c} y_c = \frac{\varepsilon_0 u_k^2 S_k}{2[\alpha - y_c(t)]^2}, \quad y_c(0) = \frac{dy_c}{dt}(0) = 0. \quad (27)$$

В переменных (6) уравнение (27) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 4u = \frac{\bar{\sigma}}{(1-u)^2}, \quad u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0. \quad (28)$$

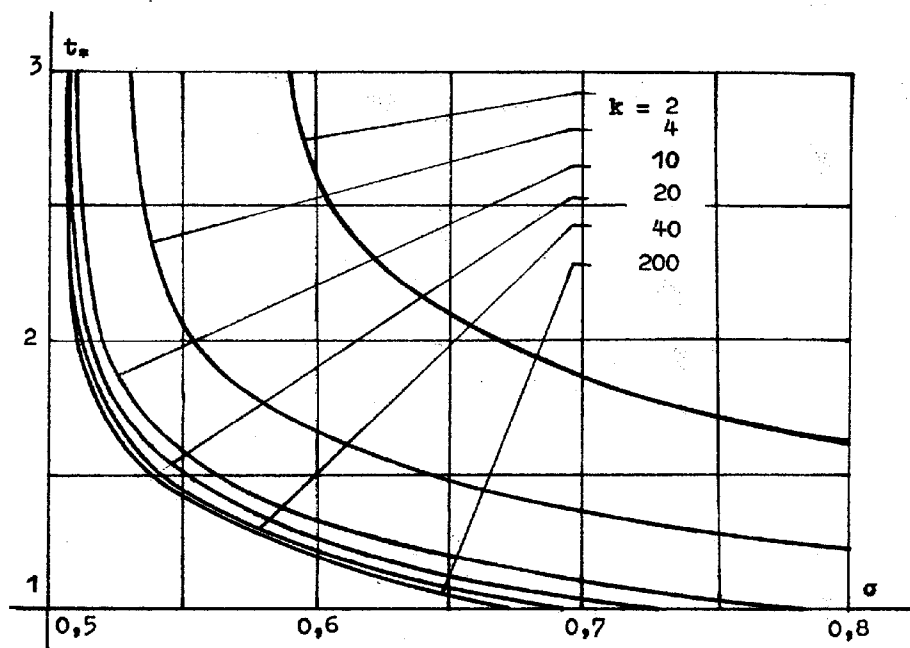


Рис. 4.

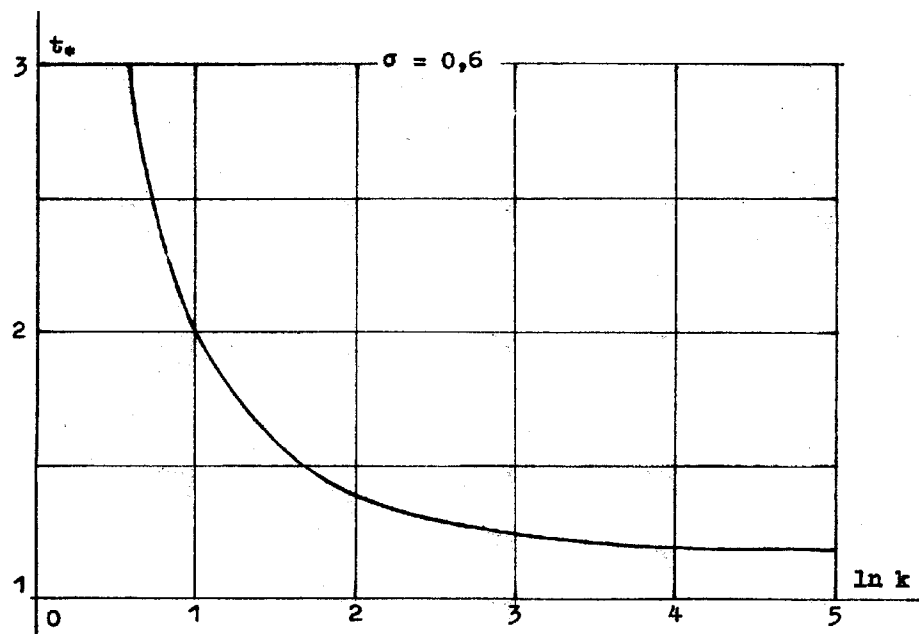


Рис. 5.

Не занимаясь конкретным решением (28), которое может быть выражено через эллиптические функции, обратим внимание на качественную зависимость $u(t)$ от σ . Из выражения первого интеграла (28)

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{4u[\sigma - 2u(1-u)]}{1-u},$$

удовлетворяющего начальным условиям, следует, что $u(t)$ — периодическая функция с периодом t_0 ,

$$t_0 = \int_0^{u_1} \sqrt{\frac{1-u}{u(u_1-u)(u_2-u)}} du, \quad u_1 = \frac{1+\sqrt{1-2\sigma}}{2}, \quad u_2 = \frac{1-\sqrt{1-2\sigma}}{2},$$

если $\sigma < \frac{1}{2}$, и $u(t)$ — монотонно возрастающая функция, если $\sigma > \frac{1}{2}$. С физической точки зрения существование двух типов решений обусловлено тем, что (28) описывает поведение нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы [4]. При $\sigma = \frac{1}{2}$ решение (28) имеет вид:

$$t(u) = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{1-u}{u}} + \ln \frac{\sqrt{1-u} - \sqrt{u}}{\sqrt{1-2u}},$$

т.е. u монотонно стремится к $\frac{1}{2}$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, можно утверждать, что для всех $k > 0$ значение $\bar{\sigma}$ заключено в пределах $\frac{1}{2} < \bar{\sigma} < \frac{16}{27}$.

5. Изучение явления при размыкании контактов связано с решением задачи (7), в которой задано начальное отклонение для $y(x, t)$:

$$y(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0; \quad \phi\left(\frac{1}{2}\right) = u(0), \quad 0 \leq u(0) < 1.$$

При этом уравнение (10) запишется следующим образом:

$$y(x, t) = \int_0^t G_0(x, t-\tau; \alpha) f(\tau) d\tau + \bar{y}(x, t), \quad (29)$$

где $\bar{y}(x, t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$\bar{y}(0, t) = \bar{y}(1, t) = 0, \quad \bar{y}(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Полагая в (29) $x = \frac{1}{2}$, мы получим искомое уравнение относительно $u(t)$.

Пусть $\phi(x)$ задано в виде:

$$\phi(x) = \begin{cases} 2u(0)x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2u(0)(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. Так как при $\alpha = 0$

$$\bar{y}(x, t) = \frac{8u(0)}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} \cos[\pi(2i-1)t] \sin[\pi(2i-1)x],$$

то уравнение для $u(t)$ имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(t-n) + \frac{8u(0)}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos[\pi(2i-1)t]}{(2i-1)^2}. \quad (31)$$

Дифференцированием по t (31) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом. С учетом выражения $f(t)$ из (7) получим:

$$0 \leq t \leq 1, \quad \mathcal{L}[u(t)] = m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} - \frac{6\rho^2(t)}{[1-u(t)]^2} + 4u(0) = 0, \quad (32)$$

$$t=0, \quad u = u(0), \quad \frac{du}{dt} = 0;$$

$$1 \leq t \leq 2, \quad \mathcal{L}[u(t)] + 4 \frac{du}{dt}(t-1) = 0,$$

причем начальные значения $u(1)$ и $\frac{du}{dt}(1)$ известны из решения (32), поскольку $u(t)$ и $\frac{du}{dt}$ непрерывны при $t=1$ и т.д. Как и

в случае нулевых начальных условий имеет место рекуррентное соотношение (17), в котором теперь $\mathcal{L}[u(t)]$ определено равенством (32).

Начальное отклонение может значительно влиять на закон движения середины струны. Пусть, например, $\rho(t)$ определено формулой (21). Тогда справедливо следующее утверждение, физический смысл которого очевиден: для сколь угодно малого ϵ можно указать $u(0)$ и k такие, что существует конечное значение t_* .

В заключение авторы с благодарностью отмечают участие в работе Потапова Б.С., беседы с которым существенно помогли при физической постановке рассмотренных задач.

Л и т е р а т у р а

1. ДИТЛОВ В.Л., СОЛДАТЕНКОВ Н.С. Некоторые результаты исследований пленочных электростатических реле. - "Вычислительные системы". Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Выпуск 5. Физико-технологические исследования, Новосибирск, "Наука", Сиб.отд., 1968, с. 159-176.
2. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики, М., "Наука", 1966.
3. МИХЛИН С.Г., СМОЛИЦКИЙ Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., "Наука", 1965.
4. БАБАКОВ И.М. Теория колебаний. М., ГИТТЛ, 1968.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 апреля 1973 г.