ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 64

УДК 681.32

РАЗМЕЩЕНИЕ И ТРАССИРОВКА В ПЛОСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Л.И. Макаров

При автоматизированном проектировании предварительной топологии интегральных схем исходной информацией обычно служит описание модели принципиальной схемы устройства, а выходной – информация о взаимном расположении и соединении элементов принципиальной схемы в выбранной модели кристалла [1,2].

В зависимости от требуемой точности описания модели принципиальной схемы используется один из следующих способов описания, задающих систему соединений (связок) схемы:

- таблица связок (матрица цепей),
- матрица смежности соответствующего мультиграфа.

В таблице связок $\|c_{ij}\|$ для каждой связки, содержащей не менее двух элементов, указываются элементы, входящие в нее, т.е.

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й элемент входит в } j\text{-ю связку,} \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$i = \overline{1,n}; \quad n - \text{число элементов схемы,}$$

$$j = \overline{1,m}; \quad m - \text{число связок схемы,}$$

при этом $n_j = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}$ – число элементов j-й связки, $m \leq \frac{1}{2} q n$, $q = \max\limits_i q_i$, q_i – число контактов i-го элемента.

В матрице смежности $\|d_{ik}\|$ мультиграфа, соответствующего схеме, для каждой пары (ребра) (i, k) элементов (вершин) указывается число связок схемы, содержащих эту пару, т.е.

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} c_{kj}; \quad i,k = \overline{1,n}.$$

В качестве модели кристалла выберем плоскую прямоугольную решетку R, образуемую двумя системами параллельных осям координат прямых: системой $\{x_g\}$, $g=\overline{1,G}$, прямых, параллельных оси Y, и системой $\{y_h\}$, $h=\overline{1,H}$, прямых, параллельных оси X, при этом $N=GH \geq n$. Каждому i-му, $i=\overline{1,N}$, узлу (точке пересечения прямых) решетки соответствует пара (x_i, y_i) координат образующих его прямых. Расстояние ρ_{ik} между i-м и k-м узлами решетки определим как величину $\rho_{ik}=|x_i-x_k|+|y_i-y_k|$, $i,k=\overline{1,N}$.

Решетку R можно рассматривать как взвешенный граф $R=(A,U)$, множеством A вершин которого является множество узлов, множеством U ребер – множество отрезков прямых, соединяющих соседние узлы решетки, а вес каждого ребра равен длине соответствующего отрезка.

Задачей автоматизированного проектирования предварительной топологии является отображение модели схемы в модель кристалла, при котором каждый i-й, $i=\overline{1,n}$, элемент схемы отображается в ρ_i-ю, $\rho_i \in \{1,2,\ldots,N\}$ вершину (узел) R, а каждая j-я, $j=\overline{1,m}$, связка схемы – в связанный подграф (трассу) T_j графа R, $T_j=(B_j,U_j)$, $B_j \subseteq A$, $U_j \subseteq U$. Длиной j-й трассы T_j назовем величину L_j, равную сумме весов ее ребер, т.е.

$$L_j=\sum_{u\in U_j} \rho_u ,$$

где ρ_u – вес (длина) ребра u.

Для заданного отображения $i \to \rho_i$ образом множества элементов j-й связки является некоторая система V_j узлов решетки, при этом отображение j-й связки в множество трасс $\{T_j\}$, для которых $V_j \subseteq B_j$, может быть неоднозначным.

Рассмотрим две задачи, возникающие при построении отображения модели схемы в модель кристалла.

Задача р а з м е щ е н и я состоит в нахождении такого отображения $i \to \rho_i$, $i=\overline{1,n}$, $\rho_i \in \{1,2,\ldots,N\}$, элементов схемы в узлы решетки R, при котором

$$L=\sum_{j=1}^{m} L_j \to \min .$$

Задача т р а с с и р о в к и при заданном отображении $i \to \rho_i$ состоит в нахождении для каждой j-й, $j=\overline{1,m}$, связки схемы кратчайшей трассы, т.е. связного графа $T_j=(B_j,U_j)$,

$V_j \subseteq B_j \subseteq A$, $U_j \subseteq U$ такого, что $L_j \to \min$. В приведенной постановке задача трассировки является известной задачей Штейнера [3,4] для плоской прямоугольной решетки.

В общем случае задача размещения включает в себя задачу трассировки, поскольку для нахождения величины $\min L$ требуется находить кратчайшие трассы. Поэтому обычно в задаче размещения используют не значение L_j длины трассы, а ее оценку, величина которой при заданном отображении $i \to \rho_i$ зависит только от взаимного расположения узлов системы V_j в решетке.

Если моделью схемы служит матрица смежности, то в качестве оценки суммарной длины трассы при заданном отображении $i \to \rho_i$ берут [1,2] величину $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \rho_{\rho_i \rho_k}$. В данной работе в качестве модели схемы выбрана более точная модель – таблица связок, а в качестве оценки длины j-й трассы величина $L_j^0=\min_{\rho\in A}\sum_{i=1}^{n_j}\rho_{\rho_i \rho}$.

Приведенные задачи размещения и трассировки являются экстремальными комбинаторными задачами, точное решение которых находится с помощью полного перебора, поэтому здесь рассматриваются приближенные методы их решения, при этом доказательства последующих утверждений не приводятся из-за их громоздкости.

А л г о р и т м р а з м е щ е н и я. Рассмотрим некоторые свойства оценки длины трассы, содержащей заданную систему узлов решетки. Пусть в решетке R выделена система узлов $V=\{1,2,\ldots,t\} \subseteq A$. Для произвольного узла ρ, $\rho=\overline{1,N}$, решетки суммарное расстояние ℓ от этого узла до всех узлов системы V равно

$$\ell=\sum_{i=1}^{t}\rho_{i\rho}=\sum_{i=1}^{t}|x_i-x_\rho|+\sum_{i=1}^{t}|y_i-y_\rho| .$$

Узел c решетки с координатами (x^0,y^0), для которого достигается минимум ℓ_0 величины ℓ, назовем центром системы V. Множество центров системы V обозначим через C. Величина $\ell_0=\sum_{i=1}^{t}\rho_{ic}$ является оценкой длины трассы T, содержащей систему узлов V.

Перенумеруем узлы системы V независимо по координатам X и Y так, чтобы их координаты x_α и y_β были упорядочены по возрастанию, т.е. $x_\alpha \leq x_{\alpha+1}$, $y_\beta \leq y_{\beta+1}$; $\alpha,\beta=\overline{1,t-1}$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА I. Множество C центров системы V состоит из узлов решетки R с координатами (x^0, y^0):

$$1)\ x_{\frac{t}{2}} \leq x^0 \leq x_{\frac{t}{2}+1},\ y_{\frac{t}{2}} \leq y^0 \leq y_{\frac{t}{2}+1} \text{ при четном } t,$$

$$2)\ x^0 = x_{\frac{t+1}{2}},\ y^0 = y_{\frac{t+1}{2}} \text{ при нечетном } t.$$

Пусть в решетке R выделена система узлов $V' = V \cup a = \{1, 2, \ldots, t, a\} \subseteq A$, $V \cap a = \phi$, т.е. система V' образована из V добавлением узла a. Тогда системы V и V' имеют общий центр c, т.е. $c = C \cap C' \neq \phi$ и $\delta' = \ell_0' - \ell_0 = \rho_{ac}$, т.е. $\delta' = 0$ при совпадении узла a с центром c.

Отсюда следует, что при добавлении узла a к каждой системе V_j множества $\{V_j\}$, $j=\overline{1,k}$, т.е. при образовании множества систем узлов $\{V_j'\}$, $V_j' = V_j \cup a$, приращение Δ' оценки суммарной длины равно

$$\Delta' = L' - L = \sum_{j=1}^{k} \delta_j' = \sum_{j=1}^{k} \rho_{ac_j}, \quad c_j = C_j \cap C_j'.$$

Пусть в решетке R выделены системы узлов V' и $V'' = V \cup b \subseteq A$, $V \cap b = \phi$, имеющие множества центров C' и C'', т.е. система V'' образована из системы V' заменой узла a на узел b. Тогда при нечетном t системы V' и V'' имеют хотя бы один общий центр, т.е. $C' \cap C'' \neq \phi$, а при четном t эти системы могут и не иметь общих центров. При этом $\delta'' = \ell_0'' - \ell_0' = \rho_{bc''} - \rho_{ac'}$, $c' \in C'$, $c'' \in C''$, и если узел b совпадает с центром c', то $c'' = c' \in C' \cap C'' \neq \phi$ и $\delta'' = -\rho_{ac'}$.

Отсюда следует, что при замене узла a на узел b в каждой системе V_j' множества $\{V_j'\}$, $j=\overline{1,k}$, т.е. при образовании множества систем узлов $\{V_j''\}$, $V_j'' = V_j \cup b$, приращение Δ'' оценки суммарной длины равно

$$\Delta'' = L'' - L' = \sum_{j=1}^{k} \delta_j'', \quad \delta_j'' = \rho_{bc_j''} - \rho_{ac_j'}, \ c_j' \in C_j', \ c_j'' \in C_j''.$$

Пусть в целочисленной решетке R для некоторого узла c выделена система всех узлов V_τ, $|V_\tau| = t_\tau = 2\tau(\tau+1)+1$, для которых $\rho_{ic} \leq \tau$; $i, c \in V_\tau$; $\tau = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда величина $\ell_0(t_\tau)$ оценки длины трассы, содержащей систему узлов V_τ, равна

$$\ell_0(t_\tau) = \frac{1}{3}(t_\tau - 1)\sqrt{2t_\tau - 1}.$$

Справедливо утверждение: в целочисленной решетке R для любой системы узлов V, $|V| = t$, $t = t_\tau + s$, $0 \leq s \leq 4(\tau+1)$, величина ℓ_0 оценки длины трассы, содержащей систему V, удовлетворяет соотношению

$$\ell_0 \geq \ell_0(t) = \ell_0(t_\tau) + s(\tau+1) = \frac{1}{6}(2t_\tau + 3s - 2)\sqrt{2t_\tau - 1} + \frac{s}{2}.$$

Поэтому величина $L_0 = \sum_{j=1}^{m} \ell_0(n_j)$ может быть использована как нижняя граница величины суммарной длины связок для оценки качества решения задачи размещения.

Алгоритм приближенного решения задачи размещения состоит из двух этапов. Входной информацией алгоритма служит описание моделей схемы и решетки, а выходной – описание размещения элементов схемы в узлах решетки.

1. Этап последовательного размещения [5].

а) Упорядочивание элементов схемы. Например, элементы схемы упорядочиваются, исходя из матрицы смежности, по величине наибольшей разности между числом ребер, соединяющих очередной элемент с упорядоченными, и числом ребер, соединяющих его с неупорядоченными элементами.

б) Последовательное размещение. Последовательно, в установленном порядке, каждый очередной элемент схемы помещается (задается отображение $i \longrightarrow \rho_i$) в незанятый узел решетки, находящийся на наименьшем расстоянии от центра системы узлов, в которых размещены связанные с очередным элементы схемы.

2. Этап коррекции размещения.

а) Упорядочивание размещенных элементов. Например, элементы упорядочиваются по величине наибольшего (или среднего) расстояния от узла, соответствующего очередному элементу, до центров систем узлов, соответствующих связкам, содержащим очередной элемент.

б) Коррекция размещения. Последовательно, в установленном порядке, для каждого очередного элемента находится такой элемент, что их взаимная перестановка в узлах решетки приводит к наибольшему уменьшению оценки суммарной длины трасс. Производится взаимная перестановка очередного и найденного элементов.

Исходя из объема входной и выходной информации и свойств систем узлов решетки, можно установить, что объём машинной памяти, необходимый для реализации алгоритма размещения, пропорционален величине nm; время работы этапа последовательного размещения пропорционально nm, а этапа коррекции – $n^2 m$.

Полученное описание размещения (таблица размещения) элементов схемы в узлах решетки и таблица связок являются входной информацией для алгоритма трассировки.

Алгоритм трассировки. Рассмотрим некоторые свойства трасс решетки. Пусть задана решетка R размерами $G \times H$ и система V, $|V| = t$, ее узлов, соответствующих элементам некоторой связки. Через R_V обозначим решетку, образованную из решетки R удалением прямых, не содержащих узлы системы V, а через T – кратчайшую трассу в R, содержащую узлы системы V. Узлы решетки, обе координаты которых имеют экстремальные значения, назовем углами. Через σ обозначим число узлов (точек Штейнера) кратчайшей трассы T, не принадлежащих системе V и степень которых не менее 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Число кратчайших путей, соединяющих противолежащие углы решетки* R, *равно* C^{H-1}_{G+H-2}.

2. *Кратчайшая трасса* T *является минимальным деревом Штейнера* [1,3].

3. *Число точек Штейнера кратчайшей трассы* $\sigma \le t-2$ [1].

4. *Существует кратчайшая трасса, лежащая в решетке* R_V.

Для системы V построим полный взвешенный граф $\Gamma = (V, U_V)$, вершинами которого являются узлы системы V, а каждому ребру $u_{ik} \in U_V$ приписан вес ρ_{ik}, равный расстоянию между узлами i и k решетки. Покрывающее дерево $D = (V, U')$, $U' \subseteq U_V$, графа Γ, для которого $L_D = \sum_{u_{ik} \in U'} \rho_{ik} \to min$, назовем кратчайшим деревом. Каждому ребру u_{ik} графа Γ в решетке R_V соответствует несколько кратчайших путей длиной ρ_{ik}, соединяющих i-й и k-й узлы системы V. Далее из них будем рассматривать только два пути ℓ_1 и ℓ_2, проходящие через узлы с координатами (x_i, y_k) и (x_k, y_i), соответственно.

Множеством (r, s)-соседей узла α решетки назовем множество $V_\alpha \subseteq A$, $|V_\alpha| = \tau$, узлов, для которых $\rho_{\alpha i} = r$, $\rho_{ik} \ge s > 0$, $i \ne k$; $i, k \in V_\alpha$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Максимальное число* (r, s)-*соседей* $max\, \tau = 4\left[\frac{2r}{s}\right]$.

Пусть узел α решетки соединен с узлами системы $V' \subseteq A$ некоторым множеством кратчайших путей, образующих трассу. при этом некоторые пути могут иметь общую часть, т.е. длина L_α трассы может быть меньше суммы $L = \sum_{i \in V'} \rho_{\alpha i}$ длин путей. Совмещением данного множества путей назовем величину $\gamma = L / L_\alpha$.

Из рассмотрения совмещения путей, соединяющих узел α решетки со всевозможными множествами его (r, s)-соседей при $r \le s$, т.е. $max\, \tau \le 8$, следует, что в этом случае максимальное значение совмещения $max\, \gamma = \frac{3}{2}$.

Алгоритм приближенного решения задачи трассировки для каждой связки состоит из двух этапов [5].

1. Этап нахождения кратчайшего дерева.

а) По таблицам связок и размещения находятся система V узлов, в которых размещены элементы связки, и соответствующий полный взвешенный граф $\Gamma(V, U_V)$.

б) С помощью алгоритма Прима [4] для графа Γ находится кратчайшее дерево D длиной L_D, при этом из теоремы 2 следует, что степень вершин дерева D не превышает 8.

2. Этап совмещения путей.

а) Упорядочивание вершин дерева D, например, в порядке их присоединения при построении дерева D с помощью алгоритма Прима.

б) Для очередной вершины дерева D находятся все инцидентные ей ребра и соответствующие этим ребрам пути (ℓ_1 и ℓ_2) в решетке R_V. Среди найденных путей выбирается сочетание путей с наибольшим совмещением, реализующее каждое ребро единственным образом и учитывающее пути, выбранные для предыдущих вершин.

Результатом работы алгоритма трассировки является связное дерево-трасса T_V длиной L_V. Поскольку максимальное значение совмещения путей при $t \leq s$ равно $\frac{3}{2}$, то для отношения длины L_V трассы к длине L_D кратчайшего дерева справедливо выражение

$$\frac{2}{3} \leq \frac{L_V}{L_D} \leq 1.$$

Для построения трассы, соответствующей одной j-й связке схемы, с помощью алгоритма трассировки требуются объём машинной памяти и время счета пропорциональные n_j и n_j^2 соответственно, где n_j – число элементов связки.

Приведенные алгоритмы приближенного решения задач размещения и трассировки обладают высоким быстродействием и небольшим объемом памяти, что дает возможность их применять в системах автоматизированного проектирования больших интегральных схем.

Литература

1. ШТЕЙН М.Е., ШТЕЙН Б.Е. Методы машинного проектирования цифровой аппаратуры. М., "Сов.радио", 1973.

2. МЕЛИХОВ А.Н., БЕРШТЕЙН Л.С., КУРЕЙЧИК В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. М., "Наука", 1974.

3. ГИЛБЕРТ Э.Н., ПОЛЛАК Г.О. Минимальные деревья Штейнера. -"Кибернетический сборник", Нов.серия, вып. 8, 1971.

4. ПРИМ Р.К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения.-"Кибернетический сборник", вып. 2, 1961.

5. БОЧКО Г.Д., КАШИН В.И., МАКАРОВ Л.И. Алгоритмы последовательного размещения и кратчайшей трассировки. -Настоящий сборник, с.73-81.

Поступила в ред.-изд.отд.
31 марта 1975 года