

О МАКРОСТРУКТУРЕ ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.В. Корнеев

Понятие макроструктуры однородной вычислительной системы (ОВС) введено в [1]. На макроструктурном уровне рассмотрения ОВС состоит из трех основных частей: элементарных машин (ЭМ), коммутаторов (К) и линий связи (ЛС). Коммутаторы и линии связи образуют систему связи ОВС.

Граф системы связи будем называть структурой ОВС. В работе [2] рассмотрены требования, предъявляемые к структурам ОВС, и введен класс конечных абелевых изотропных симметричных структур (КАИС-структур). Класс КАИС-структур с точностью до направлений ребер совпадает с классом групп-графов транзитивных групп автоморфизмов структур [3]. Групп-графом называется ориентированный граф Γ , вершинам которого поставлены во взаимно-однозначное соответствие элементы группы G . Две вершины графа Γ связаны с ребром $\{g, g'\}$, если существует такой элемент $g_0 \in G$, что $g' = g \cdot g_0$; $G_0 \subset G$ — некоторое конечное подмножество. Элементы, входящие в G_0 , называются образующими группы. Если использовать для отметок ребер графа Γ элементы G_0 , то получим диаграмму Кэли группы G .

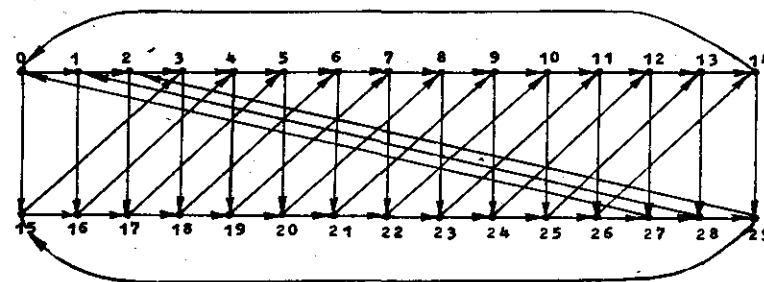
1. Групповое описание КАИС-структур. Каждой КАИС-структуре со степенью вершины n и числом вершин N можно поставить в соответствие, причем не единственным образом, группу G порядка N с числом образующих $k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть $\cdot$. В дальнейшем k будем называть размерностью КАИС-структуры. Рассмотрим возможные групповые описания одной и той же КАИС-структуры.

1.1. КАИС-структуры представляют собой неориентированные графы, а групп-графы являются ориентированными. Вследствие

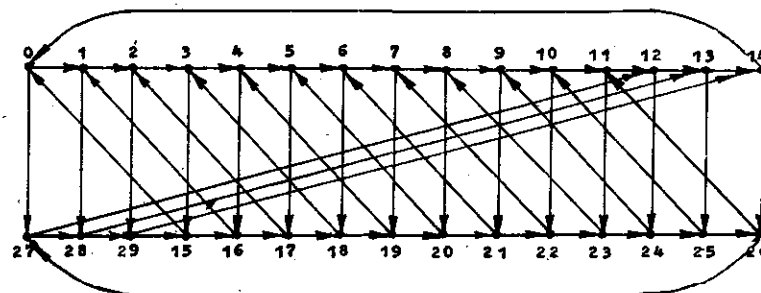
этого одной и той же КАИС-структуре может соответствовать несколько групп-графов, отличающихся друг от друга ориентацией ребер и определяемых группами, имеющими одинаковое количество образующих, но разные определяющие соотношения. Будем говорить, что эти группы принадлежат одному классу эквивалентности. Число групп в классе эквивалентности меньше, либо равно 2^k , где k — число образующих. Доказательство этого факта основано на том, что группа, описывающая КАИС-структуру, полностью определяется заданием ориентации ребер в какой-либо точке структуры, но число возможных переориентаций ребер равно 2^k и некоторые ориентации ребер могут задавать одну и ту же группу.

Таким образом, если мы имеем группу G^* из класса эквивалентности K_{G^*} , то получить все остальные группы класса K_{G^*} можно следующим путем. Выбираем некоторое подмножество образующих, заменяем прямые вхождения выбранных образующих в определяющих соотношениях группы G^* на обратные, а обратные — на прямые. Продолжаем эту операцию для всех возможных подмножеств образующих. Рассмотрим пример: пусть G^* описывается определяющими соотношениями $\{a^{15} = 1, b^2 = a^3\}$, тогда группа $G \in K_{G^*}$, получающаяся из G^* путем переориентации образующей b , имеет соотношения $\{a^{15} = 1, b^2 = a^{12}\}$. Здесь и далее определяющие соотношения, задающие коммутаторность образующих группы, опускаются, так как речь идет о коммутативных группах. На рис. 1 приведены соответствующие этим группам групп-графы. Очевидно, что они задают одну и ту же КАИС-структуру, что наглядно показывается нумерацией вершин.

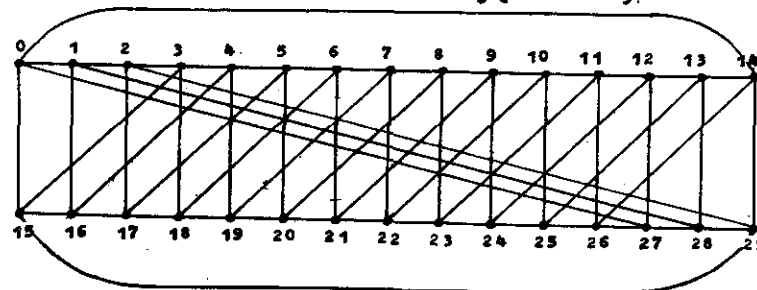
1.2. Определяющие соотношения группы G могут быть записаны в различной форме. Так, например, соотношения $\{a^{15} = 1, b^{10} = 1, a^3 = b^2\}$ могут быть записаны в виде $\{a^{15} = 1, b^2 = a^3\}$. Указанное преобразование определяющих соотношений производится следующим образом: отыскивается порядок ρ_e образующей e и записывается соответствующее определяющее соотношение — $e^{\rho_e} = 1$. Далее, с учетом этого соотношения преобразуются остальные, если это необходимо. На рис. 1 и 2 показаны групп-графы, соответствующие двум различным записям определяющих соотношений, приведенным выше. Ясно, что указанные ориентированные графы полностью совпадают.



Групп-граф группы $\begin{cases} a^{15} = 1 \\ b^2 = a^3 \end{cases}$



Групп-граф группы $\begin{cases} a^{15} = 1 \\ b^2 = a^{12} \end{cases}$



КАИС-структура

Рис. 1. Групп-графы для двух различных записей определяющих соотношений

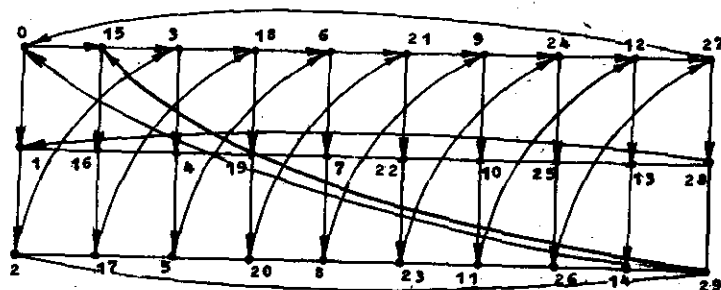


Рис. 2

1.3. Наконец, определяющие соотношения группы G могут быть записаны в различных видах, которые отличаются друг от друга простой заменой одних символов на другие. Например, $\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{10} = 1 \\ \alpha^3 = \beta^2 \end{array} \right\}$ и $\left\{ \begin{array}{l} \beta^{10} = 1 \\ \alpha^3 = \beta^2 \end{array} \right\}$.

1.4. Итак, одна и та же КАИС-структура может быть описана различными определяющими соотношениями, соответствующими либо различным группам (1.1), либо различным записям определяющих соотношений одной и той же группы (1.2, 1.3). Выберем в качестве описания КАИС-структуры из множества задающих её групп группу со следующим представлением определяющих соотношений:

- 1) образующие обозначены $\alpha, \beta, \gamma, \dots$;
- 2) образующая α должна иметь наибольший порядок, β - следующий по величине и т.д.;
- 3) сумма модулей степеней образующих в правой части определяющих соотношений должна быть минимальной.

На основании этих требований из всех приведенных в примерах (1.1; 1.2; 1.3) определяющих соотношений групп, соответствующих КАИС-структуре на рис. 1, выбираем определяющие соотношения $\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{10} = 1 \\ \beta^2 = \alpha^3 \end{array} \right\}$.

2. Оптимальные структуры. Основными требованиями [2], предъявляемыми к внутренней организации ОВС, являются: обеспечение максимальных значений показателей живучести

и коммутируемости, минимальных средней и наибольшей задержек при транзитных передачах сообщений. Перечисленные показатели зависят как от алгоритмов функционирования ОВС, так и от структуры ОВС.

Нашей задачей является выбор из класса $\theta(N, k)$ - КАИС-структур одинаковой размерности k и с одинаковым числом вершин N такой КАИС-структуры, которая бы обеспечивала оптимум показателей функционирования ОВС. Рассматривая различные структуры, будем сравнивать предельные значения показателей живучести, коммутируемости и задержек при транзитных передачах, обусловленных структурой ОВС, полагая, что соответствующие алгоритмы функционирования полностью используют возможности, предоставляемые структурами. Назовем указанные предельные значения соответственно функциями структурной живучести, структурной коммутируемости и структурной задержки при транзитной передаче. Ниже будут рассмотрены вопросы выбора структуры из класса $\theta(N, k)$, имеющей экстремальные предельные значения перечисленных выше параметров.

2.1.1. Компоненты P_j вектор-функции P структурной живучести равны вероятности образования подсистемы ранга $j, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, при заданных коэффициентах готовности $\rho_{эм}, \rho_k$ и $\rho_{сб}$, соответственно ЭМ, К и ЛС; N - число ЭМ в ОВС. Подсистемой ранга j называется совокупность не менее j исправных ЭМ, связанных каналами так, что возможна передача информации из любой ЭМ во все остальные ЭМ подсистемы (при этом каналы связи считаются двусторонними, и для передачи могут быть использованы коммутаторы неисправных ЭМ). Под коэффициентом готовности устройства понимается вероятность того, что оно исправно в произвольный момент времени.

$$P_j = \sum_{i=j}^N P_i^j(\rho_{эм}) \cdot P_N^i(\alpha, \rho_k, \rho_{сб}),$$

где $P_i^j(\rho_{эм})$ - вероятность того, что из i ЭМ можно организовать подсистему ранга j при заданном коэффициенте $\rho_{эм}$ готовности ЭМ и абсолютно надежной системе связи;

$P_N^i(\alpha, \rho_k, \rho_{сб})$ - вероятность того, что из N абсолютно надежных ЭМ может быть образована подсистема ранга i при заданной структуре α , коэффициентах готовности ρ_k и $\rho_{сб}$ соответственно коммутатора и связи.

Вероятности $P_i^j(\rho_{\Sigma})$ могут быть вычислены методами, предложенными в работе [4]. Вероятность $P_N^k(\alpha, \rho_k, \rho_{cb})$ непосредственно зависит от структуры системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.1. В классе $\theta(N, k)$ вероятность $P_N^k(\alpha, \rho_k, \rho_{cb})$ при любых значениях i, ρ_k, ρ_{cb} достигает максимума на структуре $\alpha^* \in \theta(N, k)$, группа которой удовлетворяет следующим свойствам:

- а) $\sum_{j=1}^k |\alpha_j| \leq \min_{\alpha \in \theta(N, k)} \max_{j=1}^k |\alpha_j|$,
 б) число элементов группы с
- $$\sum_{j=1}^k |\alpha_j| = \min_{\alpha \in \theta(N, k)} \max_{j=1}^k |\alpha_j|$$

минимально.

Здесь k — число образующих группы класса $\theta(N, k)$;

α_j — показатель степени при образующей j .

Доказательство утверждения проведем в два этапа. На первом выделим свойства группы $\alpha^* \in \theta(N, k)$, удовлетворяющей условиям а) и б), на втором — докажем собственно утверждение.

Рассмотрим бесконечную абелеву группу G_∞^k , имеющую k образующих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и определяющие соотношения вида: $\alpha_j \alpha_i = \alpha_i \alpha_j$, $i, j \in \overline{1, k}$, то есть у группы G_∞^k нет никаких иных определяющих соотношений кроме тех, которые задают коммутативность образующих. Построим граф $M(m)$ со следующими свойствами. Число вершин графа $M(m)$ равно числу элементов группы G_∞^k с суммой модулей степеней образующих, меньшей или равной m . В дальнейшем это число будет обозначаться через $S^k(m)$. Сопоставим каждой вершине $M(m)$ элемент группы G_∞^k с суммой модулей степеней образующих, меньшей или равной m . Две вершины p и q графа $M(m)$ связаны ребром $\{p, q\}$, если соответствующие им элементы группы G_∞^k b_p и b_q удовлетворяют следующему условию: $b_p \cdot \alpha_e = b_q$; $e = \overline{1, k}$. При этом ребру $\{p, q\}$ сопоставляется метка α_e , если p принадлежит ярусу j , а q — ярусу $(j+1)$, и метка α_e^{-1} , если p принадлежит ярусу $(j+1)$, а q — ярусу j . Будем говорить, что вершина

графа $M(m)$ принадлежит ярусу j , если сумма модулей степеней образующих сопоставленного ей элемента группы равна j .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.2.

$$S^k(m) = S^{k-1}(m) + 2 \sum_{i=0}^{m-1} S^{k-1}(i).$$

Элемент $\{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_k^{\alpha_k}\}$ группы G_∞^k получается в результате умножения элемента $\{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\}$ группы G_∞^{k-1} на $\alpha_k^{\alpha_k}$. Элементы G_∞^k с суммой модулей степеней образующих, меньшей или равной m , образуются путем умножения элементов G_∞^{k-1} с суммой модулей степеней образующих, меньшей или равной $(m-i)$, на $\alpha_k^{\alpha_k}$, где $|\alpha_k| = i$. Так как i может принимать значения от 0 до m , то α_k пробегает ряд $0, \pm 1, \dots, \pm m$. Суммирование по всем значениям α_k дает:

$$S^k(m) = S^{k-1}(m) + 2 \sum_{i=0}^{m-1} S^{k-1}(i),$$

что и требовалось доказать.

Приведем выражения $S^k(m)$ для частных значений k , представляющих наибольший интерес для приложений.

$$S^1(m) = 2m + 1; \quad S^3(m) = \frac{(2m+1)^3 + 5(2m+1)}{6};$$

$$S^2(m) = 2m^2 + 2m + 1; \quad S^4(m) = \frac{4m^4 + 8m^3 + 20m^2 + 16m + 6}{6}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.3. Для любого N и любого $k \leq N-1$ существует абелева группа G_N^k с k образующими, имеющая $S^k(i)$ элементов с суммой модулей степеней образующих равной i ($i \leq m^*-1$), и $N - S^k(m^*-1)$ элементов с суммой модулей степеней образующих, равной m^* , где m^* получается из неравенства $S^k(m^*-1) < N \leq S^k(m^*)$.

В общем случае доказательство утверждения получить не удалось, но проверена его справедливость для $k=2, 3$ и $N \in [10; 200]$, то есть получены соответствующие группы G_N^k .

Структура $\mathfrak{A}^* \in \theta(N, k)$, описываемая группой G_N^k , удовлетворяет условиям а) и б) утверждения 2.1.1. Очевидно, что структура $\mathfrak{A}^*$ включает в качестве подграфа граф $M(m^*-1)$. Но $M(m^*-1)$ имеет максимально возможное для выбранного значения k число вершин $S^k(m^*-1)$. Следовательно, m^* является минимальной суммой модулей степеней образующих для данного порядка N и данной размерности k , то есть $\mathfrak{A}^*$ удовлетворяет условию а). Так как $\mathfrak{A}^*$ имеет число элементов с суммой модулей степеней образующих, равной $m^*(N - S^k(m^*-1))$, которое является минимально возможным для данного N и k , то выполняется также условие б).

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Число элементов с суммой модулей степеней образующих, равной m ($0 < m \leq m^*-1$), в структуре $\mathfrak{A}^*$ равно $S^k(m) - S^k(m-1)$ и является максимальным возможным числом элементов с суммой модулей степеней образующих, равной m , для всех структур класса $\theta(N, k)$.

Перейдем ко второму этапу доказательства утверждения 2.1.1. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что вероятность образования на структуре $\mathfrak{A}^*$ подсистемы ранга τ , включающей произвольную вершину структуры, больше или равна вероятности образования соответствующей подсистемы на любой другой структуре класса $\theta(N, k)$. Тогда в силу однородности рассматриваемых структур вероятность образования подсистемы ранга τ на структуре $\mathfrak{A}^*$ будет больше или равна соответствующей вероятности на любой другой структуре $\mathfrak{A} \in \theta(N, k)$.

Итак, рассмотрим две структуры класса $\theta(N, k)$: структуру $\mathfrak{A}^*$ с группой G^* и структуру $\mathfrak{A}$ с группой G . Каждому пути из одной вершины структуры в другую вершину однозначным образом может быть сопоставлена упорядоченная последовательность отметок. Число путей в групп-графах G^* и G из вершины, помеченной единицей группы, в вершину с отметкой $\{a_1, \dots, a_k\}$ не превышает $(\sum_{j=1}^k |x_j|)! / (|x_1|! \dots |x_k|!)$. Количество отметок в упорядоченной последовательности, соответствующей пути P , называется длиной пути.

Подсистема ранга τ , включающая вершину, отмеченную единицей, является объединением путей, сумма длин которых больше или равна $(\tau - 1)$. В силу вышеприведенных свойств структура $\mathfrak{A}^*$ в классе $\theta(N, k)$ имеет наибольшее число путей заданной длины. Это обусловлено тем, что в любой структуре $\mathfrak{A} \in \theta(N, k)$, не совпадающей с $\mathfrak{A}^*$, число вершин, отмеченных элементами группы с суммой модулей степеней образующих, равной m ($0 < m \leq m^*$), меньше или равно максимально возможному. Но тогда общее число путей длины m в структуре $\mathfrak{A}$ меньше, чем в $\mathfrak{A}^*$, так как пути, являющиеся различными в $\mathfrak{A}^*$, неразличимы в $\mathfrak{A}$. Следовательно, если $M_j^{\mathfrak{A}^*}$ — число различных путей заданной длины j на структуре $\mathfrak{A}^*$, то $M_1^{\mathfrak{A}^*} \geq M_1^{\mathfrak{A}} \dots M_{m^*-1}^{\mathfrak{A}^*} \geq M_{m^*-1}^{\mathfrak{A}}$. Отсюда число различных объединений путей с суммой длин, большей или равной $(\tau - 1)$, на структуре $\mathfrak{A}^*$ больше либо равно числу соответствующих объединений на структуре $\mathfrak{A}$. А так как различные объединения путей с одинаковой суммой длин τ имеют вероятность $\rho_k \times \rho_{cb}$, то вероятность образования подсистемы ранга τ , включающей вершину с отметкой 1 на структуре $\mathfrak{A}^*$, больше соответствующей вероятности на структуре $\mathfrak{A}$.

Мы не использовали никаких ограничений на величины i, ρ_k, ρ_{cb} , поэтому наши рассуждения справедливы для любых i, ρ_k, ρ_{cb} . Таким образом, утверждение 2.1.1. доказано.

2.1.2. Методом статистических испытаний были вычислены значения вектор-функции структурной живучести для различных КАИС-структур размерности 2 с числом вершин 30. Результаты для "лучшей", в смысле живучести, структуры $\mathfrak{A}^*$, описываемой группой $\{\alpha^{15} = 1, \beta^2 = \alpha^6\}$, и структуры $\mathfrak{A}$, описываемой группой $\{\alpha^{30} = 1, \beta = \alpha^2\}$, приведены на рис.3, причем линия I соответствует структуре $\mathfrak{A}^*$, а линия 2 — структуре $\mathfrak{A}$. Коэффициент готовности $\rho_k = \rho_{cb} = 0,9$. Теоретические выводы относительно поведения вектор-функции структурной живучести, полученные в п. 2.1.1, полностью подтверждаются результатами моделирования.

2.2. В [3] показано, что всякая КАИС-структура с заданной размерностью k , начиная с некоторого числа вершин N_k , не является m -коммутируемой ни для какого значения m . В то же время в класс КАИС-структур с заданной размерностью k входит полный граф с $(k+1)$ вершиной, который является 1-коммутируе-

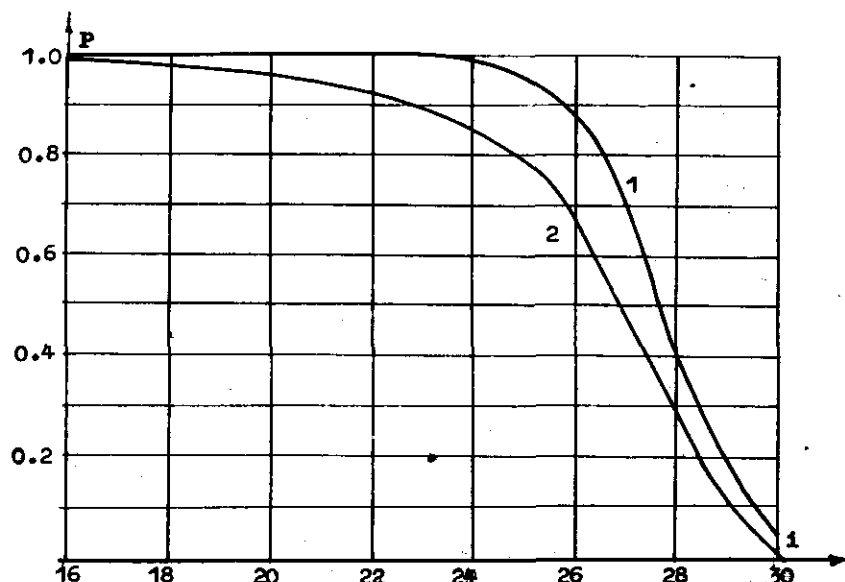


Рис. 3

ним. В работе [2] введена мера коммутируемости $\rho(\alpha, \ell, m)$ – вероятность того, что на структуре α может быть не менее ℓ произвольных коммутаций, причем каждая связь использована при этом не более чем в m различных коммутациях.

Выдвигается следующая

ГИПОТЕЗА. На структурах класса θ (см. утверждение 2.1.1) максимум $\rho(\alpha, \ell, m)$ при любых значения ℓ и m достигается на структуре α^* .

В пользу этой гипотезы говорит то, что структура α^* по своим свойствам ближе к полному графу, чем какая-либо другая структура $\alpha \in \theta(N, k)$.

2.3. Структура α' класса θ , обеспечивающая минимум максимальной и средней задержек при транзитных передачах, должна удовлетворять следующим свойствам:

$$\min_{i,j} \max d_{ij}(\alpha') \leq \min_{i,j} \max d_{ij}(\alpha); \quad (1)$$

$$M[d_{ij}(\alpha')] \leq M[d_{ij}(\alpha)], \quad (2)$$

где α – любая структура класса θ ;
 $d_{ij}(\alpha)$ – расстояние между точками i и j на структуре α ;
 $M[d_{ij}(\alpha)]$ – математическое ожидание расстояния между любыми двумя вершинами структуры α при равновероятном выборе пар вершин.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.1. Структура $\alpha^* \in \theta(N, k)$ является структурой α' .

Требование 1) аналогично требованию а) утверждения 2.1.1, так как минимум максимума суммы модулей степеней образующих элементов группы, соответствующей α^* , означает минимум максимального расстояния между вершинами структуры. В силу свойств КАИС-структур $M[d_{ij}(\alpha)]$ не зависит от выбора i .

$$M[d_{ij}(\alpha)] = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N d_{ij},$$

где N – число вершин структуры α . Так как α^* содержит максимально возможное число вершин на расстояниях $1, 2, \dots, (m^*-1)$ и минимальное число вершин на расстоянии m^* среди всех структур θ , то утверждение 2.3.1 полностью доказано.

2.4. Из пп. 2.1, 2.2, 2.3 следует, что всем требованиям к структурам ОВС удовлетворяет $\alpha^* \in \theta(N, k)$ из утверждения 2.1.1. Будем называть α^* оптимальной структурой размерности k с числом вершин N и обозначать $\alpha(N, k)$. С помощью ЭВМ составлен каталог оптимальных структур, позволяющий по заданному числу вершин и размерности определить группу и, список структуры, который задает номера связанных вершин. Фрагмент каталога оптимальных структур приведен на рис. 4, где число ЭМ – число вершин структуры; число связей – размерность структуры; диаметр – $M[d_{ij}]$.

2.5. Для оптимальных структур $\alpha(N, k)$ имеется возможность вычислить $M[d_{ij}(\alpha)]$. В самом деле, следствие 2.1.1 определяет число вершин, находящихся на расстоянии i от любой фиксированной вершины.

Каталог однородных структур		лист
Число ЭМ	= 010	
Число связей	004	
Диаметр	0 = + I399999 + I	
Группа автоморфизмов		
A	010 = I	
B	001 = A	004
Список структуры		
000:001	002	003 004
001:005	006	000 007
002:006	008	009 000
003:000	009	008 006
004:007	000	006 006
005:009	004	001 008
006:004	003	002 001
007:008	001	004 009
008:003	005	007 002
009:002	007	005 003

Рис. 4

Отсюда

$$M[d_{ij}] = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{m^*-1} i \Delta S_i^k [N - S^{k(m^*-1)}] \cdot m^* \right),$$

где $\Delta S^k(i) = S^k(i) - S^k(i-1)$.

Заметим, что m^* является максимальной структурной задержкой при транзитной передаче. На рис. 5 приведены зависимости $M[d_{ij}(\alpha)]$ от числа вершин N и размерности структур. Линиям 1, 2, 3 соответствуют размерности 2, 3, 4.

3. Вектор-функция структурной живучести $\mathcal{P}_N^k(\alpha, \rho_k, \rho_{cb})$.

3.1. Рассмотрим процесс вычисления компонент вектор-функции живучести для КАИС-структур размерности 1, называемых в дальнейшем K_N -структурами (кольцевые структуры с N вершинами). Для K_N -структур, очевидно, можно записать: $\mathcal{P}_N^k(K_N, \rho_k, \rho_{cb}) = \mathcal{P}_N^k(K_N, \rho_k)$, так как надежность связи легко пересчитывается в ненадежность коммутаторов. Определим $\mathcal{P}_N^z(K_N, \rho_k)$. Перенумеруем вершины K_N структуры номерами $0 \div (N-1)$ так, чтобы вершина с

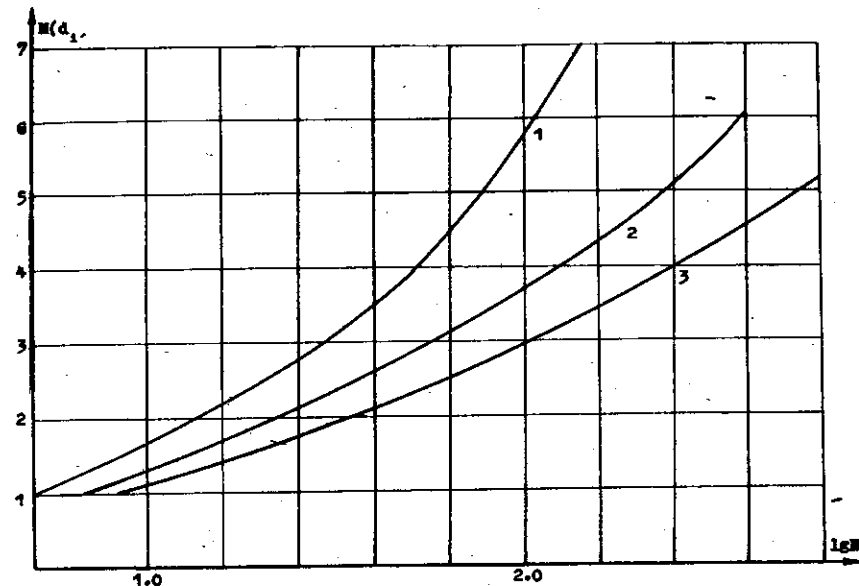


Рис. 5

номером j была связана с вершинами, имеющими номера $(j-1) \bmod N$ и $(j+1) \bmod N$.

Событие, состоящее в том, что существует подсистема ранга z , может осуществиться следующими способами.

1. Нулевая вершина K_N -структуры находится в состоянии отказа, но подсистема ранга z существует (событие A). Обозначим вероятность этого события Φ_0 .

2. Нулевая вершина исправна и

а) образована подсистема ранга z , включающая нулевую вершину (событие B); вероятность этого события — Φ_1^a ;

б) подсистема, включающая вершину 0, имеет ранг меньше z , но есть подсистема ранга z , не включающая вершину 0 (событие C); вероятность этого события Φ_1^b .

В этом случае $\mathcal{P}_N^z(K_N, \rho_k)$ будет равна $\Phi_0 + \Phi_1^a + \Phi_1^b$. Определим каждую из величин этой суммы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1.1. Φ_0 является коэффициентом при t^N в

$$\sum_{i=0}^{N-z-1} \left[\sum_{m=1}^{(N-z-i-2)/2} T(i; m) \right]$$

где $T(i, m) = (q_k t)^i [q_k t + \dots + (q_k t)^{N-z-i-2(m-1)}]^m \times$

$$\{ [p_k t + \dots + (p_k t)^{N-i-2m+1}]^m - [p_k t + \dots + (p_k t)^{z+1}]^m \}, \quad q_k = 1 - p_k.$$

В событие A входят события, состоящие в том, что i вершин после нулевой находятся в состоянии отказа. Так как нулевая вершина находится в состоянии отказа и имеется подсистема ранга z , то $i \in \{0, \dots, (N-z-1)\}$. Остальные $(N-1)$ вершины разбиваются на равное число чередующихся отрезков исправных и неисправных вершин. В отрезок входят вершины с последовательными номерами, то есть за вершиной с номером j следует вершина с номером $(j+1) \bmod N$. Пусть общее число исправных вершин на отрезках L , тогда общее число вершин на исправных отрезках есть $(N-i-L)$. Нам необходимо подсчитать число композиций [5] с точно m частями, из которых хотя бы одна больше или равна z для всех возможных значений m . Умножив это число на количество композиций $(N-i-L)$ с точно m частями, мы получим количество способов, которыми при заданном L можно расположить $(N-i)$ точек. Взяв сумму по всем возможным значениям L , получим число способов реализации события A .

Производящей функцией числа композиций с точно m частями, из которых каждая не превосходит z , является [5]

$$C_m(t, z) = (t + t^2 + \dots + t^z)^m.$$

Максимальная длина отрезка исправных вершин, если число отрезков равно m , будет $N-i-2m+1$. Максимальная длина отрезка неисправных вершин при тех же условиях — $N-z-i-2(m-1)$. При этом для заданных m и i имеем:

$$T(i, m) = (q_k t)^i [q_k t + \dots + (q_k t)^{N-z-i-2(m-1)}]^m \times$$

$$\{ [p_k t + \dots + (p_k t)^{N-i-2m+1}]^m - [p_k t + \dots + (p_k t)^{z+1}]^m \}.$$

Для каждого i значения m пробегает ряд от 1 до $\left[\frac{N-z-i+2}{2} \right]$. Очевидно, что при разных i и m мы получаем различные события, поэтому, взяв сумму по всем i и m , получим утверждение 3.1.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1.2.

$$\Phi_1^z = \sum_{j=z}^N T(j),$$

где

$$T(j) = \begin{cases} j p_k^j q_k^2, & j < N-1, \\ (N-1) p_k^j q_k, & j = N-1, \\ p_k^j, & j = N. \end{cases}$$

В B входят все события, состоящие в том, что образуется подсистема ранга j , включающая нулевую вершину; $j = \{z, z+1, \dots, N\}$. Очевидно, j вершин можно расположить относительно нулевой вершины j способами. При $j < N-1$, j исправных вершин ограничены двумя неисправными, а при $j = N-1$ — одной. Все j возможных расположений исправных вершин различны, так как в любых двух расположениях содержится вершина нуль. Поэтому найдется место, где в одном расположении должна стоять исправная точка, а в другом — неисправная. Кроме того, события для различных j не пересекаются, что доказывается аналогично предыдущему. Утверждение 3.1.2 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1.3. Φ_1^{δ} является коэффициентом при t^N в

$$\sum_{k=1}^{z-1} \sum_{\ell=0}^{z-k-1} \sum_{i=1}^{N-z-2} \sum_{m=1}^f T(k, \ell, i, m),$$

$$T(k, \ell, m, i) = (q_k t)^{k+\ell} [q_k t + \dots + (q_k t)^{N-k-\ell-1-2(m-1)-z-i}]^m \times$$

$$\times (p_k t)^{k+\ell} \{ [p_k t + \dots + (p_k t)^{N-k-\ell-2m-i}]^m - [p_k t + \dots + (p_k t)^{z+1}]^m \};$$

$$f = \frac{N-z-i-k-\ell+1}{2}.$$

В C входят события, состоящие в том, что образуется подсистема ранга меньше z , включающая вершину нуль, и подсистема

ранга τ , не включающая нулевую вершину. Подсистема, включающая нулевую вершину, может содержать вершины с номерами $0, 1, \dots, (k-1), (N-1), (N-2), \dots, (N-l)$, причем $k+l \leq \tau-1$. Вершина с номером k есть отказавшая, остальные вершины разбиваются на чередующиеся отрезки исправных и неисправных вершин. Для подсчета числа событий при заданных k и l поступаем так же, как в утверждении 3.1.1, с той разницей, что число вершин не $(N-l)$, а $(N-k-l-i-1)$. Из доказательств утверждений 3.1.1 и 3.1.2 очевидно, что все события, полученные при различных k, l, i, m , не пересекаются. Поэтому, взяв сумму по всем допустимым значениям k, l, i, m , получим утверждение 3.1.3.

3.1.1. Ниже приведено выражение для 3-й компоненты вектор-функции структурной живучести структуры K_{10} , вычисленной по вышеприведенной методике.

$$\begin{aligned} \Phi_{10}^3(K_{10}, p_k) = & p_k^3(3q_k + 7q_k^2) + p_k^4(4q_k^2 + 36q_k^6) + \\ & + p_k^5(5q_k^2 + 97q_k^5) + p_k^6(6q_k^2 + 110q_k^4) + p_k^7(7q_k^2 + 61q_k^3) + \\ & + 20p_k^8q_k^2 + 10p_k^9q_k + p_k^{10}. \end{aligned}$$

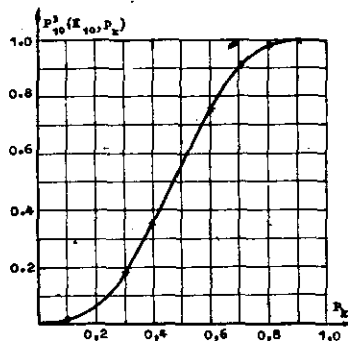


Рис. 6

размерности 2 число подсистем, ранг которых не превышает 10. При больших размерностях структуры и больших рангах исследуемых подсистем число вычислений становится настолько большим, что превышает возможность современных ЭВМ.

На рис. 6 приведен график зависимости $\Phi_{10}^3(K_{10}, p_k)$. Точками показаны значения $\Phi_{10}^3(K_{10}, p_k)$, полученные методом статистических испытаний.

3.2. В пункте 3.1. продемонстрирована сложность получения аналитических выражений компонент вектор-функции структурной живучести даже в простейшем случае. В работе [6] авторы с помощью быстродействующей электронной вычислительной машины смогли получить для КАИС-структуры

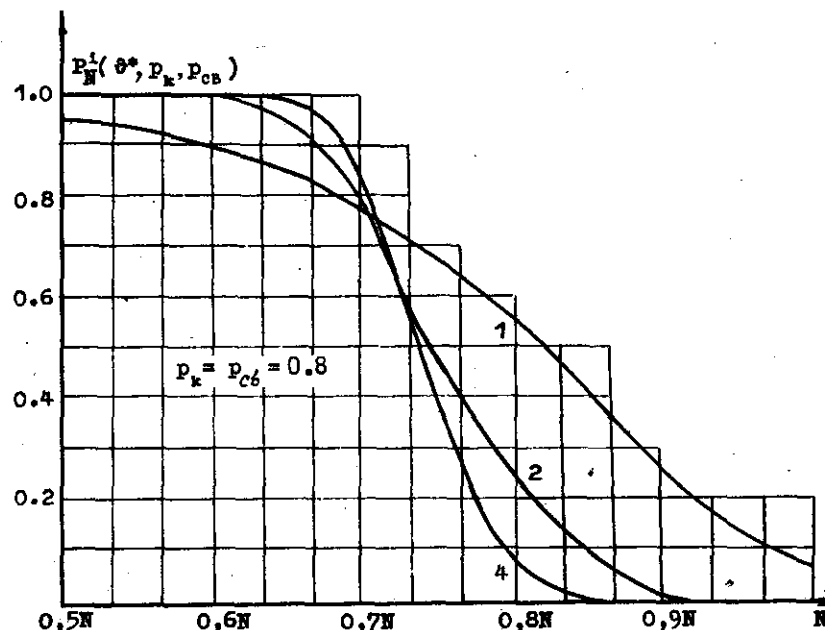
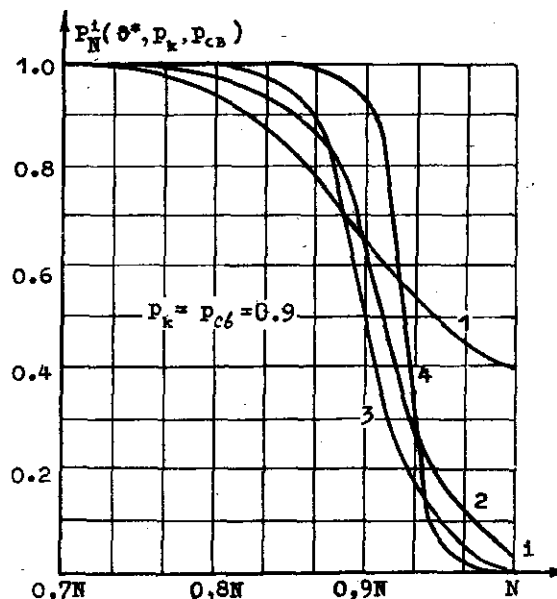


Рис. 7



Размерность структуры - 2.

Номер линии	Число вершин
1	10
2	50
3	90
4	120

Рис. 8

Для определения вектор-функции структурной живучести был использован метод статистических испытаний. Результаты моделирования, приведенные на рис. 7 и 8, позволяют сделать следующие выводы:

- 1) существует пороговое значение ранга подсистемы, до которого все компоненты вектор-функции живучести равны 1;
- 2) при одной и той же относительной величине $e = m \cdot N(0 < m \leq 1)$ с ростом N растет e -компонента соответствующей вектор-функции. Последний результат особо интересен, так как показывает, что с ростом числа ЭМ в однородной вычислительной системе имеется фактор, увеличивающий эффективность системы.

Л и т е р а т у р а

1. ЕВРЕЙНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.
2. ВОРОБЬЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем. - Настоящий сборник, стр. 3-16.
3. WAGNER E.G. On connecting modules together uniformly to form a modular computer. - "IEEE Trans. on EC", 1966, vol. EC-15, N 6, p.863-972.
4. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Некоторые вопросы надежности однородных универсальных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 23. Новосибирск, 1966, стр. 69-90.
5. РИОРДАН Д.Ж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.
6. READ R.C. Contribution to the cell-growth problem. - "Canadian J.Math.", 1962, vol.14, p.1-20.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 октября 1973 года