

УДК 681.142.019.3

ФУНКЦИИ ГОТОВНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.Г. Хорошевская

Выводятся расчетные формулы для функций готовности распределенных и сосредоточенных однородных вычислительных систем (ОВС). Оценивается надежность первой экспериментальной распределенной системы, построенной на базе машин "Минск-32". Приведена АЛГОЛ-программа.

1. Распределенной системой будем называть совокупность сосредоточенных ОВС [1], соединенных "длинными" регулярными программно-коммутируемыми каналами связи. На рис.1 показана функциональная структура одномерной распределенной ОВС ($COBC_h$ - h -я сосредоточенная ОВС; SU_h - h -е системное устройство).

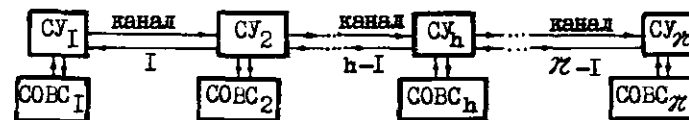


Рис. 1

Ясно, что при исследовании надежности распределенной ОВС следует учитывать, что каналы связи и системные устройства не абсолютно надежны.

2. В качестве показателя, характеризующего эффективность функционирования распределенной ОВС, будем использовать функции готовности

$$S^*(t) = P \{ \Omega(t) = \Omega^* \},$$

являющуюся вероятностью того, что в момент времени t производительность $\Omega(t)$ распределенной ОВС равна заданной Ω^* . Рассчитаем функцию готовности одномерной распределенной ОВС (рис.1) при условии, что её производительность в любой момент времени равна суммарной производительности всех сосредоточенных ОВС. Справедливость такого условия подтверждена экспериментально при реализации параллельных программ сложных задач и для распределенных ОВС, образованных из машин, удаленных на тысячи километров.

Очевидно, что

$$S^*(t) = \prod_{h=1}^{\pi} S_h(t) \cdot \sigma_h(t) \cdot \prod_{h=1}^{\pi-1} s_h(t),$$

где $s_h(t)$ — функция готовности h -го канала связи; $\sigma_h(t)$ — функция готовности h -го системного устройства; $S_h(t)$ — функция готовности h -й сосредоточенной ОВС. Значения $s_h(t)$ ($h=1, \dots, \pi-1$) зависят от вида каналов связи: проводные или радиорелейные, коммутируемые или некоммутируемые [2] и т.д. Величина $\sigma_h(t)$ зависит от сложности системного устройства, которая, в свою очередь определяется видом каналов связи и сложностью сосредоточенной ОВС.

3. Выведем расчетные формулы для функции готовности сосредоточенной ОВС. Будем считать, что сосредоточенная ОВС состоит из N элементарных машин (ЭМ). Систему обслуживают m восстанавливающих устройств. Время безотказной работы ЭМ и время восстановления отказавшей ЭМ распределены по экспоненциальным законам с параметрами λ и μ соответственно. Обозначим $P_i(t)$ вероятность того, что в момент t в сосредоточенной ОВС имеется i исправных ЭМ.

Используя известные методы [3], легко получить для рассматриваемой сосредоточенной ОВС следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_0'(t) &= -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t), \\ P_i'(t) &= m\mu P_{i-1}(t) - (i\lambda + m\mu)P_i(t) + (i+1)\lambda P_{i+1}(t), \quad 0 \leq i \leq N-m, \\ P_i'(t) &= [N-(i-1)]\mu P_{i-1}(t) - [i\lambda + (N-i)\mu]P_i(t) + (i+1)\lambda P_{i+1}(t), \quad N-m < i < N, \\ P_N'(t) &= \mu P_{N-1}(t) - N\lambda P_N(t). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Решим её при начальных условиях:

$$P_i(0) = 0, \quad i \neq j, \quad P_j(0) = 1; \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

Умножим каждое уравнение (I) на e^{-st} и проинтегрируем его по t от 0 до ∞ . Применяя преобразование Лапласа

$$a_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_i(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

получим алгебраическую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0^j &= (s+m\mu)\alpha_0(s) - \lambda\alpha_1(s), \\ \delta_i^j &= \begin{cases} -m\mu\alpha_{i-1}(s) + (s+i\lambda+m\mu)\alpha_i(s) - (i+1)\lambda\alpha_{i+1}(s), & 0 \leq i \leq N-m, \\ -[N-(i-1)]\mu\alpha_{i-1}(s) + [s+i\lambda+(N-i)\mu]\alpha_i(s) - (i+1)\lambda\alpha_{i+1}(s), & N-m < i < N, \end{cases} \\ \delta_N^j &= -\mu\alpha_{N-1}(s) + (s+N\lambda)\alpha_N(s), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{где } \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Решая (2) по правилу Крамера, найдем

$$\alpha_i(s) = \begin{cases} \frac{\Delta_j(s) \cdot \mathcal{D}_{N-i}(s) \cdot \mu^{i-j} \cdot \delta_i^j}{\Delta_{N+1}(s)} = \frac{\tilde{\Delta}_i(s)}{\Delta_{N+1}(s)}, & \text{если } j < i, \\ \frac{\Delta_i(s) \cdot \mathcal{D}_{N-j}(s) \cdot \lambda^{j-i} \cdot j!}{i! \Delta_{N+1}(s)} = \frac{\tilde{\Delta}_i(s)}{\Delta_{N+1}(s)}, & \text{если } j \geq i. \end{cases}$$

Здесь $\Delta_{N+1}(s)$ — определитель системы (2); $\Delta_j(s)$, $\Delta_i(s)$ — определители, составленные из первых соответственно j и i строк и столбцов определителя $\Delta_{N+1}(s)$; $\mathcal{D}_{N-j}(s)$ и $\mathcal{D}_{N-i}(s)$ — определители, полученные из определителя $\Delta_{N+1}(s)$ после вычеркивания первых соответственно $(j+1)$ и $(i+1)$ строк и столбцов,

$$\delta_i^j = \begin{cases} m^{i-j}, & \text{если } j < N-m, \quad i \leq N-m, \\ \frac{m^{N-m-j} \cdot m!}{(N-i)!}, & \text{если } j < N-m, \quad i > N-m, \\ \frac{(N-j)!}{(N-i)!}, & \text{если } j \geq N-m. \end{cases}$$

Определители $\mathcal{D}_{N-i}(s)$ и $\mathcal{D}_{N-j}(s)$ вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$D_{k+1}(s) = [s + (N-k)\lambda + k\mu] D_k(s) - (N-k+1)\lambda k\mu D_{k-1}(s), \quad k < m,$$

$$D_{k+1}(s) = [s + (N-k)\lambda + m\mu] D_k(s) - (N-k+1)\lambda m\mu D_{k-1}(s), \quad k \geq m,$$

$$D_1(s) = 0, \quad D_0(s) = 1,$$

$$k = 0, 1, \dots, N-j-1 \text{ для } D_{N-j}(s); \quad k = 0, 1, \dots, N-i-1 \text{ для } D_{N-i}(s).$$

Определители $\Delta_i(s)$, $\Delta_j(s)$ и $\Delta_{N+1}(s)$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\Delta_{k+1}(s) = (s + k\lambda + m\mu)\Delta_k(s) - k\lambda m\mu \Delta_{k-1}(s), \quad 0 \leq k \leq N-m,$$

$$\Delta_{k+1}(s) = [s + k\lambda + (N-k)\mu]\Delta_k(s) - k\lambda(N-k)\mu \Delta_{k-1}(s), \quad k > N-m,$$

$$\Delta_1(s) = 0, \quad \Delta_0(s) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, i-1 \text{ для } \Delta_i(s).$$

$$k = 0, 1, \dots, N \text{ для } \Delta_{N+1}(s); \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1 \text{ для } \Delta_j(s).$$

По формуле обратного интегрального преобразования Лапласа — са имеем

$$P_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C e^{st} \alpha_i(s) ds,$$

где контур C охватывает все нули знаменателя в подынтегральном выражении, $\pi = 3, 14, \dots$.

Для вычисления $P_i(t)$ необходимо знать корни многочлена $\Delta_{N+1}(s)$. Их легко найти, зная [3] следующие свойства многочленов $\Delta_i(s)$, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$:

- 1) один корень многочлена $\Delta_{N+1}(s)$ равен нулю,
- 2) все корни многочлена $\Delta_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, N$, различны и отрицательны,
- 3) корни соседних многочленов $\Delta_{i-1}(s)$ и $\Delta_i(s)$ чередуются,
- 4) сумма корней многочлена $\Delta_i(s)$ равна

$$-A_i = -\frac{i(i-1)}{2} \lambda - im\mu, \quad \text{если } i \leq N-m,$$

$$-A_i = -\frac{i(i-1)}{2} \lambda - im\mu + \frac{(m+i-N)(m+i-N-1)}{2} \mu, \quad i > N-m.$$

Таким образом, последовательно можно найти корни многих членов $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$, ..., $\Delta_{N+1}(s)$, например, с помощью метода половинного деления [4].

Если $0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_N$ — корни многочлена $\Delta_{N+1}(s)$, то $\alpha_i(s)$ можно представить в виде простых дробей:

$$\alpha_i(s) = \frac{\tilde{\Delta}_i(s)}{\Delta_{N+1}(s)} = \frac{A_{i0}}{s} + \sum_{\ell=1}^N \frac{A_{i\ell}}{s + \alpha_\ell}, \quad \text{где } A_{i\ell} = \frac{\tilde{\Delta}_i(-\alpha_\ell)}{\Delta'_{N+1}(-\alpha_\ell)}.$$

Так как $\Delta_{N+1}(s) = s \cdot \Delta_N^*(s)$, то $\Delta'_{N+1}(-\alpha_\ell) = -\alpha_\ell \cdot \Delta_N^{*'}(-\alpha_\ell)$; $\Delta'_{N+1}(0) = \Delta_N^*(0)$. Тогда

$$P_i(t) = \frac{\tilde{\Delta}_i(0)}{\Delta_N^*(0)} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{-\alpha_\ell t} \cdot \tilde{\Delta}_i(-\alpha_\ell)}{-\alpha_\ell \cdot \Delta_N^{*'}(-\alpha_\ell)},$$

и функция готовности сосредоточенной ОВС

$$S(t) = \sum_{i=n}^N \frac{\tilde{\Delta}_i(0)}{\Delta_N^*(0)} + \sum_{i=n}^N \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{-\alpha_\ell t} \cdot \tilde{\Delta}_i(-\alpha_\ell)}{-\alpha_\ell \cdot \Delta_N^{*'}(-\alpha_\ell)}, \quad (3)$$

где n — минимальное число ЭМ в сосредоточенной ОВС, требуемых для решения заданного класса задач.

Величина

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \sum_{i=n}^N \frac{\tilde{\Delta}_i(0)}{\Delta_N^*(0)}$$

называется коэффициентом готовности сосредоточенной ОВС.

4. Рассчитаем функцию готовности первой распределенной ОВС на базе машин "Минск-32". Система состоит из двух ЭМ (то есть сосредоточенная ОВС состоит из одной ЭМ, рис. 1), соединенных абсолютно надежным некоммутируемым проводным каналом связи. Системное устройство по оборудованию составляет доли процента от оборудования ЭМ, и поэтому его также можно считать абсолютно надежным. Из (3) при $N=n=m=1$ получим функцию готовности ЭМ

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, & \text{если при } t=0 \text{ ЭМ исправна,} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, & \text{если при } t=0 \text{ ЭМ находится в состоянии отказа.} \end{cases}$$

Значения λ и μ для ЭМ "Минск-32" получены экспериментально. На рис. 2 построены кривые распределения $z(t)$ времени t безотказной работы машины "Минск-32" по данным эксплуатации за

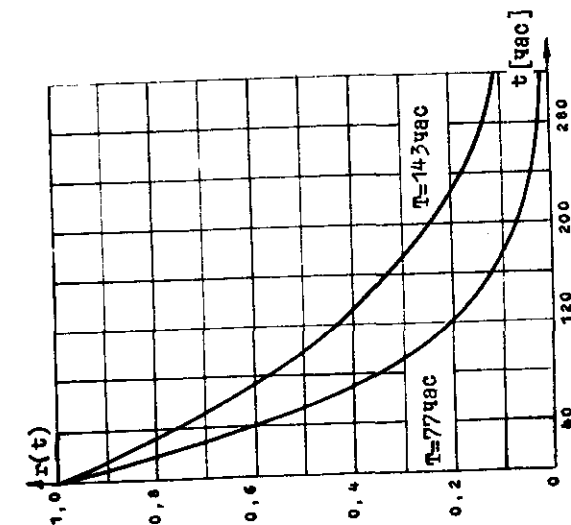


Рис. 2. Распределение времени безотказной работы машины "Минск-32"

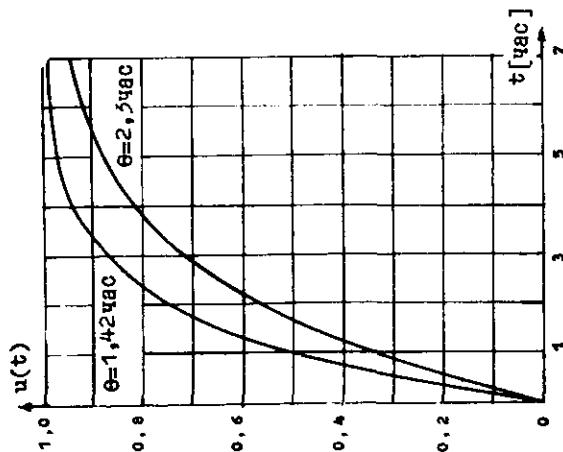


Рис. 3. Распределение времени восстановления машины "Минск-32"

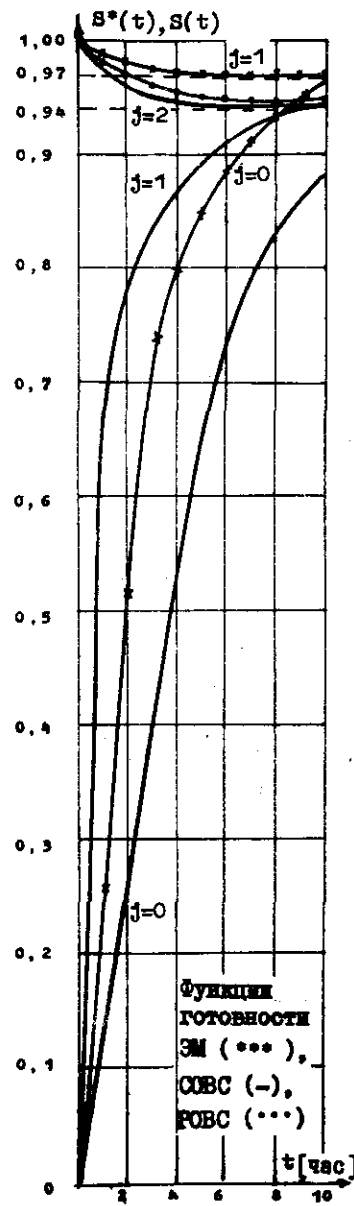


Рис. 4.

8 месяцев, причем нижняя кривая построена с учетом отказов внешних устройств, верхняя - только с учетом отказов в самой машине. Проверка гипотезы о справедливости экспоненциального закона распределения времени безотказной работы ЭМ проводилась по критерию χ^2 [5]. Вероятности того, что экспериментальные распределения являются экспоненциальными, равны 0,9 для верхней кривой (среднее время безотказной работы $T = 1/\lambda = 143$ час; $\lambda = 0,007$ 1/час) и 0,88 для нижней кривой ($T = 77$ час, $\lambda = 0,013$ 1/час). На рис.3 представлены функции распределения $u(t)$ времени t восстановления отказавшей ЭМ с учетом внешних устройств (среднее время восстановления $\theta = 1/\mu = 2,3$ час., $\mu = 0,43$ 1/час) и без учета внешних устройств - верхняя кривая ($\theta = 1,42$ час, $\mu = 0,7$ 1/час). Вероятности того, что экспериментальные распределения времени восстановления являются экспоненциальными, равны 0,8 и 0,95 соответственно для нижней и верхней кривых.

Теперь легко оценить надежность экспериментальной распределенной ОВС на базе ЭМ "Минск-32". На рис.4 представлена функция готовности распределенной ОВС

$$S^*(t) = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right]^2$$

для случая, когда обе ЭМ в начальный момент времени исправны и для

значений $\lambda = 0,013$ I/час, $\mu = 0,43$ I/час. На этом же рисунке приведены кривые функции $S(t)$ готовности ЭМ для случая, когда в начальный момент времени ЭМ исправна ($j = 1$) и ЭМ отказала ($j = 0$). Коэффициенты готовности распределенной ОВС и ЭМ соответственно равны $S^* = \lim_{t \rightarrow \infty} S^*(t) = 0,94$, $S = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0,97$.

Для сравнения нанесены кривые функции готовности сосредоточенной ОВС, состоящей из двух "Минск-32", одного восстанавливающего устройства и для трех случаев: $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$. Из рис. 4 видно, что коэффициенты готовности сосредоточенной и распределенной ОВС достаточно близки.

Таким образом, показано, что распределенные однородные вычислительные системы с некоммутируемыми каналами связи имеют практически высокий уровень готовности, если даже они построены на базе машин второго поколения.

Л и т е р а т у р а

1. ЕВРЕЙНОВ Э.В., ЮСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.
2. ВЕПРИК В.Н., ЖИРАТОВ В.И., КАН В.Г., МИХАНОВ А.И. Некоторые особенности построения распределенных универсальных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 39. Новосибирск, 1970, с. 137-146.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЕВ А.Д. Математические методы в теории надежности. М., "Наука", 1965, с. 352-355.
4. ЛЕМИНОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. Основы вычислительной математики. М., "Наука", 1966.
5. ЛЕМАН Э. Проверка статистических гипотез. М., "Наука", 1964.

Поступила в ред.-изд.отд.

5 июня 1973 года

Программа

для расчета $S(t)$ сосредоточенной ОВС записана на языке АЛГОЛ. Вводятся следующие исходные данные:

- N - число ЭМ в сосредоточенной ОВС,
- n - число основных ЭМ в сосредоточенной ОВС,
- m - число восстанавливающих устройств,
- λ - интенсивность потока отказов в ЭМ,
- μ - интенсивность восстановления отказавших ЭМ одним восстанавливающим устройством,
- ϵ - точность счета корней полиномов,
- η - число исправных ЭМ при $t = 0$,
- Δ - временной шаг,
- T - конечное время.

На печать выдаются значения $S(0)$, $S(\Delta)$, $S(2\Delta)$, ..., $S(T)$.

```
begin integer N, m, n, omega, k, j, i, r, teta; real lambda, mi, c1,
c2, sigma, S, f11, f12, f, a, b, x, d, epsilon, ro, t, T, delta;
read (N, n, m, lambda, mi, epsilon, teta, delta, T);
begin real array P1[0:N-1], P2[0:N], P3[0:N+1], beta[1:N+1],
alfa[0:N+1], F[1:T/delta]; k:=0; P1[0]:=P2[0]:=P3[0]:=1;
P2[1]:=P3[1]:=m x mi; alfa[0]:=0; omega:=T/delta; sigma:=
alfa[1]:=-m x mi; for i:=2 step 1 until (N+1) do P3[i]:=
0; for i:=1 step 1 until omega do F[i]:=0;
H: k:=k+1; if k<=N-m then c1:=k x lambda x mi x (N-k+1); if
k<=N-m then c2:=k x lambda+m x mi else c2:=k x lambda +
(N-k) x mi; for i:=0 step 1 until k do P3[i+1]:=P3[i+1]
+ c2 x P2[i]; for i:=0 step 1 until (k-1) do P3[i+2]:=
P3[i+2] -c1 x P1[i]; if k<=N-m then sigma:=sigma - k x
lambda - m x mi else sigma:=sigma - k x lambda - (N-k)
x mi; S:=0; f11:=P3[k+1]; i:=0; if N=1 then
begin alfa[1]:=sigma; beta[1]:=1; P2[1]:=P3[1]; r:=0; go to
tet
end; if k= N then
begin beta[1]:=0; a:=alfa[1]; f11:=P3[0]; for r:=1 step 1 until
(N+1) do f11:=f11 x a + P3[r]; i:=1
end;
```

```

H:  a:=alfa[i]; b:=alfa[i+1]; fi2:=P3[0]; for r:=1 step
    1 until (k+1) do fi2:=fi2 x b+P3[r]; d:=fi2;
D:  x:=(a+b)/2; f:=P3[0]; for r:=1 step 1 until (k+1) do
    f:=f x x+P3[r]; if f=0 then go to A; if (x-b) < epsilon
    then go to A else if sign(fi1)=sign(f) then go
    to B else go to C;
A:  beta[i+1]:=x; S:=S+x; fi1:=d; i:=i+1; if i < k then
    go to H else go to G;
B:  a:=x; fi1:=f; go to D;
C:  b:=x; fi2:=f; go to D;
G:  beta[k+1]:=sigma-S; for i:=1 step 1 until (k+1) do
    alfa[i]:=beta[i]; if k ≤ N-1 then
begin for i:=0 step 1 until k do P1[i]:=P2[i]; for i:=0
    step 1 until (k+1) do P2[i]:=P3[i]; go to H
end; for i:=0 step 1 until (N-1) do P3[i]:=P3[i] x (N-i);
    for i:=1 step 1 until N do alfa[i]:=alfa[i+1]; P2[N]
    := P3[N]; for r:=1 step 1 until N do
begin x:=alfa[r]; f:=P3[0]; for i:=1 step 1 until (N-1)
    do f:=f x x +P3[i]; beta[r]:=f
end;
tet : for j:=n step 1 until N do
begin ro:=1, if teta < j then
begin if teta ≥ N-m then
begin for i:=(N-j+1) step 1 until (N-teta) do ro:=ro x i
    x mi
end else if j ≤ N-m then ro:=(m x mi)^(j-teta) else
begin for i:=0 step 1 until (m-N+j-1) do ro:=ro x (m-i);
    ro:=ro x mi!(j-teta) x m!(N-m-teta)
end
end; if teta > j then for i:=j+1 step 1 until teta do ro:=
    ro x lambda x i; r:=0;
R:  x:=alfa[r]; k:=0; fi1:=0; fi2:=f:=1; if teta=0 then
begin P3[r]:=ro; go to Q
end;
Y:  if k ≤ N-m then f:=(k x lambda +m x mi+x) x fi2-k x
    lambda x m x mi x fi1 else f:=(k x lambda +N x mi -
    k x mi + x) x fi2-(N-k+1) x mi x k x lambda x fi1;
    fi1:=fi2; fi2:=f; k:=k+1; if teta < j then

```

```

begin if k < teta then go to Y
end else if k < j then go to Y; P3[r]:=ro x f;
Q:  fi1:=0; fi2:=f:=1; if teta=N then go to Z; k:=N; i:=0;
X:  k:=k-1; if i < m then f:=(x+N x lambda - i x lambda +i
    x mi) x fi2-(N-i+1) x lambda x i x mi x fi1 else f:=(x+
    N x lambda - i x lambda + m x mi) x fi2 - (N-i+1) x
    lambda x m x mi x fi1; fi1:=fi2; fi2:=f; i:=i+1; if
    teta < j then
begin if k > j then go to X
end else if k > teta then go to X;
Z:  P3[r]:=P3[r] x f; r:=r+1; if r ≤ N then go to R; b:=
    P3[0]/P2[N]; t:=0; i:=1;
W:  a:=b; for r:=1 step 1 until N do a:=a+exp(alfa[r] x t)/
    alfa[r] x P3[r]/ beta[r]; F[i]:=F[i]+a; if t < T then
begin t:=t+delta; i:=i+1; go to W
end
end;
print(F)
end
end

```