УДК 681.142.36

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

А.С. Омельченко, Т.А. Ракчеева

Существует много практических задач, в которых используются гладкие непрерывные изменения формы поверхности предметов. Примером может служить криминалистическая задача автоматического опознавания человека по его портретному снимку, невзирая на возможные его мимические изменения, или задача дизайнерского конструирования кузовов легковых автомобилей. Решение таких задач естественно возложить на электронно-вычислительную технику. Это выдвигает задачу построения математического описания для основной операции в решении этих задач-непрерывной деформации поверхности пространственного объекта.

Деформации, претерпеваемые поверхностями в практических задачах, могут быть произвольно сложными, криволинейными, но вместе с тем непрерывными и гладкими. Математической моделью таких деформаций должны быть, очевидно, произвольные нелинейные преобразования пространства. Необходимо, чтобы эти преобразования были топологическими и гладкими: их применение не должно сопровождаться появлением разрывов, изломов и т.д. От искомых преобразований, кроме того, требуется возможность достижения необходимой точности количественного описания моделируемых деформаций.

Задача, таким образом, состоит в построении аппроксимационного аппарата в виде непрерывных гладких нелинейных преобразований пространства. Ознакомимся сначала с тем, что уже сделано в этом направлении.

Вопрос об использовании преобразований как инструмента аппроксимации обсуждался, насколько известно, главным образом, в некоторых работах по опознаванию образов [1,2]. Что касается преобразований как самостоятельного объекта математического исследования, то их изучение является одним из основных направлений современной математики. В некоторых областях прикладной математики (именно, математической физики) также можно встретить, правда в неявном виде, аппарат, который допускает толкование в терминах преобразований.

Напомним кратко основные сведения об исследованиях перечисленных направлений. В упоминавшихся работах [1,2] для решения важных практических задач использовались группы Ли преобразований плоскости. Можно надеяться, что группы Ли окажутся полезными и в трехмерном случае. Естественно поэтому начать рассмотрение абстрактно-математических методов с групп Ли. Как и для плоскости, существует полный перечень возможных групп в пространстве [3,4]. В пространствах размерности больше единицы группы делятся на примитивные и импримитивные. С увеличением размерности пространства число групп быстро увеличивается. Так, например, количество примитивных групп на плоскости – три, а в пространстве их уже восемь. Группы можно упорядочить по разным признакам. Один из таких признаков – степень транзитивности группы – может в известной степени характеризовать гибкость интересующего нас нелинейного преобразования. Как известно, под степенью P транзитивности группы понимается её способность переводить любые P точек пространства в произвольно заданные положения. Примерами примитивных групп в пространстве могут служить аффинная (1) и проективная (2) группы:

$$t'_i = a_{i1} t_1 + a_{i2} t_2 + a_{i3} t + a_{i4} ; \qquad (1)$$

$$t'_i = \frac{a_{i1} t_1 + a_{i2} t_2 + a_{i3} t_3 + a_{i4}}{a_{50} t_1 + a_{60} t_2 + a_{70} t_3 + 1} ; \quad i = 1,2,3. \qquad (2)$$

Здесь и далее t_1, t_2, t_3 – координаты точки до преобразования; t'_1, t'_2, t'_3 – после преобразования; a_{ij} – параметры преобразования.

Среди всех примитивных групп проективная осуществляет наиболее сложное преобразование. Остальные примитивные группы представляют собой частные случаи проективной. Преобразования примитивных групп в некотором смысле изотропны; эта изотропность проявляется в симметрии уравнений относительно преобразуемых переменных t_i. Группа (2) обладает наибольшей среди трехмерных примитивных групп степенью транзитивности, равной 5(ср.с $\rho_{max}=4$ для плоскости). Таким образом, значительное увеличение числа примитивных групп при переходе от двухмерного к трехмерному случаю не приводит к сколько-нибудь заметному увеличению "гибкости" осуществляемых ими преобразований и проявляется, главным образом, в увеличении количества мало интересных подгрупп. Помимо перечисленных свойств, в (I) и (2) можно усмотреть ещё одну особенность примитивных групп: прямые линии переводятся преобразованиями этих групп в прямые же. Указанное свойство в большой степени ограничивает применимость примитивных групп в решении прикладных задач.

В отличие от примитивных групп, импримитивные позволяют осуществить наряду с линейными, и некоторые нелинейные преобразования, например:

$$t_1' = \frac{a_3 + \alpha_2 t_1}{1 - \alpha_1 t_1},$$

$$t_2' = \frac{a_4 t_2 + \alpha_5 + \alpha_6 t_1 + \alpha_7 t_1^2 + \ldots + \alpha_r t_1^{r-5}}{(1 - \alpha_1 t_1)^{r-5}}. \qquad (3)$$

Число свободных параметров r в группах, сходных с (3), может быть произвольно большим. Однако эти степени свободы существенно неравномерно распределены между координатами, что можно усмотреть и из уравнения (3) (своеобразный эффект анизотропности). Создаваемое импримитивностью ограничение на произвольность нелинейных преобразований является вместе с тем эффектом, обеспечивающим сохранение топологии преобразуемого пространства при всех преобразованиях таких групп. Другим проявлением импримитивности является невозможность получения (для плоского случая) степени транзитивности, большей 3.

Таким образом, с помощью импримитивных групп, как и с помощью примитивных, задача описания произвольного нелинейного преобразования пространства не решается. В ряде работ выходом

из положения служила кусочная аппроксимация на базе групповых уравнений [I]. Этот прием, однако, сопровождается нарушением гладкости аппроксимации, являющейся, как было отмечено, для некоторых задач одним из основных требований.

Напомним и о некоторых видах групповых преобразований. Такие преобразования, насколько известно, мало освещены в литературе. Судя по имеющимся данным, их возможности в смысле описания произвольных преобразований пространства весьма узки. Действительно, преобразования, сохраняющие топологию пространства, либо не превосходят по своим возможностям примитивные группы (например, бирациональные, переводящие прямые в прямые же), либо действуют весьма анизотропно, подобно импримитивным группам (треугольные преобразования).

Сохраняют топологию преобразуемой области и конформные отображения. Однако их характерной особенностью является свойство сохранять углы в пересечениях произвольных кривых внутри отображаемой области. С точки зрения описания произвольных преобразований плоскости указанное свойство следует рассматривать как серьёзное ограничение. Поэтому, несмотря на сравнительную разработанность практических аспектов применения аппарата конформных отображений, он не может обеспечить решения интересующей нас задачи.

Среди перечисленных абстрактно-математических методов нет, как видим, ни одного, с помощью которого можно было бы решить интересующую нас задачу. Посмотрим теперь, какие возможности в этом отношении содержатся в некоторых областях прикладной математики, в частности в граничных задачах математической физики.

В качестве примера граничной задачи можно привести задачу Дирихле, в которой требуется найти функцию (в общем случае n-мерную), удовлетворяющую внутри области $\mathcal{D}$ уравнению Лапласа (Пуассона):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} = \rho(t),$$

непрерывную внутри замкнутой области, включая границу S, и принимающую на границе заданные значения: $u/S = \varphi(t)$. Решение уравнений, входящих в такие задачи, легко интерпретировать как некоторое преобразование. Например, разыскиваемое в теории упругости смещение точек тела есть не что иное, как непрерывное преобразование некоторой, ограниченной поверхностью тела области трехмерного пространства. Методы решения таких уравнений существенно используют понятие фундаментального решения $- V(t, t^1)$. $V(t, t^1)$ интерпретируется как функция влияния сосредоточенного в точке t^1 источника на данную физическую среду в любой другой точке. В простейших случаях $V(t, t^1)$ является одновременно и решением задачи. В более сложных случаях $V(t, t^1)$ служит основой для построения таких методов математической физики, как теория потенциала, функции Грина, теория "комплексных потенциалов" и т.д. [5]. Отметим, что фундаментальное решение как в простых, так и в самых общих случаях (например, главное фундаментальное решение, определяемое оценками $V(t, t^1) = O(e^{-\alpha\tau})$; $\dfrac{\partial V}{\partial t_i} = O(e^{-\alpha\tau})$), описывает эффект убывания влияния некоторого воздействия по мере удаления от места его приложения. С другой стороны, изучение преобразований, возникающих в прикладных задачах, позволяет интерпретировать их как результат влияния на некоторую среду ряда источников воздействий, причем, как и в задачах математической физики, влияние каждого источника по мере удаления от места его приложения убывает.

В связи с этим аппарат математической физики, в принципе, можно было бы положить в основу интересующего нас метода описания преобразований. Практически, однако, решение средствами математической физики оказывается возможным лишь в частных случаях с весьма простыми свойствами среды и системы внешних воздействий.

Из приведенных кратких сведений видно, что и в прикладной математике нет метода, который обеспечивал бы полное решение интересующей нас задачи. В связи с этим естественно попытаться сконструировать комбинированный аппроксимационный аппарат, по возможности имитирующий полезные особенности обоих обсуждаемых подходов и обеспечивающий удовлетворительное решение задачи.

Проиллюстрируем конструирование такого аппарата на базе одной из прикладных задач, состоящей в реконструкции с помощью ЭВМ поверхности человеческого лица и моделировании его мимических и иных изменений. С физической точки зрения эту си-

туацию можно свести к изучению взаимодействия между костным скелетом и кожным покровом. Модель [6] предполагает каркас из конечного количества жестких, шарнирно соединенных элементов и натянутой на него эластичной оболочки. Последняя прикреплена к каркасу в конечном количестве точек прикрепления (т.п.), и деформации оболочки происходят вследствие воздействия на нее через т.п. взаимных перемещений элементов каркаса. Влияние движения т.п. на перемещение некоторой другой точки кожи по аналогии с задачами математической физики будем считать убывающей (весовой) функцией от расстояния между ними. Насколько известно, это условие находится в согласии с биофизическими данными о свойствах кожи. Близко расположенные точки прикрепления могут двигаться согласованно, образуя систему точек прикрепления. Движение системы точек прикрепления часто удается описать уравнениями одной из групп Ли. Обе компоненты конструируемой аппроксимации, групповое движение и эффект убывания, равно как и наличие более чем одного источника воздействия можно учесть в следующей символической записи ("взвешенно-групповой"):

$$\begin{aligned} \tilde{t}' = \Phi \{ & F_1 [G_1(t; a_1^1, \dots, a_{r_1}^1); \varphi_1(t; t^1; b_1^1, \dots, b_{\ell_1}^1)], \dots \\ & F_i [G_i(t; a_1^i, \dots, a_{r_i}^i); \varphi_i(t; t^i; b_1^i, \dots, b_{\ell_i}^i)], \dots \\ & F_m [G_m(t; a_1^m, \dots, a_{r_m}^m); \varphi_m(t; t^m, b_1^m, \dots, b_{\ell_m}^m)] \}; \\ & t, \tilde{t}' \in T . \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь T – пространство преобразуемых переменных (трехмерное пространство, плоскость); $t \equiv t_1, t_2, t_3$ и $\tilde{t}' \equiv \tilde{t}_1', \tilde{t}_2', \tilde{t}_3'$ – координаты некоторой точки пространства T соответственно до и после преобразования; G_i – группа Ли, описывающая движение i-й системы точек прикрепления; $a_1^i, \dots, a_{r_i}^i$ – параметры этой группы; m – количество систем точек прикрепления. Остальные обозначения таковы: $\varphi_i = (t; t^i; b_1^i, \dots, b_{\ell_i}^i)$ – весовая функция, относящаяся к i-й системе точек прикрепления (она имеет вид унимодального распределения со значением моды, равным I, и с монотонным убыванием до нуля по мере удаления от медианы), $t^i \equiv t_1^i$, t_2^i, t_3^i – координаты максимума; $b_1^i, \dots, b_{\ell_i}^i$ – параметры, определяющие форму и скорость убывания; $F_i[\quad]$ описывает влияние весовой функции на групповые перемещения точек из ,например,следующим образом:

$$t+\varphi_i(t;t^i;b_1^i,\dots,b_{l_i}^i)[G_i(t;a_1^i,\dots,a_{r_i}^i)-t]$$

Очевидно, при $\varphi=1$ точка перемещается по чисто Ли-групповому закону,а при $\varphi=0$ остается неподвижной. Через Φ обозначена операция, с помощью которых совокупность парциальных воздействий порождает результирующее перемещение точки. Практически в качестве Φ использовалась линейная комбинация воздействий.

Центральным вопросом в выборе явного вида функций φ, F и Φ является вопрос о сохранении отображением (4) топологии преобразуемого пространства T. Удается сформулировать и доказать теорему существования (являющуюся расширением классической теоремы о неявных функциях), утверждающую, что при ряде достаточно общих ограничений на функции (4) всегда существует такая совокупность значений их параметров и такая область в T,отображение которой при этих и близких к ним значениях параметров является топологическим. Таким образом, при достаточно произвольном выборе функций φ, F и Φ формулы (4) описывают при надлежащем выборе интервалов значений параметров непрерывное и обратимое преобразование T. С другой стороны, m в формуле (4) может увеличиваться неограниченно; тем самым (4) может рассматриваться как разложение аппроксимирующего преобразования в ряд по непрерывным функциям F_i с произвольным выбором их вклада. Таким образом, формула (4) обладает свойствами аппроксимационной формулы. Рассмотрим ряд примеров.

На рис. I показан модельный пример, иллюстрирующий влияние взвешенно-группового преобразования на плоскость. Групповое движение описывается здесь аффинной группой; весовая функция имеет вид $e^{-(t_1^2+t_2^2)}$. Рис. 2-3 иллюстрируют аппроксимацию преобразования сплошной кривой(рис. 2)в пунктирную (изолинии в одной из практических задач). Для сравнения на рис.4 приведена кусочно-групповая [I] аппроксимация того же преобразования. На рис.2-4 перенумерованы соответственные точки кривых.

Иллюстрацией применения взвешенно-групповых преобразований в трехмерном случае может служить задача реконструкции поверхности человеческого лица по черепу. Здесь преобразования применяются для имитации индивидуальных мимических, болезненных и возрастных деформаций этой поверхности. На рис. 5 и 6 приведен пример простейшей деформации, сводящейся к появлению "флюса".

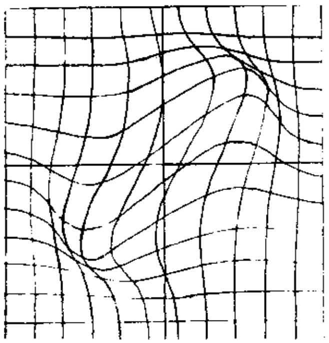

Рис. I

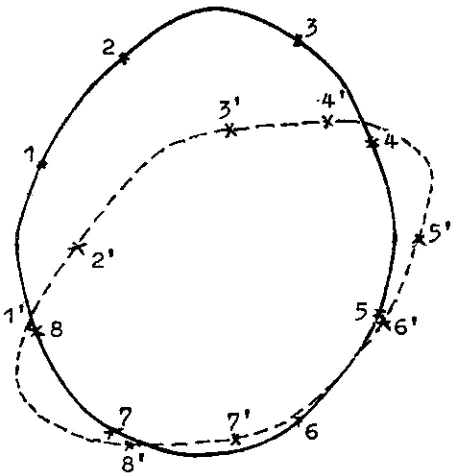

Рис. 2

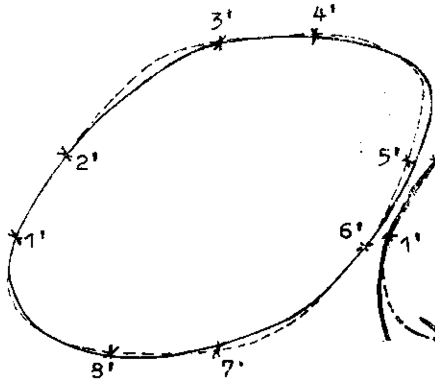

Рис. 3

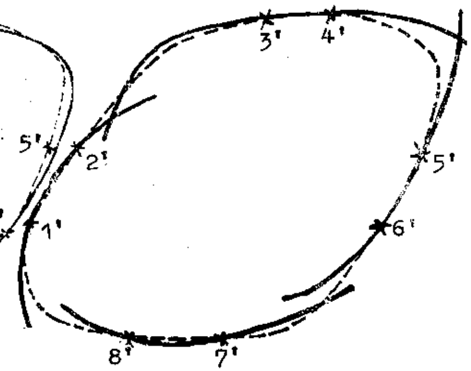

Рис. 4

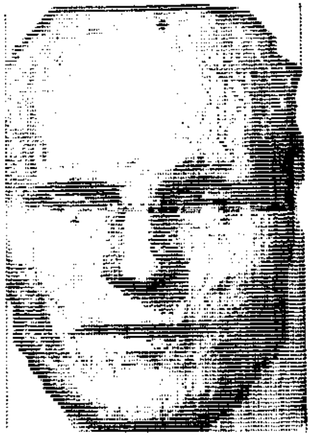

Рис. 5

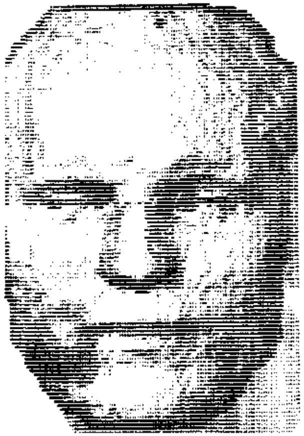

Рис. 6

Все операции, относящиеся к приведенным примерам, выполнены на ЭВМ автоматическими программами.

Как видно из вышеизложенного, взвешенно-групповой аппроксимационный аппарат позволяет решать практические задачи, сводимые к аппроксимации гладких преобразований пространства, и тем самым заполняет известный пробел в арсенале потребляемых практикой математических средств.

Литература

1. ФАЙН В.С. Опознавание изображений. М., "Наука", 1970.
2. HOFFMAN W.C. The Lie algebra of visual perception. - "J.Math.Psychol.",1966, N 3,p.15.
3. ЧЕБОТАРЕВ Н.Г. Теория групп ЛИ.М.,Гостехтеориздат,1940.
4. CAMPBELL I.E. Introductory treatise on Lie theory of finite continuous transformation of groups. Oxford,1903.
5. МУСХЕЛИШВИЛИ Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.
6. ФАЙН В.С., ОМЕЛЬЧЕНКО А.С. О гладкой аппроксимации непрерывных преобразований изображений. -В сб. "Вопросы разработки автоматизированных систем научно-технической информации". Изд. ВИНИТИ, 1972.
7. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, М., "Наука", 1966.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 июня 1973 года