УДК 51:621.391

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАКАЗОВ

Ю.В.Мерекин

При производстве интегральных схем, каждая из которых должна обладать наперед заданными параметрами, возникает необходимость выбора из множества предлагаемого технологического оборудования или режимов его работы (технологий) минимального подмножества, на основе которого возможно производство необходимых интегральных схем. Каждая технология позволяет получать определенный список параметров. А каждая интегральная схема должна обладать известной совокупностью этих параметров. Существует ряд ограничений на совместимость технологий при производстве той или иной схемы, или возможность получения каких-то параметров с помощью наперед указанных технологий. Могут быть и другие ограничения, связанные с технологическими или функциональными соображениями.

Содержательно такая задача может иметь и экономический смысл. Поэтому при формальной постановке задачи и при её решении мы будем пользоваться терминами "источник", "продукт", "потребитель" вместо "технология", "параметр", "прибор".

Пусть имеется n источников, производящих в совокупности m различных типов продуктов, и p потребителей продуктов. Обозначим множества источников, продуктов и потребителей соответственно через

$$A=\{a_1,\dots,a_n\},\quad B=\{b_1,\dots,b_m\},\quad C=\{c_1,\dots,c_p\}.$$

Для каждого потребителя $c_k \in C$ задана матрица спроса $\|\alpha_{kj}\|$ ($k=1,2,\dots,p$, $j=1,2,\dots,m$), где $\alpha_{kj}=1$, если потребителю $c_k \in C$ необходим продукт $b_j \in B$, и $\alpha_{kj}=0$ – в противном случае.

Для каждого продукта $b_j \in B$ задана матрица $\|\beta_{ji}\|$ ($j=1,2,\dots,m$; $i=1,2,\dots,n$), где $\beta_{ji}=1$, если продукт $b_j \in B$

производится источником $\alpha_i \in A$, и $\beta_{ji} = 0$ – в противном случае, которая характеризует совокупность источников из A, производящих данный тип продукта.

Прежде чем сформулировать требование к задаче, введем некоторые определения.

Будем называть совокупность источников $A_1 \subseteq A$ допустимой, если она способна удовлетворить спрос всех потребителей одновременно.

Допустимую совокупность A_1 будем называть тупиковой, если не существует допустимой совокупности $A_2 \subset A_1$.

Тупиковую совокупность A_1 будем называть минимальной, если не существует другой тупиковой совокупности A_2, меньшей мощности.

Требуется найти все минимальные совокупности источников, способных удовлетворить спрос всех потребителей одновременно. При этом могут накладываться некоторые из ограничений:

I. Запрещены связи между некоторыми парами источников – потребителей, т.е. задана матрица $\| \gamma_{ki} \|$ ($k = 1,2,\dots, p$; $i = 1,2,\dots, n$), где $\gamma_{ki} = 0$, если потребитель $c_k \in C$ не может иметь связи с источником $\alpha_i \in A$, и $\gamma_{ki} = 1$ – в противном случае.

II. Допустимая совокупность $A_1 \subseteq A$ не должна содержать ни одной из пар источников α_i, $\alpha_t \in A$, т.е. задана матрица $\| \sigma_{it} \|$ ($i, t = 1,2,\dots, n$), где $\sigma_{it} = 0$, если пара $\alpha_i, \alpha_t \in A$ не должна содержаться в допустимой совокупности A_1, и $\sigma_{it} = 1$ – в противном случае. Для $i = t$ положим $\sigma_{it} = 1$.

III. Для каждого потребителя $c_k \in C$ задано множество пар источников $\alpha_i, \alpha_t \in A$ таких, что данный потребитель может иметь связь только с одним из источников α_i, α_t, т.е. задан тензор $\| \sigma_{it}^k \|$ ($k = 1,2,\dots, p$; $i, j = 1,2,\dots, n$), где $\sigma_{it}^k = 0$, если потребителю $c_k \in C$ запрещена связь с источниками α_i и α_t одновременно, и $\sigma_{it}^k = 1$ – в противном случае. Для $i = t$ положим $\sigma_{it}^k = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Список ограничений на связи может быть расширен в зависимости от требований конкретной прикладной задачи. При других ограничениях в приведенных ниже алгоритмах будет меняться вид характеристической функции. В настоящей работе мы ограничимся приведенным выше списком ограничений.

Рассмотрим некоторую задачу оптимального размещения Σ; это означает, что зафиксированы матрицы $\| \alpha_{kj} \|$, $\| \beta_{ji} \|$ и некоторые из ограничений I, II или III.

При решении задачи Σ будем использовать аппарат функций алгебры логики. Каждому источнику $\alpha_i \in A$, $i = 1,2,\dots, n$, поставим в соответствие двоичный аргумент x_i из множества $X = \{ x_1, \dots, x_n \}$.

Одним из этапов решения задачи будет конструирование некоторой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ алгебры логики. Эта функция должна принимать значение единицы на тех и только тех наборах значений аргументов $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, $\Delta_i \in \{ 0, 1 \}$, $i = 1,2,\dots, n$, которые своими единицами выделяют соответствующие допустимые совокупности источников. Эту функцию будем называть характеристической функцией для Σ. Очевидно, что если задача Σ имеет решение, то характеристическая функция для Σ отлична от нуля. В противном случае $f = 0$.

Рассмотрим решение задачи размещения при ограничении I. Обозначим через Σ_1 задачу размещения, соответствующую матрицам $\| \alpha_{kj} \|$, $\| \beta_{ji} \|$ и матрице ограничения $\| \gamma_{ki} \|$ из I.

ТЕОРЕМА I. Функция

$$f_1 = \mathop{\&}_{k=1}^{p} \mathop{\&}_{j=1}^{m} \Big(\bigvee_{i=1}^{n} \beta_{ji} \gamma_{ki} x_i \vee \bar{\alpha}_{kj} \Big) \tag{1}$$

является характеристической для задачи размещения Σ_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из всего множества различных совокупностей источников выберем одну. Пусть это будет

$$A_1 = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \}. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать:

1°. Если совокупность (2) допустимая, то на наборе

$$(\Delta_1, \dots, \Delta_\ell, \Delta_{\ell+1}, \dots, \Delta_n), \tag{3}$$

где $\Delta_s = 1$, $s = 1,2,\dots, \ell$, $\Delta_q = 0$, $q = \ell+1, \ell+2, \dots, n$, функция (1) обращается в единицу.

2°. Если совокупность (2) не является допустимой, то на наборе (3) функция (1) обращается в нуль.

Докажем свойство I^0. Так как совокупность (2) допустимая, то для любого потребителя $c_k \in C$ среди источников $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ всегда найдется хотя бы один α_i, который может удовлетворить спрос $c_k \in C$ в продукте $b_j \in B$, если он необходим данному потребителю ($\alpha_{kj} = I$), т.е. для $\alpha_{kj} = I$, $k = I,2,\dots,p$, $j = I,2,\dots,m$, всегда найдутся $\beta_{ji} = I$, $\gamma_{ki} = I$, $x_i = I$, $i = I,2,\dots,\ell$, и, следовательно, конъюнкция $\beta_{ji}\gamma_{ki}x_i$ равна единице. Для $\alpha_{kj} = 0$ в единицу обращается член $\bar\alpha_{kj}$.

Таким образом, для любого значения α_{kj} дизъюнкция $\bigvee_{i=1}^{\ell} \beta_{ji}\gamma_{ki}x_i \vee \bar\alpha_{kj}$ и тем более дизъюнкция $\bigvee_{i=1}^{n} \beta_{ji}\gamma_{ki}x_i \vee \bar\alpha_{kj}$ обращаются в единицу. Следовательно, на наборе (3) $f_1 = I$.

Докажем свойство 2^0. Так как совокупность (2) не является допустимой, то хотя бы для одного потребителя $c_k \in C$ не может быть удовлетворен спрос на какой-то продукт $b_j \in B$, необходимый этому потребителю ($\alpha_{kj} = I$). Это может иметь место либо из-за отсутствия среди источников $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ источника, производящего продукт b_j ($\beta_{ji} = 0$, $i = I,2,\dots,\ell$), либо из-за запрета на связь между потребителем c_k и всеми теми источниками из $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, которые производят продукт b_j ($\beta_{ji} = I$, но $\gamma_{ki} = 0$, $i = I,2,\dots,\ell$). Тогда среди дизъюнкций $\bigvee_{i=1}^{\ell} \beta_{ji}\gamma_{ki}x_i \vee \bar\alpha_{kj}$ должна существовать хотя бы одна дизъюнкция, обращающаяся в нуль при любых $k = I,2,\dots,p$; $j = I,2,\dots,m$; $i = I,2,\dots,\ell$; для всех $i = \ell+1, \ell+2, \dots, n$ значение нуля принимает x_i.

Таким образом, в выражении (I) должен существовать конъюнктивный член $(\bigvee_{i=1}^{n} \beta_{ji}\gamma_{ki}x_i \vee \bar\alpha_{kj})$, равный нулю. Следовательно, на наборе (3) $f_1 = 0$.

Теорема доказана.

После подстановки констант $\alpha_{kj}, \beta_{ji}\,\gamma_{ki}$ формула (I) примет вид конъюнктивной нормальной формы (к.н.ф.)

$$f_1 = S_1 \& S_2 \& \dots \& S_N. \tag{4}$$

После раскрытия скобок и удаления поглощенных членов получим дизъюнктивную нормальную форму (д.н.ф.)

$$f_1 = P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_L. \tag{5}$$

Формула (5) не содержит знаков отрицания и, следовательно, задаёт монотонную функцию алгебры логики. Из монотонности следует, что каждый дизъюнктивный член формулы (5) построен из аргументов, соответствующих тупиковой совокупности источников. Длина L д.н.ф. (5) равна количеству всех возможных тупиковых совокупностей источников, что следует из определения характеристической функции.

Изложим алгоритм решения поставленной задачи при ограничении I:

I. Построить к.н.ф. (4) характеристической функции (I).

2. Привести ее к д.н.ф. (5).

3. Выбрать все дизъюнктивные члены минимального ранга. Каждый из них построен из аргументов, соответствующих источникам, составляющим искомую минимальную совокупность. В работе [I] построен алгоритм перехода от к.н.ф. к д.н.ф. требуемого вида.

Приведем грубую оценку числа операций в предложенном алгоритме и сравним его с полным перебором.

В нашем алгоритме построения конъюнктивных нормальных членов необходимо просмотреть все сочетания $(\alpha_{kj}, \beta_{ji}, \gamma_{ki})$, $k = I,2,\dots,p$; $j = I,2,\dots,m$; $i = I,2,\dots,n$, число которых равно pmn. Когда $\alpha_{kj} = \beta_{ji} = \gamma_{ki} = 1$, мы переходим к конструированию конъюнктивного нормального члена. В противном случае переходим к другому сочетанию. Когда все члены к.н.ф. (5) построены, начинает работать алгоритм раскрытия скобок [I]. Работа этого алгоритма с точностью до константы оценивается величиной 2^n. Следовательно, количество операций при работе нашего алгоритма можно оценить величиной $pmn + 2^n$.

При решении задачи методом полного перебора необходимо выделять 2^n вариантов совокупностей источников и для каждого выделенного варианта провести проверку на допустимость, которая сводится к поиску совокупности $(\alpha_{kj}, \beta_{ji}, \gamma_{ki})$ такой, что $\alpha_{kj} = \beta_{ji} = \gamma_{ki} = 1$ для $k = I,2,\dots,p$; $j = I,2,\dots,m$; $i = I, 2,\dots,\ell$; $\ell \le n$.

Эту операцию грубо можно оценить числом pmn. Тогда для решения всей задачи методом полного перебора потребуется порядка $pmn2^n$ операций.

Рассмотрим решение задачи $\Sigma_{1,2} = \Sigma_{1,2}(\|\alpha_{kj}\|, \|\beta_{ji}\|, \|\gamma_{ki}\|, \|\sigma_{it}\|)$ при ограничениях I и II.

ТЕОРЕМА 2. Функция

$$f_{1,2} = \mathop{\&}_{k=1}^{p} \mathop{\&}_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} \beta_{ji} \gamma_{ki} x_i \mathop{\&}_{t=1}^{n} (x_t^{\sigma_{it}} \vee \sigma_{it}) \vee \bar{\alpha}_{kj} \right) \qquad (6)$$

является характеристической функцией задачи $\Sigma_{1,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущему.

В отличие от функции f_1 функция $f_{1,2}$ не является монотонной и ее представление в д.н.ф. (после раскрытия скобки) имеет вид

$$f_{1,2} = P_1 \hat{P}_1 \vee P_2 \hat{P}_2 \vee \ldots \vee P_L \hat{P}_L, \qquad (7)$$

где $P_s = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_\ell}$, $\hat{P}_s = \bar{x}_{s_{\ell+1}} \bar{x}_{s_{\ell+2}} \ldots \bar{x}_{s_{\ell+q}}$, $s = 1,2,\ldots,L$.

В этом случае тупиковые совокупности источников выделяются только элементарными конъюнкциями $P_1, P_2, \ldots, P_L$ из (7).

Заметим, что задача $\Sigma_{1,2}$ может решаться последовательно в два этапа. Сначала только при ограничении I выделяются тупиковые совокупности. Затем выбираются только те из них, которые не содержат пар, запрещенных ограничением II.

При ограничениях I и III решение соответствующей задачи $\Sigma_{1,3}$ отличается от предыдущих прежде всего тем, что сначала находятся тупиковые совокупности источников для каждого потребителя отдельно. Характеристическая функция для этого частного случая получается из выражения (6), если зафиксировать значение k:

$$f_{1,3}^{k} = \mathop{\&}_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} \beta_{ji} \gamma_{ki} x_i \mathop{\&}_{t=1}^{n} \left(x_t^{\sigma_{it}^k} \vee \sigma_{it}^k \right) \vee \bar{\alpha}_{kj} \right). \qquad (8)$$

В результате раскрытия скобок получится д.н.ф.

$$f_{1,3}^{k} = P_1^k \hat{P}_1^k \vee \ldots \vee P_L^k \hat{P}_{L_k}^k, \qquad (9)$$

аналогичная (7).

Построим характеристические функции (9) для всех k, образуем из них новые д.н.ф.:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,3}^{1} &= P_1^1 \vee P_2^1 \vee \ldots \vee P_{L_1}^1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{1,3}^{p} &= P_1^p \vee P_2^p \vee \ldots \vee P_{L_p}^p . \end{aligned} \qquad (10)$$

Каждый дизъюнктивный член в выражениях (10) выделяет одну из тупиковых совокупностей источников для соответствующего потребителя. Тогда характеристическая функция задачи $\Sigma_{1,3}$ при ограничениях I и III будет задаваться выражением

$$f_{1,3} = \varphi_{1,3}^{1} \;\&\; \varphi_{1,3}^{2} \;\&\; \ldots \;\&\; \varphi_{1,3}^{p} \qquad (11)$$

и ее д.н.ф.

$$f_{1,3} = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_L \qquad (12)$$

(аналогичная (5)) позволяет решить задачу $\Sigma_{1,3}$.

ПРИМЕР. Пусть

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},\ B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\},\ C = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Матрицы $\|\alpha_{kj}\|$ и $\|\beta_{ji}\|$ зададим в виде таблиц I и 2 соответственно.

Таблица I

Потребители	Продукты				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
c_1	I	I	0	0	I
c_2	0	I	I	0	0
c_3	0	I	0	I	0

Таблица 2

Источники	Продукты				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	I	I	0	0	0
a_2	0	I	I	0	I
a_3	0	I	0	I	0
a_4	I	0	I	I	I

Решим задачу $\Sigma_{1,3}$ при ограничениях:

$$\gamma_{13} = \gamma_{21} = 0, \quad \sigma_{14}^{1} = \sigma_{24}^{2} = \sigma_{23}^{2} = \sigma_{24}^{3} = 0.$$

Имеем:

$$f_{13}^{1} = (x_1 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_1)(x_1 \bar{x}_4 \vee x_2)(x_2 \vee\vee x_4 x_1) = x_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4 \bar{x}_1,$$

$$f_{1,3}^{2} = (x_2 \bar{x}_4 \vee x_3)(x_2 \bar{x}_4 \vee x_4 \bar{x}_2) = x_2 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \bar{x}_2,$$

$$f_{1,3}^{3} = (x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_2)(x_3 \bar{x}_2 \vee x_4 \bar{x}_2) = x_3 \bar{x}_2 \vee x_1 x_4 \bar{x}_2,$$

$$\varphi_{1,3}^{1} = x_1 x_2 \vee x_2 x_4,$$

$$\varphi^2_{1,3} = x_2 \vee x_3 x_4,$$

$$\varphi^3_{1,3} = x_3 \vee x_1 x_4,$$

$$f_{1,3} = (x_1 x_2 \vee x_2 x_4)(x_2 \vee x_3 x_4)(x_3 \vee x_1 x_4) = x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4.$$

Перечислим искомые минимальные совокупности источников:

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ A_2 = \{a_2, a_3, a_4\},\ A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

В заключение отметим, что при работе предложенного алгоритма основной вклад в количество операций вносит экспоненциальный член 2^n, поскольку решение задачи сводится в основном к построению булевой функции от n аргументов, где n -количество источников.

Литература

I. МЕРЕКИН Ю.В. Минимизация таблиц действительных чисел. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 44. Новосибирск, 1971, с. 60-69.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 января 1975 года