1974 год ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 58

УДК 518.12:621.01:681.14

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ю.С.Завьялов

1. Перед современным машиностроением остро стоит задача сокращения сроков проектирования и запуска изделий в серийное производство. Достаточно сказать, что в ряде отраслей эти сроки составляют пять-семь, а то и десять лет, и новая машина начинает жизнь уже, по существу, морально устаревшей.

Эта сложная проблема решается ныне путем создания автоматизированных систем проектирования, технологической подготовки производства и управления технологическими процессами на базе вычислительной техники. Совершенствование методов математического моделирования и методов вычислений дало возможность инженерам-конструкторам решать на машинах такие задачи, которые еще недавно исследовались экспериментально. Появление периферийных устройств ввода-вывода графической информации (кодировщики, графопостроители, дисплеи и т.д.) и развитие операционных систем позволили делать это удобными способами. Применение автоматизированных систем позволяет в два-три раза сократить сроки проектирования и подготовки производства, снизить стоимость проектов при резком улучшении качества всех работ.

В Институте математики СО АН СССР исследования по автоматизации проектирования и технологической подготовки производства были начаты в 1963 году, когда само понятие автоматизации проектирования только формировалось.

В первые годы изучались не только математические, но и технические проблемы. Анализ конкретных сложных задач показал, что для их решения наиболее целесообразными являются системы проектирования, организованные по принципу "человек - машина с обратной связью". В такой системе человек выполняет творческую часть работы, которая состоит, прежде всего, в создании принципиальной схемы объекта и, что особо подчеркиваем, его математической модели с учетом функционирования. На втором этапе по результатам обработки информации на ЭВМ в физическую схему и математическую модель вносятся дополнения, исправления и т.д. При работе в таком режиме ЭВМ производит расчеты, анализирует результаты, выдает справки и изготовляет техническую документацию, выступая в роли рабочей группы конструктора.

Для определенного круга конкретных задач были изучены требования к средствам вычислительной техники по быстродействию, объемам оперативной и долговременной памяти. В частности, рассматривался вопрос о применении однородных вычислительных систем для целей проектирования, в том числе как систем коллективного пользования. Результаты нашли отражение в статьях [II, 23] и в докладах на Всесоюзных научных конференциях [8,22].

2. Однако совершенно естественно, что главными для Института были работы по математическому обеспечению, среди которых основное место заняли методы обработки геометрической информации. Выбор этого направления не был случайным. Разработка геометрии объекта является необходимым элементом проектирования. Геометрические формы органически связаны с требованиями, обычно противоречивыми, которым должен удовлетворять объект, и их окончательный вид есть результат компромиссного решения, найденного в процессе проектирования. Эта задача особенно сложна при создании таких агрегатов, как обтекаемые поверхности летательных аппаратов, корпуса судов, кузова легковых автомобилей и т.п., когда конструкции должны отвечать и требованиям размещения оборудования и экипажа, и требованиям прочности, а наружные поверхности еще и определенным условиям гладкости, отражающим требования гидроаэродинамики и эстетические взгляды конструктора.

Какими бы путями ни решалась задача формообразования, при машинной обработке информации всегда возникают такие проблемы, как а) математическое описание сложных контуров и целых поверхностей с теми или иными условиями гладкости, например, для гребных винтов и крыльев самолетов требуется непрерывность кривизн (вторых производных по всем переменным); б) компоновка деталей в агрегаты, состоящая в умении находить пересечения поверхностей, строить эквидистантные поверхности и т.п.; в) определение дифференциальных характеристик поверхности (нормали, кривизны) и интегральных характеристик (длины линий, площади, объемы).

При всем том математические методы должны быть достаточно универсальными, чтобы на их основе можно было создавать эффективные системы стандартных программ.

Исследования по описанию контуров были начаты с построения математических моделей ручного труда проектировщиков, при котором контуры строятся в виде линий равновесия упругих реек (splines), проходящих через заданные точки-узлы. Это привело к появлению в 1964 г. (независимо от американских ученых) понятий нелинейных и линейных кубических сплайнов, названных нами [I2] первоначально многозвенными функциями. Развитие методов сплайн-функций позволило создать эффективный математический аппарат представления плоских контуров и трехмерных поверхностей, *обладающий*, по сравнению с другими методами, целым рядом преимуществ, как-то: универсальностью, однородностью, алгоритмичностью.

На базе этого аппарата были решены основные конструкторские задачи, возникающие при плазово-шаблонном методе подготовки производства, и впервые в СССР разработаны методы подготовки геометрической информации для многокоординатных станков с числовым программным управлением. Они были внедрены в промышленность, в частности на Новосибирском заводе им.Чкалова и ряде других предприятий.

Ниже дается обзор результатов по отдельным вопросам проблемы.

3. Нелинейная схема сплайновой интерполяции была изучена В.А.Леусом в I964-65 гг. [24]. В этой схеме звено кривой между двумя узлами приближается следующим образом. За касательные в левом и правом узлах принимаются касательные к окружностям, проходящим через них,и еще один узел слева или справа соответственно.Уравнение звена кривой строится в местной системе координат с осью абсцисс,проходящей через его концы,как сумма указанных окружностей с линейными весами.Последние подбираются из условий прохождения кривой через узлы с заданными касательными в них. Если вместо линейных весов взять квадратичные, то можно

добиться непрерывности кривизны кривой. Впоследствии выяснилось, что американские ученые применили эту же схему, но только вместо окружностей они брали дуги парабол. Предложенная схема позволяет точно описывать часто употребляемые в инженерных кривых прямолинейные отрезки и дуги окружностей и приближенно другие контуры. Сделана оценка погрешности приближения, и доказана сходимость интерполяционного процесса для кривых с непрерывной касательной и кусочно-непрерывной кривизной.

Метод нелинейных сплайнов оказался удобен для автоматизации конструкторских работ при плазово-шаблоном способе технологической подготовки производства, применяемом в авиа- и судостроении. По этому способу поверхности деталей описываются двумя семействами плоских сечений (каркасом), которые при достаточно малом диаметре ячеек хорошо аппроксимируют поверхность. Были разработаны алгоритмы решения перечисленных выше геометрических задач, что позволило описывать агрегаты изделий, их компоновку и конструктивные элементы. Благодаря экономичности метода вычислений и малому объему хранимой информации (запоминаются только координаты узловых точек поверхности), метод реализован на сравнительно маломощных ЭВМ "Минск".

4. Вторым направлением исследований в области сплайн-функций стали линейные кубические сплайны и их обобщения на случай двух и n переменных – бикубические и мультикубические сплайны.

Кубические сплайны $S(x)$ рассматриваются на отрезке $[a,b]$ вещественной оси, разделенной точками Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$. Каждое звено является кубическим полиномом, и $S(x) \in C^2[a,b]$ (третьи производные $D^3S(x)$ разрывны в узлах – это сплайн дефекта I) или $S(x) \in C^1[a,b]$ (сплайн дефекта 2).

В задаче интерполирования сплайнами дефекта 2 в узлах задаются значения функции и ее первых производных. Это задача эрмитовой интерполяции. Она подобна задаче для нелинейных сплайнов и решается локально на каждом интервале. Для сплайнов дефекта I задаются значения функции в узлах и, кроме того, граничные условия или условия периодичности сплайна (лагранжева интерполяция). В качестве граничных условий чаще всего берутся значения первых производных на концах отрезка (тип I) или вторых производных (тип П). Сплайн с нулевыми вторыми производными называется естественным. Задача сводится к линейной системе с положительно определенной трехдиагональной матрицей, решение которой в общем случае находится методами прогонки.

В случае равноотстоящих узлов это решение может быть выписано в явном виде. Автором [I2,I8] в 1966 г. было предложено использовать для этой цели метод полиномиальных производящих функций, которым можно находить решения и для сплайнов высших степеней. Этот прием оказался более удобным, чем другие. В работе [I8] получены явные выражения для так называемых фундаментальных кубических сплайнов $u^i(x)$, у которых только один определяющий параметр равен единице, например $u^i(x_i) = 1$, а остальные нули. Дан исчерпывающий анализ свойств таких сплайнов, представляющих собой осциллирующие по интервалам функции (на (x_{i-1}, x_{i+1}) $u^i(x) > 0$), затухающие к концам отрезков в непериодических случаях и в некоторой точке внутри отрезка – в периодическом. С помощью фундаментальных сплайнов строится интерполяция по схеме Ньютона.

Бикубический сплайн $S(x^1, x^2)$ – это функция, определяемая в плоской прямоугольной области R^2, разделенной сеткой прямых линий на прямоугольные ячейки. В каждой ячейке она является бикубическим полиномом и принадлежит классу $C^{22}[R^2]$, т.е. непрерывны производные до порядка $D^{(2,2)}S(x^1,x^2)$ (сплайн дефекта I), или $S(x^1,x^2) \in C^{(11)}(R^2)$ (сплайн дефекта 2).

Задача интерполирования для сплайнов дефекта 2 по-прежнему решается локально в каждой ячейке, а для сплайнов дефекта I сводится к большому числу одномерных задач на линиях сетки. В 1965-1966 гг. автором [I0,I3] были рассмотрены разнообразные задачи такого рода, в том числе в областях в виде объединения прямоугольников. Построены вычислительные алгоритмы, допускающие простую реализацию на однородных вычислительных системах.

Большое место в исследованиях заняли вопросы оценок остаточных членов и сходимости интерполяционных процессов. Известно, что для функций $f(x) \in C^\sigma[a,b]$ $(\sigma = 0,1,2,3)$ и их производных $D^q f(x)$ $(q \le \sigma)$ интерполяционный процесс равномерно сходится с порядком $o(H_k^{\sigma-q})$, где $H_k = \max_i (x_{k,i+1} - x_{k,i})$, на последовательности Δ_k. Максимальный порядок сходимости H_k^{4-q} достигается, в частности, для функций $f(x) \in C^4[a,b]$. Кроме того, в этом случае для периодических сплайнов дефекта I при асимптотически равномерном размещении узлов разрывы третьих производных в точках x_i, отнесенные к шагу H_k, сходятся к $D^4 f(x)$.

В [I2] для сплайнов дефекта I для тех же порядков относительно H_k были получены значительно меньшие (в некоторых случаях в несколько раз) значения множителей при степенях H_k, а также ослаблены ограничения на размещения узлов, налагаемые при $\sigma = 0;\ 3$. Это весьма существенно с вычислительной точки зрения и, в частности, позволяет уменьшить число узлов при заданной точности приближения.

Вопросы сходимости для бикубических сплайнов сводятся к аналогичным вопросам для одномерных сплайнов. Если $f(x^1, x^2) \in C^{(\sigma_1 \sigma_2)}[R^2]$ $(\sigma_j = 0, I, 2, 3)$, то легко устанавливается порядок сходимости для функций $D^{(q_1 q_2)} f(x^1, x^2) (q_j < \sigma_j)$. В работе [I3] впервые были получены непосредственно оценки остаточных членов вплоть до высших производных $(q_j = \sigma_j)$ и доказана равномерная сходимость с порядком $o\left[(H_k^1)^{\sigma_1 - q_1}\right] + o\left[(H_k^2)^{\sigma_2 - q_2}\right] + o\left[(H_k^1)^{\sigma_1 - q_1} (H_k^2)^{\sigma_2 - q_2}\right]$. Было получено также обобщение теоремы о разрывах высших производных сплайна, причем она оказалась справедливой не только в периодическом случае, но и для сплайнов типа I.

Все результаты по бикубическим сплайнам (существование и единственность интерполяции, алгоритмы, сходимость) в 1972 г. были распространены автором на случай n переменных.

В.А.Скороспеловым разработаны программы интерполирования кубическими и бикубическими сплайнами дефекта 2 для ЭВМ "Минск-22"; Г.Н.Кулишом такие программы созданы для сплайнов дефекта I. И те и другие используются для аналитического представления машиностроительных деталей сложной формы: первые, когда достаточно непрерывности касательной плоскости, а вторые, когда, кроме того, требуется непрерывность кривизн. Так как в общем случае контуры не могут быть представлены как однозначные функции декартовых координат, то вводится параметризация и уравнения контура задаются в виде: $x^j = S^j(u)$ $(j=1,2)$, аналогично уравнения поверхности представляются тремя соотношениями $x^j = S^j(u;v)$ $(j = 1,2,3)$. Эта методика разработана В.А.Скороспеловым и применяется для описания сложных деталей, например лопаток рабочих колес гидротурбин. Такое представление во многих случаях удобнее каркасного метода, но по сравнению с последним связано с увеличением в несколько раз запоминаемой информации.

Сплайн-интерполяция по сравнению с другими методами обладает несомненными преимуществами. Во-первых, она универсальна, то есть ею можно описать любую поверхность с заданной точностью приближения. Во-вторых, она однородна для всей поверхности как по исходной информации, так и по запоминаемой информации о результатах аппроксимации. В-третьих, она алгоритмична в том смысле, что задача сводится к решению систем с простыми матрицами. Решение геометрических задач проектирования тоже проводится просто. Исключение составляют задачи пересечения кривых и поверхностей, которые состоят в решении систем нелинейных уравнений. Последние допускают реализацию методом Ньютона, особенно если использовать при этом графические устройства для получения начального приближения. Наконец, сплайн-интерполяция дефекта I локальна, т.е. позволяет заменять отдельные части поверхности без изменения остальных.

5. Проблема описания поверхностей деталей с одновременным сглаживанием исходной информации о координатах задаваемых точек, привела к изучению экстремальных свойств сплайн-функций дефекта I. Исходным явился принцип минимума потенциальной энергии упругой рейки в линейном приближении, согласно которому естественный кубический сплайн, и только он, минимизирует функционал

$$J[f] = \int_a^b [D^2 f(x)]^2 dx$$

на множестве функций $\mathcal{W}^2(a,b)$ с абсолютно непрерывной первой и суммируемой с квадратом второй производными при условиях $f(x_i) = y_i$ – заданы $(i = 0, \ldots, N)$. Это свойство имеет место также для множеств функций периодических на $[a,b]$ или с фиксированными граничными условиями типа I.

Если не требовать выполнения условий $f(x_i) = y_i$ $(i=0,\ldots,N)$, то на тех же множествах функций естественный кубический сплайн дает минимум функционалу

$$J_1[f] = J[f] + \sum_{i=0}^{N} P_i [f(x_i) - y_i]^2 \qquad (P_i > 0).$$

Это задача сглаживания Шенберга. Она приводит к системе с положительно-определенной пятидиагональной матрицей. В [14] автором для ее решения предложен вариант метода прогонки, который корректен при больших P_i (слабое сглаживание). Для общего случая показана применимость одного варианта метода последовательных приближений – попеременно-треугольного алгоритма А.А.Самарского.

В [15] доказано, что бикубический сплайн в области R^2 обладает такими же свойствами по отношению к функционалам

$$J[f] = \iint_{R^2}\{[D^{(20)} f(x^1, x^2)]^2+[D^{(02)} f(x^1, x^2)]^2\} dR^2$$

и

$$J_1[f]=J[f] + \sum_{i_1=0}^{N^1} \sum_{i_2=0}^{N^2} P_{i_1 i_2}[f(x^1_{i_1}, x^2_{i_2})-y_{i_1 i_2}]^2 \quad (P_{i_1 i_2} > 0)$$

соответственно на множестве функций $\mathcal{W}^{(22)}(R^2)$, являющихся кубическими сплайнами на линиях сетки области R^2. Для задачи сглаживания выведена система уравнений с клеточной матрицей. При достаточно больших $P_{i_1 i_2}$ доказано, что матрица положительно-определенная и для нее снова оказывается применимым алгоритм А.А.Самарского.

В последние годы эта теория обобщена автором [19-21] на L-сплайн-функции многих переменных. Если L_j – линейный дифференциальный оператор порядка m_j по переменной x^j и L_j^* – ему формально сопряженный оператор, то L-сплайн-функция дефекта $\mu=\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$ в каждой открытой ячейке R^n_i, $i_j=\{i_1,\ldots,i_n\}$, n-мерного параллелепипеда удовлетворяет системе уравнений $L_j^* L_j S(x) = 0$ $(j = 1,\ldots,n)$ и $S(x)\in C^{(P)}[R^n]$ $(P_j=2m_j-\mu_j-1)$. Мультикубические сплайны возникают при $L_j = D^{2_j}$.

Показано, что L-сплайн-функция есть единственное решение задачи минимизации функционала

$$J[f] =\int_{R^n}\sum_{j=1}^{n}[L_j f(x)]^2 dR^2$$

на множествах функций $\mathcal{W}^{(m)}(R^n)$, являющихся L-сплайнами n - 1 переменных в гиперплоскостях раздела области R^n, при условиях $D^{(P)} f(x_i) = y_i^{(P)}$ $(P_j= 0,\ldots,\mu_j-1)$ для всех узлов сетки x_i и фиксированных граничных условиях или условиях периодичности. Этот подход является, по-видимому, наиболее естественным обобщением теории L-сплайнов одной переменной. При других способах либо не обеспечивалась единственность решения вариационной задачи, либо терялись клеточные свойства сплайнов. Доказано существование и единственность решения интерполяционной задачи, если существуют и единственны решения одномерных задач по переменным области. Доказано, что интерполяционный сплайн S_f типа I дает минимум $J[f - S]$ среди всех L-сплайнов в заданной области R^4. Изучена обобщенная задача сглаживания заданных значений $y_i^{(P)}$, доказано существование и единственность решения, выведены уравнения.

Для сглаживания кривых кубическими сплайнами были рассмотрены и другие способы. Так, М.М.Григоренко и В.А.Скороспелов [2, 3] в 1968 г. решили задачу о минимизации суммы модулей уклонений с весами $\sum_{i=0}^{N} P_i|f(x_i)- S(x_i)|$ при условиях ограниченности по модулю разрывов третьих производных сплайна в узлах. Решение задачи существует и единственно. Она сводится к задаче линейного программирования с двухсторонними ограничениями на переменные, для которой создана программа на ЭВМ "Минск-22".

Вторая задача – задача чебышевского приближения на конечном множестве точек большем, чем число узлов сплайна, была рассмотрена В.В.Филатовым [26]. Она имеет неединственное решение, так как система фундаментальных сплайнов, через которую выражается произвольный сплайн, не есть система Чебышева. С вычислительной точки зрения снова приходим к задаче линейного программирования, для которой в [26] указан алгоритм решения.

Применение различных приемов выявило особенности процессов сглаживания кубическими сплайнами. Они достаточно хорошо, с инженерной точки зрения, работают при относительно слабом сглаживании, т.е. при малых уклонениях результирующих значений от исходных, и хуже с их увеличением. Это связано с тем, что ни один из способов не охватывает всей совокупности факторов (например, знак кривизны кривой в узле), учитываемых инженером. Поэтому в [13] предложен процесс последовательного анализа кривой и многошагового сглаживания, позволяющий добиться лучших ре-

6. Начиная с 1966 г., велись работы по математическому обеспечению устройств машинной графики. Под руководством В.А.Львова были сконструированы лабораторные образцы аппаратуры, на которых проверялись принципы математического обеспечения. В дальнейшем эти работы были продолжены в направлении машинного моделирования трехмерных объектов с плоскими гранями. В работе В.М.Грина и В.А.Львова [5] на языке АЛГОЛ-60 описаны алгоритмы построения аксонометрических и перспективных проекций на плоскость, а также панорамной проекции и их вывод на графические устройства с удалением невидимых линий.

В.А.Леус [25] разработал метод построения перспективных проекций тел произвольной формы, заданных каркасом плоских сечений. Он реализовал оригинальные алгоритмы построения штриховых изображений непрозрачных объектов (изображение с удалением невидимых линий) и предложил методику вывода тоновых изображений на электронно-лучевую трубку с яркостью, управляемой в зависимости от положения луча. Ранее эти вопросы в научной литературе не освещались.

Разработанные методы [5,25] использовались при съемке машинного кинофильма, показывающего сложные объекты в динамике.

Результаты исследований, описанных в п.3-6, докладывались на Всесоюзных научных конференциях [4,7,9,17]. Помимо машиностроения, они могут применяться в картографии, архитектуре и других областях.

7. Одним из важнейших приложений методов сплайн-функций явилось математическое обеспечение металлорежущих станков с числовым программным управлением. Расчет геометрической части управляющей информации состоит в определении траектории режущего инструмента относительно заготовки детали. Для этого рассчитывается дискретная последовательность установок станка (кадров), которые определяются, с одной стороны, координатами соответствующих точек требуемой поверхности и нормалями в них, а с другой - формой режущего инструмента и выбранным способом обработки, включая технологические условия.

Так как переход от одного кадра к другому осуществляется по специфическому для данного станка пути (обычно линейному закону), то задача состоит также в определении частоты кадров, обеспечивающей заданную точность воспроизводства деталей (допуски).

В.А.Леусом в 1966-1968 гг. на основе каркасной аппроксимации поверхностей была разработана и внедрена в производство методика подготовки геометрической информации для пятикоординатных станков фрезерной группы. По этой методике обработка детали проводится последовательно в плоскостях, параллельных плоскостям каркаса. На них с помощью определенных процедур рассчитываются кадры, частота которых определяется из условий приближения интерполяционного контура кривой, фактически реализуемой станком.

Г.Н.Кулиш разработал методику подготовки информации для четырехкоординатных токарно-фрезерных станков на базе бикубической сплайн-интерполяции.

Изготавливаемые поверхности близки к поверхностям вращения. Согласно предложенной методике траектория инструмента строится по принципу винтовой линии. Расчет кадров и их частоты, когда есть уравнение поверхности, не представляет труда. Он осуществляется проще, чем при каркасном методе, но, как уже отмечалось, бикубическая интерполяция требует больше труда на создание поверхности и связана с большим объемом запоминаемой информации. Эта работа была выполнена и внедрена в производство в 1970 г.

Проведенные исследования дают основу для применения сплайн-интерполяции в системах автоматического программирования для станков с программным управлением.

8. В 1969-1972 гг. В.А.Леусом и С.М.Гимильшейн были выполнены исследования по автоматизации проектирования длинных кинематических цепей, составленных из кривошипно-шатунных и кривошипно-коромысловых элементарных механизмов. Подобные цепи входят, например, в системы управления различными агрегатами летательных аппаратов, судов и т.п.

Задача анализа механизма состоит в вычислении положений выходного звена при заданном положении входного и фиксированных параметров цепи. Задача синтеза, которая и составляет содержание проектирования, заключается в отыскании таких параметров цепи, чтобы реализовалась требуемая зависимость выхода от входа. В работе [1] она поставлена как задача математического программирования о приближении фактической зависимости выхода от входа $v = v(u)$ кусочно-линейной функцией $v = \bar{v}(u)$, за -

данной множеством вершин (u_i, v_i). При этом целевая функция берется в виде: $F = \sum_i (v_i - \bar{v}_i)^2$. Как всегда, в подобных задачах целевая функция многоэкстремальна. Составлены программы для ЭВМ "Минск-22" для случая варьирования длин плеч рычагов, углов между плечами, длин тяг в цепях, содержащих до пятидесяти элементарных механизмов.

В заключение приводится полная библиография опубликованных работ Института математики СО АН СССР по обсуждаемой проблеме за 1966-1974 гг.

Литература

1. ГИМЕЛЬШЕЙН С.М., ЛЕУС В.А. Синтез пространственных передаточных механизмов. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.50, Новосибирск, 1972, с. 44-63.

2. ГРИГОРЕНКО М.М., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Программа реализации на ЭВМ "Минск-22" мультипликативного алгоритма для задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями на переменные. -В кн.: Алгоритмы и программы для решения задач оптимизации. Ч. 3, Новосибирск, 1972, с. 26-89.

3. ГРИГОРЕНКО М.М., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Решение одной задачи сглаживания кубическими сплайнами. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 56, Новосибирск, 1973, с. 27-30.

4. ГРИН В.М., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Перспективные изображения трехмерных объектов в динамике. -В кн.: Тезисы докладов II Всесоюзной конфер. по автоматизации научных исследований, Куйбышев, 1971.

5. ГРИН В.М., ЛЬВОВ В.А. Машинное построение проекций трехмерных объектов с удалением невидимых линий. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 50, Новосибирск, 1972, с. 64-85.

6. ДУЙСЕКОВ М., МИРОШНИЧЕНКО В.Л., ЗАВЬЯЛОВ Ю.С.,ИМАМОВ А. Многозвенные spline - функции пятой степени одной и двух переменных. -В кн.: Математика и механика (Тезисы докладов IУ Казахстанской межвузовской конференции по математике и механике). Ч. I, Алма-Ата, 1971, с. 147-148.

7. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. О решении некоторых задач приближения функций многих переменных на вычислительных системах. -В кн.: Тезисы докладов к симпозиуму "Вычислительные системы", Новосибирск, 1966, с. 19.

8. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Вычислительные системы как средство автоматизации проектно-конструкторских работ и технической подготовки производства. -В кн.: Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам 1967 г. Вып. 6, Новосибирск, 1968, с. 15-18.

9. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Математическое основы автоматизированной системы проектирования агрегатных поверхностей в машиностроении (АСПАП). -В кн.: Автоматизация технической подготовки производства в машиностроении (Материалы Всесоюзной научно-технической конференции). Ч. I, Минск, 1968, с.43-45.

10. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование функций одной и двух переменных кусочно-полиномиальными функциями.-В кн.: Математические проблемы геофизики. Вып. I, Новосибирск, 1969, с.125-141.

11. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.38, Новосибирск, 1970, с. 3-22.

12. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками (сплайнами).-Там же, с. 23-73.

13. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами).-Там же, с. 74-101.

14. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников (сплайнов) и задача сглаживания.-В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42, Новосибирск, 1970, с. 89-108.

15. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство бикубических многозвенников (сплайнов) и задача сглаживания. Там же, с.109-158.

16. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Многозвенные L -функции (сплайны) n - переменных. -В кн.: Математика и механика. (Тезисы докладов IУ Казахстан. межвузовской конференции по математике и механике). Ч.I, Алма-Ата, 1971, с. 145-146.

17. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Математические методы для автоматизированных систем проектирования геометрически сложных объектов.-В кн.: Автоматизация технической подготовки производства в машиностроении (Материалы II Всесоюзной научно-технической конференции). Ч.II, Минск, 1972, с. 56.

18. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. О явном представлении интерполяционных сплайн-функций с равноотстоящими узлами. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 56, Новосибирск, 1973, с. 3-17.

19. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. L - сплайн-функции многих переменных. -"Докл. АН СССР", 1974, т.214. №6, с.1247-1249.

20. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование L -сплайн-функциями многих переменных. -"Мат.заметки", 1973, т. 14, в.1, с. 11-20.

21. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Сглаживание L -сплайн-функциями многих переменных. -"Мат.заметки", 1974, т.15, в. 3, с.512-520.

22. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЬВОВ В.А. Автоматизация исследовательских и проектно-конструкторских работ на базе ЭВМ. -В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции по автоматизации научных исследований на основе применения ЭЦВМ, Новосибирск,1970,с.69.

23. КОЗЛОВ Л.А., ЛЬВОВ В.А. Применение вычислительных систем при исследовании некоторых математических моделей в области машиностроения. -В кн.: Вычислительные системы, Вып. 38,Новосибирск, 1970, с. 128-137.

24. ЛЕУС В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых. -Там же, с. 102-127.

25. ЛЕУС В.А. Перспективное изображение трехмерных непрозрачных объектов. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 50, Новосибирск, 1972, с. 86-99.

26. ФИЛАТОВ В.В. О чебышевском приближении кубическими сплайнами. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 56, Новосибирск, 1973, с. 23-26.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 февраля 1974 года