УДК 621.019.25

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.А.Павский

Предлагается метод нахождения показателей надежности вычислительных систем (ВС) [1,2] для переходного режима функционирования. Выводятся расчетные формулы, которые могут быть применены для анализа надежности функционирования однородных вычислительных систем (ОВС) [1], ВС из машин типа ЕС ЭВМ [3] и т.д. Формулы достаточно просты в реализации на вычислительной машине; некоторые из них допускают ручной счет.

Решаются также две задачи теории надежности с использованием традиционного метода теории массового обслуживания [4]. Осуществляется сравнение метода, предложенного в настоящей работе, с традиционным методом теории массового обслуживания.

§1. Решение задач надежности функционирования вычислительных систем

1.0. Сущность метода. Пусть имеется система S, состоящая из N, вообще говоря, различных элементов, $N=1,2,\ldots$. Пусть $\{C_i\}$, $i\in E_r=\{0,1,\ldots,r\}$ – множество несовместных состояний, в которых может находиться каждый элемент системы. Будем считать, что состояние системы S в фиксированный момент времени $t\in[0,\infty]$ характеризуется числом элементов, находящихся в каждом из состояний C_i, $i\in E_r$.

Обозначим через $A=\{A_{i_0},A_{i_1},\ldots,A_{i_{r-1}}\}$ – множество несовместных состояний системы S; $i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}\in E_N$, $\sum_{j=0}^{r-1} i_j=N$.

Пусть $P_{i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}}(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t\in[0,\infty)$, i_0 элементов системы S находится в состоянии C_0, i_1 элементов – в состоянии C_1 и так далее, наконец, i_{r-1} элементов – в состоянии C_{r-1}. Так как множество A образует полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}}^{N} P_{i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}}(t)=1.$$

Введем в рассмотрение величину $\xi_i(t)$ –число элементов, находящихся в момент t в состоянии C_i. Очевидно, что $\xi_i(t)$ – случайный процесс, причем для каждого t $\sum_{i=0}^{r}\xi_i(t)=N$. Пусть $\mathcal{M}_i(t)=\mathcal{M}\{\xi_i(t)\}$ – математическое ожидание величины $\xi_i(t)$, а $\mathcal{D}_i(t)=\mathcal{D}\{\xi_i(t)\}$ –её дисперсия. Требуется для любого $t\in[0,\infty]$ определить $P_{i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}}(t)$, $\mathcal{M}_i(t)$, $\mathcal{D}_i(t)$, $i\in E_r$.

Для нахождения этих характеристик предположим, что в системе S протекает процесс, описываемый непрерывной цепью Маркова [4,5]. Пусть пребывание любого элемента системы в произвольный момент времени $t\in[0,\infty)$ в одном из множеств состояний $\{C_i\}$, $i\in E_r$, не зависит от того, в каких состояниях находятся остальные элементы системы. Обозначим через $\lambda_{ij}^k(t)$ –плотность вероятностей перехода k-го элемента системы S из состояния C_i в состояние C_j, $i,j\in E_r$.

Для решения этой задачи обычно рекомендуют [6] пользоваться методом теории массового обслуживания, который заключается в составлении систем дифференциальных уравнений для вероятностей $P_{i_0,i_1,\ldots,i_{r-1}}(t)$. Однако решить эти уравнения удается в очень редких простейших случаях.

Нахождение вероятностных характеристик системы значительно упрощается, если применить метод, суть которого заключается в следующем. Пусть $p_i^k(t)$ –вероятность того, что в момент времени $t\in[0,\infty)$ элемент k системы S находится в состоянии C_i. Для вероятностей $p_i^k(t)$ составляются уравнения Колмогорова [7], так как переход каждого элемента системы из одного состояния в другое не зависит от состояний остальных элементов. Затем достаточно просто отыскивается решение уравнений. Наконец, используя методы комбинаторного анализа, выписываются искомые характеристики: $P_{i_0, i_1, \dots, i_{2-1}}(t)$, $\mathcal{N}_i(t)$ $\mathcal{D}_i(t)$, $i \in E_{n}$.

Во всех задачах, предлагаемых в работе, переход любого элемента из одного состояния в другое происходит под влиянием некоторого пуассоновского потока событий, причем плотность этого потока не обязательно должна быть постоянной (она может любым образом зависеть от времени).

I.I. Вычисление показателей надежности ВС без учета времени переключения.

I.I.I. Пусть имеется ОВС [I], состоящая из N элементарных машин (ЭМ), каждая из которых может находиться в одном из двух состояний. (ЭМ может быть исправной или отказавшей.) Пусть время безотказной работы ЭМ является случайной величиной $\xi > 0$ с функцией распределения:

$$P\{\xi < t\} = F(t) = 1 - exp\{-\int_0^t \lambda(t) dt\}, \qquad (I)$$

где параметр $\lambda(t)$ - плотность потока отказов в момент времени t; $P\{\xi < t\}$ -вероятность события $\{\xi < t\}$. Время восстановления ЭМ является случайной величиной $\eta > 0$ с функцией распределения:

$$P\{\eta < t\} = Q(t) = 1 - exp\{-\int_0^t \mu(t) dt\}, \qquad (2)$$

где $\mu(t)$ - плотность потока восстановлений в момент t; $P\{\eta < t\}$ - вероятность события $\{\eta < t\}$.

Требуется рассчитать следующие показатели надежности:

$P_i(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в ОВС точно i ЭМ находятся в состоянии отказа;

$\mathcal{N}(t)$ - математическое ожидание числа исправных ЭМ в момент времени t;

$\mathcal{D}(t)$ - дисперсию этого числа.

Пусть в момент $t = 0$ в ОВС j ЭМ находятся в состоянии отказа, то есть $P_j(0) = I$, $j \in E_N$. Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что в момент времени t ЭМ находится в состоянии отказа.

Тогда уравнение Колмогорова для любой ЭМ будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\pi(t) = -[\lambda(t) + \mu(t)]\pi(t) + \lambda(t). \qquad (3)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, общее решение которого есть:

$$\pi(t) = exp\{-\int[\lambda(t)+\mu(t)]dt\} \cdot \{\tilde{C} + \int exp\{+\int[\lambda(t)+\mu(t)]dt\}\lambda(t)dt\} \qquad (4)$$

где $\tilde{C}$ - постоянная, которая находится из начальных условий. Пусть $\tilde{\pi}(t) = \pi(t, \tilde{C}_1)$, $\tilde{\tilde{\pi}}(t) = \pi(t, \tilde{C}_2)$, где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ - значения $\tilde{C}$, вычисленые из (4) при $\pi(0) = 0$ и $\pi(0) = I$, соответственно.

Пусть для момента времени t функция $\varphi(t)$ - вероятность того, что ЭМ находится в состоянии отказа при условии, что в начальный момент она исправна; $\theta(t)$ - вероятность того, что ЭМ находится в состоянии отказа при условии, что в начальный момент она находилась в состоянии отказа. Тогда

$$\varphi(t) = \tilde{\pi}(t), \quad \theta(t) = \tilde{\tilde{\pi}}(t). \qquad (5)$$

Формулы (5) характеризуют надежность одной ЭМ. Для получения показателей надежности системы предварительно решим следующую задачу комбинаторного анализа.

Рассмотрим генеральную совокупность [5], состоящую из N элементов, которая разделена на две группы. В первой группе находится j элементов, во второй $N - j$ элементов, $j \in E_N$. Из всей генеральной совокупности делаем случайную выборку объема i, $i \in E_N$. Попадание элемента в выборку ("успех") из первой или второй групп генеральной совокупности можно рассматривать как испытания Бернулли с вероятностями успехов γ - для первой группы и δ - для второй.

Предположим, что из первой группы было извлечено k элементов, тогда из второй - $(i - k)$ элементов. Ясно, что вероятность того, что k элементов привели к "успеху" в j испытаниях, имеет вид:

$$b(k, j, \gamma) = C_j^k \gamma^k (1 - \gamma)^{j-k}, \qquad (6)$$

где

$$C_j^k = j![k!(j-k)!]^{-1}. \qquad (7)$$

Вероятность того, что ($i-k$) элементов второй группы в $N-j$ испытаниях Бернулли привели к "успеху", запишется следующим образом:

$$b(i-k,\ N-j,\ \delta)=C_{N-j}^{i-k}\,\delta^{i-k}\,(1-\delta)^{N-j-i+k}. \qquad (8)$$

Наконец, вероятность того, что из всей генеральной совокупности было извлечено i элементов, будет иметь вид:

$$\tilde{A}_i=\sum_{k=0}^{i} b(k,j,\gamma)\cdot b(i-k,\ N-j,\delta). \qquad (9)$$

Так как все ЭМ функционируют стохастически независимо друг от друга, то можно отождествить элементарные машины с элементами генеральной совокупности, причем число исправных ЭМ в момент $t=0$ можно отнести к первой группе, а неисправных – ко второй. Для каждого фиксированного $t\in[0,\infty)$, полагая $\varphi(t)=\gamma$, $\theta(t)=\delta$, $P_i(t)=\tilde{A}_i$, получаем, с учетом (6)-(9), следующую формулу:

$$P_i(t)=\sum_{k=0}^{i} C_j^k C_{N-j}^{i-k}\cdot\theta(t)^k\left[1-\theta(t)\right]^{j-k}\cdot\varphi(t)^{i-k}\left[1-\varphi(t)\right]^{N-j-i+k}, \qquad (10)$$

где $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют (5).

Вычислим $\mathscr{X}(t)$. Для этого рассмотрим функцию:

$$F(z,t)=\left[1-\theta(t)+z\,\theta(t)\right]^{j}\cdot\left[1-\varphi(t)+z\,\varphi(t)\right]^{N-j}. \qquad (11)$$

Покажем, что $F(z,t)$ является производящей функцией [5] для $P_i(t)$. В самом деле, раскрывая (11) по степеням z, получаем, что коэффициентом при z^i является $P_i(t)$; с другой стороны, полагая $z=1$, получаем $F(1,t)=1$. Остальные свойства очевидны.

Так как $F(z,t)$ является производящей функцией для $P_i(t)$, то из [5] следует, что $\tilde{\mathscr{X}}(t)=F'_z(1,t)$, где $\tilde{\mathscr{X}}(t)$ – математическое ожидание числа отказавших ЭМ в момент времени t. Окончательно

$$\tilde{\mathscr{X}}(t)=j\,\theta(t)+(N-j)\,\varphi(t)$$

отсюда

$$\mathscr{X}(t)=N-\tilde{\mathscr{X}}(t)=j\left[1-\theta(t)\right]+(N-j)\left[1-\varphi(t)\right],$$

где $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют формулам (5).

Рассмотрим частный случай, когда в начальный момент времени все ЭМ исправны. Полагая в (10) $j=0$ и учитывая равенство

$$\sum_{k=0}^{i} C_j^k C_{N-j}^{i-k}=C_N^i,$$

получаем для $P_i(t)$ выражение

$$P_i(t)=C_N^i\,\theta(t)^i\left[1-\theta(t)\right]^{N-i}, \qquad (12)$$

которое, впрочем, легко получить и непосредственно, применяя методы комбинаторного анализа.

Очевидно, математическое ожидание $\mathscr{X}(t)$ и дисперсия $\mathscr{D}(t)$ в этом случае запишутся в виде:

$$\mathscr{X}(t)=N\left[1-\theta(t)\right],\quad \mathscr{D}(t)=N\theta(t)\left[1-\theta(t)\right].$$

СЛЕДСТВИЕ. Для нахождения координат вектор-функции готовности [2]

$$S_k(t)=\sum_{i=k}^{N} Q_k(t)$$

(где $Q_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t находятся в рабочем состоянии k ЭМ) можно пользоваться следующей формулой:

$$S_k(t)=k\,C_N^k\int_0^{\tau(t)} x^{k-1}(1-x)^{N-k}\,dx, \qquad (13)$$

где $\tau(t)=1-\theta(t)$, а $\theta(t)$ удовлетворяет формуле (5).

Для доказательства достаточно, учитывая, что $Q_k(t)=P_{N-k}(t)$, обе части (13) продифференцировать по t.

1.1.2. Для некоторых типов ЭМ [8,9] в результате статистической обработки была установлена справедливость гипотезы об экспоненциальных законах распределения времени безотказной работы и времени восстановления ЭМ.

В этом случае исходные данные задачи п.I.I.I, задаваемые формулами (I) и (2), запишутся следующим образом:

$$F(t) = 1 - \exp[-\lambda t], \quad Q(t) = 1 - \exp[-\mu t],$$

где λ и μ – соответственно интенсивности потока отказов в машине и восстановлений.

Тогда решение уравнения (3) будет иметь вид:

$$\varphi(t) = \tilde{\pi}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad \text{при} \quad \pi(0) = 0, \qquad (I4)$$

$$\theta(t) = \tilde{\pi}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1 + \frac{\mu}{\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \quad \text{при} \quad \pi(0) = 1. \qquad (I5)$$

Вероятности $P_i(t)$ вычисляются по формуле (I0), где $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют (I4), (I5), соответственно.

В случае, когда в начальный момент времени $t = 0$, все ЭМ исправны, то $P_i(t)$ и $\theta(t)$ вычисляются по формулам (I2), (I4).

Зависимость значений вероятностей $P_i(t)$, $i = 0,1,2,3$, от времени t для $\lambda = 0{,}01$ час$^{-1}$, $\mu = 0{,}1$ час$^{-1}$, $N = 10$ и различных j иллюстрирует рис.I. Для $i > 3$, $i \neq j$ значения $P_i(t)$ не превышают 10^{-3}. Для $i = j$ и $i > 3$ значения $P_i(t)$ не превышают 10^{-3} при $t > 6$. Из рисунка видно, что система достаточно быстро входит в стационарный режим функционирования ($P_i(t) = const$ при $t > 36$ час) даже в случае малонадежных ЭМ. Заметим, что для восстановления ЭМ, вышедших из строя, в этом случае достаточно взять два восстанавливающих устройства.

I.I.3. Пусть имеется ВС, состоящая из N различных вычислительных машин. Время безотказной работы машины i распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_i, время восстановления отказавшей ЭМ – аналогично с параметром μ_i. Требуется вычислить $F(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0,\infty)$ из N ЭМ k находятся в состоянии отказа.

Предположим для простоты, что в начальный момент времени $t = 0$ все ЭМ находятся в рабочем состоянии. Обозначим через $s_i(t)$ функцию готовности [8] машины i и положим

$$L_i(t) = 1 - s_i(t).$$

Аналогично (I5) для $s_i(t)$ имеем

$$s_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left[1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}\right].$$

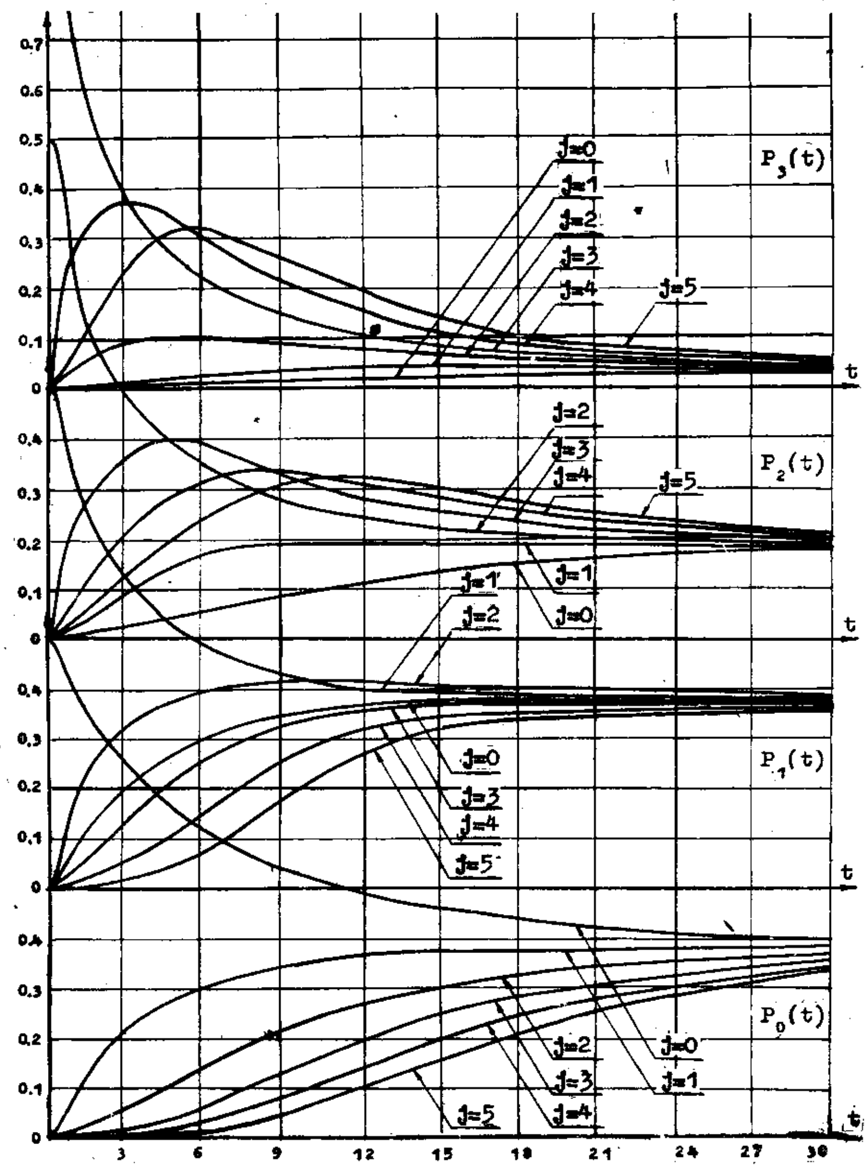

Рис.I. Зависимость значений вероятностей $P(t)$ от времени t без учета времени переключения

В силу статистической независимости функционирования ЭМ, используя методы комбинаторного анализа [5], можно найти выражения для $F_k(t)$, $k \in E_N$, которые имеют вид:

$$F_0(t) = \prod_{i=1}^{N} L_i(t),$$

$$F_k(t) = \sum_{i=1}^{\alpha} \prod_{j=0}^{k} s_{i_j}(t) L_{i_{N-j}}(t),$$

$$k \in E_N, \quad L_{i_0}(t) = s_{i_0}(t) = 1.$$

Здесь $\alpha = N!/k! \cdot (N-k)!$ – число перестановок из N элементов, у которых первые k членов отличаются хотя бы одним элементом i_j – j -й член в i -й перестановке.

I.2. Вычисление показателей надежности ОВС с учетом времени переключения.

Дополним задачу п.I.I.2 следующим условием. Предположим, что после восстановления ЭМ начинает переключаться. (Под переключением, например, можно понимать настройку программного обеспечения машины для работы в системе.) Время переключения подчинено экспоненциальному закону с параметром ν. После переключения продолжается нормальная работа ЭМ в системе. Требуется вычислить $P_{ij}(t)$ –вероятность того, что в момент t в ОВС i ЭМ находятся в состоянии отказа и j ЭМ переключается, $i\,j \in E_N$, $i+j \le N$.

Предположим для простоты, что в начальный момент все ЭМ были исправны. Обозначим через $q(t)$ вероятность того, что в момент t элементарная машина находится в состоянии отказа, $\ell(t)$ – вероятность того, что в момент t ЭМ находится в состоянии переключения, $s(t)$ – вероятность того, что в момент t ЭМ находится в рабочем состоянии.

Очевидно, $q(t) + \ell(t) + s(t) = 1$.

Дифференциальные уравнения, описывающие функционирование одной ЭМ в момент времени $t \in [0, \infty)$, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(t) &= -\mu q(t) + \lambda s(t), \\ \frac{d}{dt} s(t) &= -\lambda s(t) + \nu \ell(t). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Решив системы (I6) при начальных условиях $q(0) = \ell(0) = 0$, $s(0) = 1$, получим

$$s(t) = \frac{\mu\nu}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(\mu+\alpha_1)(\nu+\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)} e^{\alpha_1 t} - \frac{(\mu+\alpha_2)(\nu+\alpha_2)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)} e^{\alpha_2 t}, \qquad (17)$$

$$\ell(t) = \frac{\lambda\nu}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} + \frac{(\alpha_1+\nu)\lambda}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)} e^{\alpha_1 t} - \frac{(\alpha_2+\nu)\lambda}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)} e^{\alpha_2 t}, \qquad (18)$$

$$\ell(t) = 1 - s(t) - q(t), \qquad (19)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[-(\lambda+\mu+\nu) + \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2(\mu\lambda+\nu\lambda+\mu\nu)}\right], \qquad (20)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left[-(\lambda+\mu+\nu) - \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2(\mu\lambda+\nu\lambda+\mu\nu)}\right]. \qquad (21)$$

Для стационарного режима функционирования ЭМ получим:

$$s = \lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{\nu\lambda}{\mu\lambda+\nu\lambda+\mu\nu}, \qquad (22)$$

$$q = \lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{\mu\nu}{\mu\lambda+\nu\lambda+\mu\nu}, \qquad (23)$$

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \ell(t) = \frac{\mu\lambda}{\mu\lambda+\nu\lambda+\mu\nu}. \qquad (24)$$

Так как для каждого фиксированного момента времени $t \in [0, \infty)$ значения вероятностей $q(t)$, $s(t)$, $\ell(t)$ определены, то, применяя методы комбинаторного анализа для вероятностей $P_{ij}(t)$, получаем полиномиальное распредление [5]:

$$P_{ij}(t) = \frac{N!}{i!\,j!\,(N-i-j)!}\, q(t)^i \cdot \ell^j(t) \cdot s(t)^{N-i-j},$$

где $q(t), s(t), \ell(t)$ вычисляются по формулам (I7) – (2I). Для стационарного режима работы ОВС, учитывая (22)-(24), получаем:

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \frac{N!\,\mu^{i+j}\,\lambda^{N-i}\,\nu^{N-i}}{i!\,j!\,(N-i-j)!\,(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu)^N}.$$

Вероятности $P_i(t)$ с учетом времени переключения, очевидно, вычисляются по формуле

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^{N-i} P_{ij}(t).$$

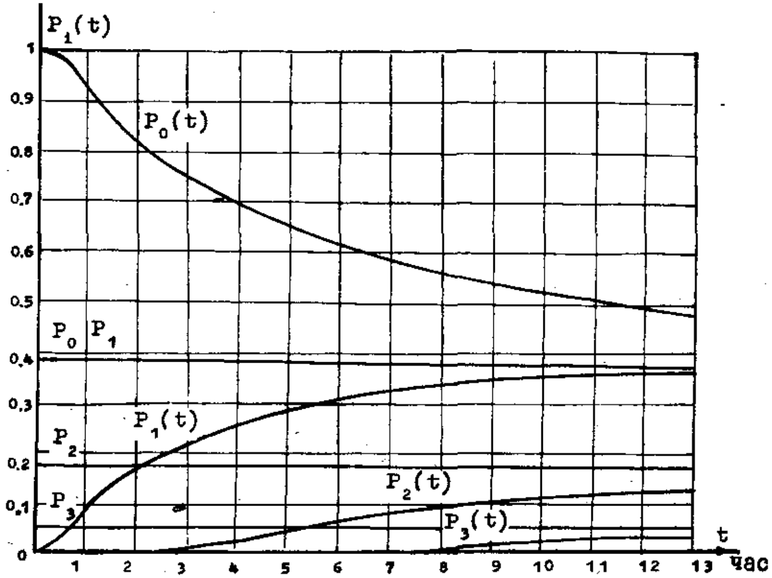

Рис. 2

Рис.2 иллюстрирует зависимость значений вероятностей $P_i(t)$, $i = \overline{0,3}$, от времени t для $\lambda = 0{,}0I$ час$^{-I}$, $\mu = 0{,}I$ час$^{-I}$, $\nu = I$ час$^{-1}$, $N = I0$ и условия, что в момент времени $t = 0$ в ОВС все ЭМ находились в исправном состоянии. Сравнивая кривые рис.I и 2 (для $j = 0$) легко заметить, что если $\lambda/\nu < I0^{-2}$, $\mu/\nu < I0^{-I}$, то влияние параметра ν мало сказывается на значении вероятностей $P_i(t)$. В нашем случае это различие не превышает 0,005 для любого $t \in [0,\infty)$.

§ 2. Решение задачи надежности функционирования ОВС методом теории массового обслуживания

2.I. Рассмотрим задачу п. I.I.2. Для ее решения обычно составляется следующая система дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{d}{dt}P_i(t) = -[(N-i)\lambda + i\mu]P_i(t) + (N-i+1)\lambda P_{i-1}(t) + (i+1)P_{i+1}(t)\mu, \tag{25}$$

$$P_{-1}(t) = P_{N+1}(t) \equiv 0, \quad i \in E_N,$$

с начальными условиями

$$P_i(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \ i,j \in E_N, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{26}$$

Введем производящую функцию [5]:

$$P(z,t) = \sum_{i=0}^{N} z^i P_i(t), \tag{27}$$

из которой $P_i(t)$ находится следующим образом:

$$P_i(t) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial z^i} P(z,t)\Big|_{z=0} \tag{28}$$

Используя (27), систему (25) можно свести к следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial}{\partial z}P(z,t) = N\lambda(z-1)P(z,t). \tag{29}$$

При начальных условиях (26) решение (29) записывается в виде

$$P(z,t) = (\lambda z + \mu)^{-N}\cdot[\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} + \lambda z(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})]^{N-i} \times$$

$$\times [\mu(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) + z(\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t})]^i .$$

Учитывая (28), для $P_i(t)$ получаем формулу (I0).

2.2. Обычным методом [I0] для вероятностей $P_{ij}(t)$ п.I.2 составляется система уравнений

$$\frac{d}{dt}P_{i0}(t) = -[(N-i)\lambda + i\mu]P_{i0}(t) + \lambda(N-i+1)P_{i-1,0}(t) + \nu P_{i1}(t),$$

$$\frac{d}{dt} P_{0j}(t) = -\left[j\nu + (N-j)\mu\right] P_{0j}(t) + \mu P_{1,j-1}(t) + (j+1)\nu P_{0,j+1}(t),$$

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = -\left[j\mu + (N-i-j)\lambda + j\nu\right] P_{ij}(t) + (N-i-j+1)\lambda P_{i-1,j}(t) +$$
$$+ (i+1)\mu P_{i+1,j-1}(t) + (j+1)\nu P_{i-1,j}(t),$$

$$\frac{d}{dt} P_{i,N-i}(t) = -\left[i\mu + (N-i)\nu\right] P_{i,N-1}(t) + \lambda P_{i-1,N-i}(t) +$$
$$+ (i+1)\mu P_{i+1,N-i-1}(t),$$

$P_{ij}(t) = 0$, если $(i+j) > N$ или $i,j < 0$, $i,j \in E_N$.

Для ее решения введем производящую функцию

$$P(x,z,t) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-i} x^i z^j P_{ij}(t), \qquad (30)$$

из которой значения $P_{ij}(t)$ определяются следующим образом:

$$P_{ij}(t) = \frac{1}{i!\,j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} P(x,z,t).$$

Используя (30), систему уравнений приведем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,z,t) + \left[\lambda z^2 + (\mu-\lambda)z - \mu x\right] \frac{\partial}{\partial x} P(x,z,t) +$$
$$+ \left[\lambda z x + (\nu-\lambda)x - \nu\right] \frac{\partial}{\partial z} P(x,z,t) = N\lambda(z-1)P(x,z,t). \qquad (31)$$

Решение для (31) проще всего найти приближенными методами, так как при решении методом Лагранжа приходится искать интегрирующий множитель.

Зададим начальные условия:

$$P_{ij}(0) = 1, \quad P_{k\ell}(0) = 0, \quad k,\ell \in E_N, \quad k \neq i, \quad \ell \neq j.$$

Очевидно, что

$$P(0,0,t) = 1, \quad P(x,z,0) = x^i z^j.$$

Тогда решением (31) является

$$P(x,z,t) = (A_{11} + A_{21}x + A_{31}z)^i \times (A_{12} + A_{22}x + A_{32}z)^j \times (A_{13} + xA_{23} + zA_{33})^{N-i-j}, \qquad (32)$$

где
$$A_{11} = \frac{\mu\nu}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{\mu(\mu+\alpha_1)}{\lambda\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}\left[\lambda\nu + (\mu+\alpha_2)(\lambda+\nu)\right]e^{\alpha_1 t} -$$
$$- \frac{\mu(\mu+\alpha_2)}{\lambda\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}\left[\lambda\nu + (\mu+\alpha_1)(\lambda+\nu)\right]e^{\alpha_2 t},$$

$$A_{21} = \frac{\lambda\nu}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{\mu\left[(\mu+\alpha_2)(\lambda+\nu)+\lambda\nu\right]}{\alpha_1\alpha_2}e^{\alpha_1 t} - \frac{\mu}{\alpha_1\alpha_2}\left[\lambda\nu + (\mu+\alpha_1)(\lambda+\nu)\right]e^{\alpha_2 t},$$

$$A_{31} = 1 - A_{11} - A_{21},$$

$$A_{12} = \frac{\mu\nu}{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\nu(\mu+\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \frac{\nu(\mu+\alpha_2)}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}e^{\alpha_2 t},$$

$$A_{22} = \frac{\lambda\nu}{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\lambda\nu}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \frac{\lambda\nu}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}e^{\alpha_2 t},$$

$$A_{32} = 1 - A_{12} - A_{22},$$
$$A_{13} = s(t),$$
$$A_{23} = r(t),$$
$$A_{33} = \ell(t),$$

где α_1, α_2 вычисляются по формулам (20-21).

Таким образом, для решения задач, рассмотренных в работе, используются два подхода. Первый подход описан в §1, второй – традиционный, основанный на применении метода теории массового обслуживания, – в §2. Аналитическое решение систем дифференциальных уравнений §2 удалось получить в явном виде лишь для случая постоянных параметров, число которых не более трех. Тем не менее оно представляет самостоятельный интерес, так как получено впервые. В §1 рассмотрены задачи в более общей постановке с учетом зависимости параметров от времени, произвольного числа состояний, в которых может находиться каждый элемент системы и др. Решение задач § 2 методом теории массового обслуживания оказывается затруднительным по следующим соображениям. Во-первых, возникают трудности методологического характера (например, применение метода для решения системы дифференциальных уравнений, поиск интегрирующего множителя). Во-вторых, если решение находится приближенно, то число уравнений возрастает как N^{k-1}. С другой стороны, используя метод, предложенный в работе, достаточно решить систему из k уравнений.

Эти замечания позволяют надеяться, что применение метода, изложенного здесь, окажется более эффективным для исследуемого класса задач, нежели использование обычного метода теории массового обслуживания. Данный метод может найти достаточно широкое применение при исследовании больших систем. Для иллюстрации рассмотрим следующие задачи.

I. Пусть имеется ВС, состоящая из N различных машин типа ЕС ЭВМ [3]. Предположим, что каждая машина выходит из строя и восстанавливается в случайные моменты времени t. Время работы любой машины и время восстановления подчинены экспоненциальному закону с параметрами λ_i, μ_i для i-й машины, $i \in E_N / E_0$. Требуется вычислить показатели надежности.

Показатели надежности определяются по формулам п.I.I.3.

2. Имеется ОВС, состоящая из N_k ЭМ. Система разделена на группы, по m_i ЭМ в каждой группе, $\sum\limits_i m_i = N$, $k \in E_N / E_0$. Надежность r-ой группы характеризуется параметрами λ_i, μ_i с экспоненциальным законом распределения. Ясно, что показатели надежности можно вычислить по формулам п.I.I.3.

В заключение считаю необходимым поблагодарить Лукину Е.П. за работу, проделанную при получении числовых результатов.

Литература

I. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.

2. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Живучие однородные универсальные вычислительные системы.-В кн.: Вычислительные системы. Вып.34. Новосибирск, 1969, стр. 71-88.

3. Единая система электронно-вычислительных машин (проспект). М., 1972.

4. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЕВ А.Д. Математические методы в теории надежности.-М., "Наука", 1965.

5. ФЕЛЛЕР В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.I. М., "Мир", 1967.

6. ОВЧАРОВ Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания, М., "Просвещение", 1969.

7. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. Исследование операций. М., "Сов.радио", 1972.

8. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Некоторые вопросы надежности однородных универсальных вычислительных систем. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 23. Новосибирск, 1966, стр. 69-89.

9. ХОРОШЕВСКАЯ Э.Г. Функции готовности распределенных однородных вычислительных систем. Отчет ИМ СО АН СССР, 1974.

I0. СААТИ Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М., "Сов.радио", 1971.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 ноября 1973 года

П р о г р а м м а

для вычисления показателей надежности в переходном режиме функционирования ОВС (п.I.I.I) без учета времени переключения при произвольных начальных условиях.

Задаются следующие величины:

N – число ЭМ в ОВС;

λ – интенсивность отказов ЭМ;

μ – интенсивность восстановления ЭМ;

t1,t2 – соответственно начало и конец цикла по времени $t \in [t_1, t_2]$;

dt – шаг внутри временного цикла;

j1,j2 – соответственно минимальное и максимальное число неисправных ЭМ в начальный момент;

dj – шаг внутри цикла (j_1, j_2).

На печать выдаются значения вероятностей:

$P_i(t)=Q[i,t]$, $i \in \overline{0,N}$, $t \in [t_1, t_2]$.

```
    begin integer i,is,j,j1,j2,dj,t,t1,t2,dt,k,l,N;
    real λ ,μ , E,F,H,P,S,Q ,V,M,M1,C1,C2;
    begin array Q[1:N]; V:=λ + μ; for t:=t1 step dt until t2
    do begin E:=exp(-V x t); P:=(-E x λ + μ)/V; for j:=j1
    step dj until j2 do begin Q0:=(F↑j) x (P↑(N-j)); M1:=0;
    for i:=1 step 1 until N do begin is:=i; if i >j  then
    is:=j; if is >(N-j) then is:=N-j; M:=0; for k:=0 step  1
    until is do begin C1:=C2:=1; for l:=1 step 1 until k do
    C1:=C1 x H x (j-k+1)/l; if (N-j-i+k)<0 then goto R; for
    l:=1 step 1 until (N-j-i+k) do C2:=(i-k+l) x C2 x P/l;
    goto R1;
R:  C2:=0;
R1: M:=M+C1 x (F↑(j-k)) x C2 x (S↑ (i-k)) end Q i :=M;
    M1:=M1+Q[i ] end end end end end .
```


П р о г р а м м а

для вычисления показателей надежности в переходном режиме функционирования ОВС (п.I.2) с учетом времени переключения

Вводятся следующие величины:

N – число ЭМ в ОВС;

N1 – число членов массива $Q_i(t)$ (при t фиксированном) отличных от "машинного нуля";

t1,t2 – соответственно начало и конец цикла по времени t ;

dt – шаг внутри временного цикла;

λ – интенсивность выхода ЭМ из строя;

μ – интенсивность восстановления;

ν – интенсивность переключения.

На печать выдаются:

текущий момент времени t и массив Q[i] – вероятностей для этого момента; контрольная сумма:

$$S1 = \sum_{i=0}^{N} Q_i(t) = 1 .$$

```
begin integer F,A,i,j,k,N,N1,t,t1,t2,dt; real λ , μ , ν ,A1,
A2,A3,S,S1,S2,B1,B2,E1,E2,C1,C2,P; real (N,N1,t1,t2,dt, λ ,
μ , ν ); begin array Q[0:N1]; S:= sgrt(( λ x μ  + λ x ν  +
μ x ν ) x (-2) + λ↑2 + μ↑2 + ν↑2); B1:= (λ + μ + ν +S)
/(-2); for t:=t1 step dt until t2 do begin E1:=exp(B1 x t)/
((B2-B1) x B1); E2:=exp(B2 x t)/((B2-B1) x B2); S1:=0; A1:=
μ x ν /B1/B2-( μ +B1) x ( ν +B1) x E1 +( μ +B2) x ( ν +B2)
x E2; A2:= λ x ν /b1/b2 - ( ν +b1) x λ x E1 + ( ν +b2) x λ x
E2; A3:=1-A1-A2;  for i:=0 step 1 until N1  do Q[i]:=0; P:=
A1 N; S1:=S1+P; P:=A3↑N; S1:=S1+P; P:=1; i:=j:=0;for j:=j+1
while P >0 do begin C1:=1; if N <2 x j then begin  F:= N-j;
A:=j; C2:=A3 ↑(2 x j - N) end else begin F:=j; A:=N-j; C2:=
A1 ↑(N-2 x j) end for k:=1 step 1 until F do C1:=(A+k) x A1
x C1 x A3/k; P:=C1 x C2; S1:=S1+P end; Q[0]:=S1; for  i:= 1
step 1 until N do begin S2:=0; for j:=0 step 1 until N-1 do
```

```
begin C1:=C2:=1;  for k:=1 step 1 until j do C1:=(i+k) x C1
x A3/k; for k:=1 step 1 until N-i-j do C2:=(i+j+k) x C2 x
A1/k; P:=C1 x C2 x A2↑ i; S2:=S2+P end; Q[i]:=S2; S1:=S1+
Q[i]  end print (t,Q,S1) end end end *
```