ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 64

УДК 62-502

О РАСЧЕТЕ ПРОЦЕНТА ВЫХОДА ДВОИЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ИХ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ

Б.И.Беляев, Ю.М.Шамаев

I. Постановка задачи. Технической основой построения высокопроизводительных вычислительных систем является однородная цепь логических элементов (рис.I) (вообще говоря, сколь угодно длинная). При разбросах параметров логических элементов функционирование такой цепи описывается семейством характеристик передачи

$$u = u_{k+1} = f_{k+1}(u_{bx}) = f_{k+1}(u_k). \tag{I}$$

Основное требование к цепи – способность к передаче двоично-квантованного сигнала без затухания – обычно выражается записанными в различных формах неравенствами: для логических повторителей (рис. 2,а)

$$\begin{aligned} &y = f(x) > M_1 \quad \text{при} \quad x > M_1, \\ &y = f(x) < M_0 \quad \text{при} \quad x < M_0, \end{aligned} \tag{2}$$

а для логических инверторов (рис. 2,б)

$$\begin{aligned} &y = f(x) > M_1 \quad \text{при} \quad x < M_0, \\ &y = f(x) < M_0 \quad \text{при} \quad x > M_1, \end{aligned} \tag{3}$$

для некоторых M_0, M_1, оптимальных по тому или иному признаку.

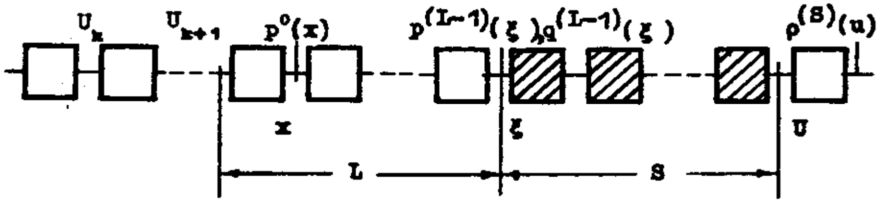
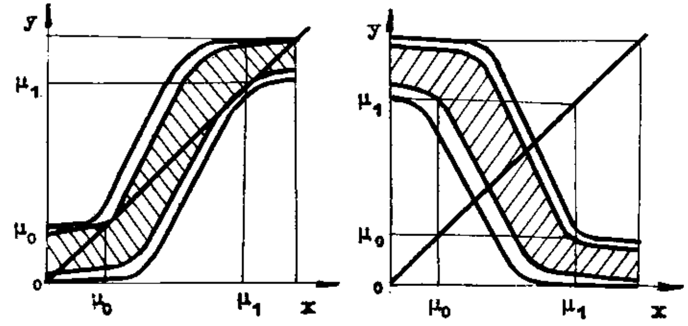


Рис. I



а) б)

Рис. 2

Элементы, удовлетворяющие условиям (2) или (3), работоспособны в любом соединении и при любом сигнале из рабочего диапазона.

Но в реальных условиях входной сигнал элемента x в общем случае не является наихудшим, и, следовательно, вероятность выполнения условий (2) (или (3)) несколько ниже, чем фактическая вероятность правильной работы двоичного элемента. Нахождению этой последней величины с учетом реального распределения входного сигнала x посвящена данная работа.

Анализ произведен для повторителей, переход к инверторам несложен.

Принята следующая модель. Имеется множество элементов с отличной от нуля вероятностью нарушения условий (2). Производится сборка в однонаправленную цепь; при этом в каждом элементе проверяется выполнение требований $u^0_{вых} < M_0$, $u^1_{вых} > M_1$ при условии выполнения соответственно тех же требований во всех предыдущих элементах. Нарушение этих требований считается отказом, и соответствующий элемент исключается без возвращения.

В результате процесс будет состоять из чередующихся серий годных и отказавших элементов. Участок между выходом первого логического элемента в серии годных и первого логического элемента в следующей серии годных назовем циклом. Процент выхода логических элементов можно определить из условия их работы в рассмотренной цепи как отношение

$$Q = \frac{L^0}{L^0 + S^0}, \tag{4}$$

где L^0 и S^0 – средние длины непрерывных серий соответственно годных и отказавших элементов.

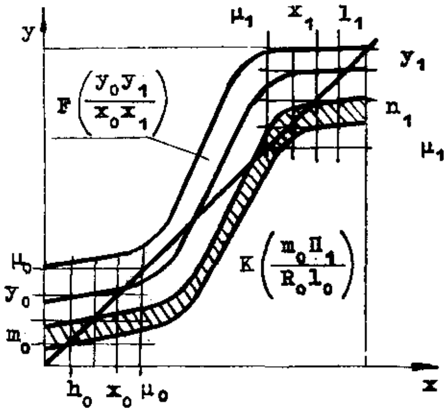


Рис. 3

Для получения этих величин рассмотрим статистические характеристики цепи.

2. Статистическое описание цепи логических элементов. Выходной сигнал двоичного элемента представляет собой систему двух в общем случае зависимых случайных величин: y_0 и y_1 (сигналы в режиме передачи соответственно "нуля" и "единицы").

Характеристика передачи элемента (I) является функцией, зависящей от случайных параметров. При этом двоичный элемент можно описать условной функцией распределения

$$F(y_0, y_1 \mid x_0, x_1), \tag{5}$$

представляющей собой вероятность события $u_{вых} > y_0$ при $u_{вх} = x_0$ и $u_{вых} > y_1$ при $u_{вх} = x_1$ (рис. 3). На основе этой функции вводится понятие элемента вероятности перехода

$$P(y_0, y_1 \mid x_0, x_1) = F(y + \Delta y, y_1 + \Delta y \mid x_0, x_1) - F(y_0, y_1 \mid x_0, x_1) \tag{6}$$

и плотности вероятности перехода

$$k(y_0, y_1 \mid x_0\, x_1) = \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y} F(y_0, y_1 \mid x_0, x_1). \tag{7}$$

При этом последовательность выходных сигналов в цепи элементов представляет собой цепь Маркова, и соответствующие методы [I–6] могут быть применены для решения данной задачи.

В нашем случае цепь Маркова является простой, однородной, с дискретным параметром (номером элемента) и непрерывным множеством состояний.

Далее, рабочий сигнал элемента всюду обозначен одной буквой, под которой понимается система двух связанных случайных величин. Область $y_0 < M_0\, y_1 > M_1$ в пространстве рабочего сигнала $[y_0, y_1]$ назовем рабочей областью M, а область, не принадлежащую M, – отказной областью A. Элемент $dx_0\, dx_1$ обозначен $d\mathcal{D}_x$. Двойные интегралы обозначены однократными. Все интегралы, кроме специально обозначенных, берутся по области M.

Далее приняты следующие обозначения:

$k(y \mid x)$ – плотность вероятности перехода (7);

$\rho^0(x)$ – распределение выходных состояний первого элемента в серии годных;

$\rho^{(L-1)}(x)$ – плотность полной (безусловной) вероятности получения $L-1$ годных элементов и состояния x на выходе элемента L;

$q^{(L-1)}(x)$ – плотность полной (безусловной) вероятности состояния x на выходе элемента L и первого отказа в элементе $L+1$;

$f^{(L)}(x)$ – вероятность первого отказа в элементе $L+1$ при состоянии x на выходе I-го элемента;

$M_{yx}\varphi_x = \int k(y|x)\varphi(x)d\mathcal{D}_x$ – интегральное преобразование некоторой функции $\varphi(x)$;

$M^L_{yx}\varphi_x = \int \ldots \int k(y|y_{L-1})\, k(y_{L-1}|y_{L-2}) \ldots k(y_1|x)\, d\mathcal{D}_{y_{L-1}} \ldots d\mathcal{D}_x$ – то же преобразование, произведенное L-кратно;

$A(x) = \int_A k(y|x)dy$ – вероятность отказа при входном состоянии x;

$A^S(x)$ – вероятность S отказов при входном состоянии x (обычное возведение в степень, так как отказы являются независимыми событиями);

$\rho^{(S)}(y)$ – плотность вероятности получения S отказов и состояния x в первом годном;

$z^{(S)}(x)$ – вероятность годного после S отказов при состоянии x на выходе последнего годного.

Напоминаем, что в нашем случае имеются значения x, при которых $\mathcal{A}(x) \neq 0$ (но всегда $\mathcal{A}(x) < 1$). При этом, как известно из теории цепей Маркова [1,2], каждое состояние множества M достижимо из любого состояния множества $\mathcal{A}$, и наоборот; отказ и получение годного – события достоверные, и средние длины серий годных и отказавших элементов конечны.

Средняя длина серии годных элементов при состоянии x на выходе первого годного выражается интегральным уравнением

$$L(x) = \int k(y|x) L(y) + 1, \tag{8}$$

существование и единственность решения которого доказаны в [3].

Средняя длина серии отказавших элементов при состоянии x на выходе последнего годного и при условии, что один отказ произошел, выражается соотношением:

$$S(x) = \sum_{s=1}^{\infty} s\tau^{(s)}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} s(1-\mathcal{A}(x))\mathcal{A}^{s-1}(x) = \frac{1}{1-\mathcal{A}(x)}. \tag{9}$$

Нас интересуют объективные величины L^0 и S^0, не зависящие от входных сигналов и других внешних факторов и определяемые только внутренними статистическими характеристиками элемента. Поэтому возникает задача отыскания стационарных – не зависящих от режима в начале цепи – распределений исходных сигналов годных и бракованных серий.

Ясно, что распределение состояний в конце каждого цикла ($\rho(u)$, рис. 1) полностью определяется распределением в его начале $\rho^0(x)$ и длинами серий этого цикла L и S:

$$\rho(u) = \rho(u, L, S, \rho^0(x)).$$

В стационарном режиме это распределение, усредненное по значениям L и S от 1 до ∞, должно совпадать с распределением $\rho^0(x)$.

Получению условий этого совпадения посвящен следующий раздел работы.

3. Стационарный режим цепи логических элементов. В серии годных элементов основное преобразование, которому подвергается исходное распределение $\rho^0(x)$, описывается уравнением

$$\rho^{(m)}(x) = M_{x\xi}\, \rho^{(m-1)}(\xi). \tag{10}$$

Суммируя порознь правые и левые части уравнений (10) для всех $m = 0 \div \infty$ и добавляя тождество $\rho^0(x) = \rho^0(x)$, получим уравнение

$$\rho(x) = M_{x\xi}\, \rho(\xi) + \rho^0(x), \tag{11}$$

где

$$\rho(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m)}(x). \tag{12}$$

Априорное распределение выходных состояний L-го элемента непрерывной серии годных выражается соотношением

$$\rho^{(L-1)}(\xi) = M_{\xi x}^{L-1}\, \rho^0(x). \tag{13}$$

Вероятность отказа в следующем ($L+1$)-м элементе равна

$$\int f^{(L)}(x)\rho^0(x)\, d\mathcal{D}_x = f^{(L)} = \int \mathcal{A}(\xi)\rho^{(L-1)}(\xi)\, d\mathcal{D}_\xi. \tag{14}$$

При этом условии апостериорное распределение тех же состояний выражается формулой Бейеса [4], принимающей в наших обозначениях вид:

$$g_0^{(L-1)}(\xi) = \frac{\mathcal{A}(\xi)\rho^{(L-1)}(\xi)}{\int \mathcal{A}(\xi)\rho^{(L-1)}(\xi)\, d\mathcal{D}_\xi}, \tag{15}$$

откуда получается среднее по всем значениям L распределение на выходе последнего годного элемента серии

$$g_0(\xi) = \sum_{L=1}^{\infty} f^{(L)} g_0^{(L-1)}(\xi) = \mathcal{A}(\xi)\rho(\xi), \tag{16}$$

служащее исходным для отказной серии.

Поскольку отказ-событие достоверное, то для любого исходного x имеем

$$\sum_L f^{(L)}(x) = 1, \tag{17}$$

откуда с учетом (13) и (14) получаем

$$\int \mathcal{A}(\xi)\,\rho(\xi)\,d\mathcal{D}_\xi = 1. \tag{18}$$

В отказной серии вероятность получения S отказов и затем одного годного (при условии, что один отказ уже получен,вероятность этого учтена выше) выражается соотношением

$$\tau^{(S)} = \int M_{y\xi}\, \mathcal{A}^{(S-1)}(\xi)\, q_0(\xi)\, d\mathcal{D}_y. \tag{19}$$

При этом условии распределение состояний первого годного имеет вид

$$\rho^{(S)}(u) = \frac{M_{u\xi}\, \mathcal{A}^{(S-1)}(\xi)\, q_0(\xi)}{\tau^{(S)}}, \tag{20}$$

а среднее по всем $S = 1 - \infty$ распределение $\rho^{(S)}(u)$ имеет вид

$$\rho(u) = \sum \tau^{(S)} \rho^{(S)}(u) = M_{u\xi}\, \frac{\mathcal{A}(\xi)}{1-A(\xi)}\, \rho(\xi). \tag{21}$$

Условием существования стационарного режима, не зависящего от порядкового номера цикла, является равенство

$$\rho(u) \equiv \rho^0(u) \tag{22}$$

для всех u области M ; это с учетом (II) и (2I) приводит к интегральному уравнению

$$\rho(u) = \int k(u/x)\, \frac{\rho(x)}{1-\mathcal{A}(x)}\, d\mathcal{D}_x, \tag{23}$$

в котором нетрудно увидеть уравнение стационарного режима марковского процесса с оператором $\dfrac{k(u/x)}{1-\mathcal{A}(x)}$.

Решение уравнения существует, ибо интеграл от этого оператора по $u \in M$ равен единице. Поскольку оператор не имеет замкнутых множеств, решение единственно [5].

При условии нормировки $\int \rho^0(x)\,d\mathcal{D}_x = 1$ решение уравнения позволяет получить исходные распределения рабочей серии $\rho^0(x)$ и отказной серии $q^0(x)$ с помощью соотношений соответственно (II) и (I6).

При этом средняя длина отказной серии –

$$S^0 = \int q^0(x)\, S(x)\, d\mathcal{D}_x = \int \frac{\mathcal{A}(x)}{1-\mathcal{A}(x)}\, \rho(x)\, d\mathcal{D}_x, \tag{24}$$

а средняя длина рабочей серии с учетом (8) и (II)

$$L^0 = \int \rho^0(x) L(x)\, d\mathcal{D}_x = \int \rho(x) L(x)\, d\mathcal{D}_x - \int L(x) M_{x\xi}\, \rho(\xi)\, d\mathcal{D}_x =$$

$$= \int \rho(x) L(x)\, d\mathcal{D}_x - \int L(\xi)\rho(\xi)\, d\mathcal{D}_\xi + \int \rho(\xi)\, d\mathcal{D}_\xi = \int \rho(x)\, d\mathcal{D}_x, \tag{25}$$

откуда легко получается критерий (4).

Отметим, что L и S являются стационарными случайными функциями номера цикла, n – мерное распределение которых для любого n выражается из полученных выше соотношений. В частности, одномерные распределения $f^{(L)}$ и $\tau^{(S)}$ выражаются соотношениями (I4) и (I9).

Реальные характеристики передачи логических повторителей всегда монотонны ($\dfrac{\partial f}{\partial u_{bx}} \geqslant 0$); при этом

$$\frac{\partial \mathcal{A}(x_0, x_1)}{\partial x_1} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{A}(x_0, x_1)}{\partial x_0} \leqslant 0$$

и наибольшее значение функция $\mathcal{A}(x_0, x_1)$ принимает при $x_0 = M_0$, $x_1 = M_1$. Этой величине и равна вероятность нарушения условий (2). В то же время процент функционального брака в нашей модели согласно (24) и (25) равен

$$\frac{S^0}{L^0 + S^0} = \int \frac{\rho(x)/M(x)}{\int \rho(x)/M(x)\, d\mathcal{D}_x}\, \mathcal{A}(x)\, d\mathcal{D}_x,$$

то есть среднему по области M' значению той же функции. Этим подтверждается наше исходное предположение, что условия (2) слишком жестки по сравнению с реальными.

Из изложенного ясно, что для работоспособности цепи необходим конечный процент элементов с усилением больше единицы при $u_{bx} = u_{bux}$; но при их наличии кроме них будет работоспособна часть элементов, не обладающих этим свойством.

Следует отметить, что увеличение выхода работоспособных элементов, очевидно, сопровождается снижением устойчивости цепи к внешним воздействиям (в частности, к помехе). Поэтому изложенный подход целесообразен в проектировании схемы на максимальный выход при заданной интенсивности отказов, причем нужна предварительная информация о причинах отказов.

При практических расчетах множества $[0, M_0]$ и $[M_1, 1]$ делятся на дискретные интервалы $(1_0, 2_0, \dots, m_0, \dots s_0)$ и $(1_1, 2_1, \dots n_1, \dots s_1)$. Вводятся функции:

$K(m_0, n_1/h_0, \ell_1)$ – вероятность прохождения реализации характеристики передачи через интервал m_0 в сечении h_0 и через интервал n_1 в сечении ℓ_1, или переходная вероятность цепи Маркова;

$A(h_0, \ell_1)$ – вероятность прохождения характеристики вне множества M_0 в сечении h_0 или вне множества M_1 в сечении ℓ_1.

При этом интегральное уравнение (23) совместно с (18) представляется системой $s_0 s_1 + 1$ линейных алгебраических уравнений:

$$P(m_0, n_1) = \sum_{h_0=1}^{s_0} \sum_{\ell_1=1}^{s_1} \frac{K(m_0, n_1/h_0, \ell_1)}{1 - A(h_0, \ell_1)} P(h_0, \ell_1); \qquad (26)$$

$$\sum_{m_0=1}^{s_0} \sum_{n_1=1}^{s_1} A(m_0, n_1) P(m_0, n_1) = 1 \qquad (27)$$

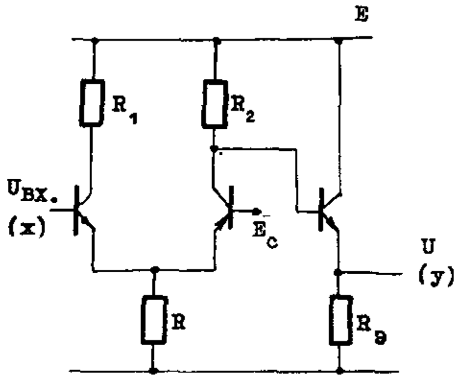


Рис. 4

(напомним, что одно из $s_0 s_1$ уравнений (27) является следствием остальных). В аналогичной форме выражаются остальные соотношения (14), (20), (24), (25).

4. П р и м е р р а с ч е т а. Рассмотрим применение изложенной методики на примере транзисторного логического элемента на переключателях

тока (рис.4); характеристика передачи элемента приближенно выражается функцией [7]:

$$y = A - \frac{B}{1+e^{(x-V)/\varphi}},$$

где A, B, V – случайные параметры, зависящие от параметров транзисторов и имеющие некоторое совместное распределение $g(A,B,V)$.

Ясно, что из функции $y_0 = f(x_0)$ и совершенно идентичной в данном случае функции $y_1 = f(x_1)$ можно выразить параметры A и B как функции входных и выходных напряжений x_0, x_1, y_0, y_1 и параметры V:

$$A = \psi_A(x_0, x_1, y_0, y_1, V) = \frac{y_0 \xi - y_1}{1+\xi},$$

$$B = \psi_B(x_0, x_1, y_0, y_1, V) = \frac{y_0 - y_1}{1+\xi}\left(1+e^{(x_0-V)/\varphi}\right),$$

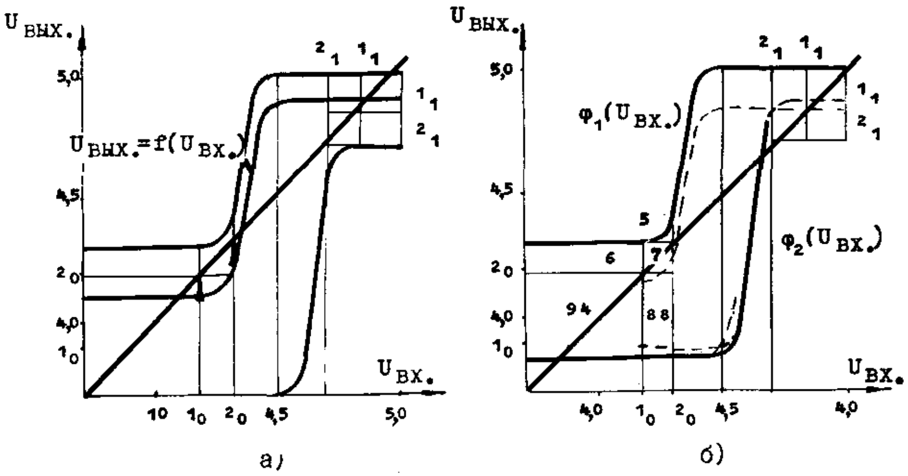
где $\xi = \dfrac{1+e^{x_0}}{1+e^{x_1}}$. Это дает возможность получить выражение плотности переходных вероятностей цепи:

$$k(y_0, y_1/x_0, x_1) = \int^{V^+} g(\psi_A, \psi_B, V) \|\mathcal{F}\| \, dV,$$

$$\|\mathcal{F}\| = \begin{vmatrix} \varphi'_{Ay_0} & \varphi'_{Ay_1} \\ \varphi'_{By_0} & \varphi'_{By_1} \end{vmatrix},$$

На рис.5,а представлено типичное семейство характеристик схемы; принято, что A, B, V распределены нормально со средними значениями соответственно $A_0 = 4{,}8$ в, $B_0 = 0{,}85$ в, $V_0 = 4{,}5$в и среднеквадратичными отклонениями $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_V = 0{,}07$в.

На рис.5,в представлена матрица переходных вероятностей для $s_0 = s_1 = 2$. Для иллюстрации на рис.5,б показано подсемейство характеристик, проходящих через интервал 2_1, и соответствующие ему условные переходные вероятности в множестве



а) б)

		1_1		2_1		
		1_0	2_0	1_0	2_0	Отк.
1_1	1_0	61,1 ▲	3,9	35		
	2_0	58,5	3,6 ▲	32,5	2,4	3
2_1	1_0	56,4 ▲	3,6	37		3
	2_0	52,8	4,2 ▲	35,5	1,5	6

в)

Рис.5

"0"; соответствующие полные переходные вероятности суть элементы $2_I I_I I_0 I_0$, $2_I I_I I_0 2_0$, $2_I I_I 2_0 I_I$, $2_I I_I 2_0 2_0$ полной матрицы рис.5,в.

Далее,численное решение систем линейных уравнений вида (26), (27), а затем расчет по соотношениям (24), (25) дают следующие результаты:

$$\rho_{1_1 1_0} = 44{,}2; \qquad \rho_{1_1 2_0} = 0{,}49;$$
$$\rho_{2_1 1_0} = 3I{,}42; \qquad \rho_{2_1 2_0} = 0{,}77;$$
$$L^0 = 76{,}8; \quad S^0 = I{,}00; \quad \frac{L^0}{L^0+S^0} = 98{,}70(\%).$$

Практически при обработке технологических данных возможно непосредственное построение матрицы переходных вероятностей; при этом для каждой конкретной реализации характеристики передачи - **рис.5,а**- заносятся точки в ячейки матрицы,соответствующие координатам всех интервалов, через которые эта реализация проходит (треугольники на **рис.5,а**).

Рассмотренный пример подтверждает,что разбраковка по критерию, принятому в настоящей работе,приводит к меньшему проценту брака, чем по условиям (2).

В данном примере брак соответственно составляет I,3% и 6%.

На основании вышеизложенного можно сделать выводы:

I. Для расчета функционального процента выхода элементов, связанных в систему, требуется отыскание распределений уровней входных сигналов элементов в рабочем состоянии системы.

2. При статистическом анализе полубесконечной цепи двоичных логических элементов удобно ввести длины серии годных и отказавших элементов (соответственно L и S), возникающих при разбраковке.Эти величины случайны,их средние значения L^0 и S^0 не зависят от режима в начале цепи,и соотношение $Q = \frac{L^0}{L^0 + S^0}$ может служить определением функционального процента выхода.

3. Чтобы показатель (4) был отличен от нуля, необходимо чтобы было отлично от нуля относительное количество элементов с усилением $\frac{\partial f(u_{вх})}{\partial u_{вх}}$ больше единицы при $u_{вх} = u_{вых}$.

4. Область работоспособности цепи логических элементов в традиционной форме системы неравенств в пространстве параметров одного элемента не выражается.

Литература

I. ФЕЛЛЕР В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. М., "Мир", I967.

2. РОМАНОВСКИЙ В.И. Дискретные цепи Маркова. М.-Л. ГТТИ, I949.

3. БРИН И.А., ШАМАЕВ Ю.М. Передача двоичной информации по регистру сдвига. -"Автоматика и телемеханика", I965, № 5,с.866-876.

4. ГНЕДЕНКО Б.В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, I969.

5. САРЫМСАКОВ Т. Основы теории процессов Маркова. М.,Гостехиздат, I954.

6. ЗЕЛЕНЦОВ Б.П. О надежности систем, элементы которых характеризуются постоянными интенсивностями отказов и восстановления. -"Дискретный анализ". Вып. 7. Новосибирск, I966,с.53-6I.

7. Анализ и расчет интегральных схем. Под ред. Д.Линна, Ч.Мейера и Д.Гамильтона. М., "Мир", I969.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 марта I974 года