ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 518.12

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИКУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Ю.С. Завьялов

Содержание статьи представляет собой распространение на случай n переменных результатов, полученных для бикубических сплайнов ($n = 2$) дефекта I. Эта процедура принципиально не сложна, но технические трудности, тем не менее, весьма значительны. Поэтому нам кажется целесообразной публикация общей теории, составившей ранее часть докторской диссертации автора (1972 г.)

Рассматривается задача интерполирования мультикубическими сплайнами дефекта I в n-мерном параллелепипеде R^n. Исследуются вопросы существования и единственности решения, алгоритмы и сходимость интерполяционных процессов. Метод состоит в сведении данных проблем к аналогичным задачам для кубических сплайнов одной переменной. В этой связи § I посвящен обзору основных достижений одномерной теории, включая некоторые последние результаты в данной области [I-I0].

Задача интерполирования сплайн-функциями многих переменных впервые изучалась В.С.Рябеньким (см., например, [II]). Он рассмотрел эрмитову интерполяцию локальными сплайнами. К ним, в частности, относятся мультикубические сплайны дефекта 2. Задача для сплайнов дефекта I в случае $n = 2$ (бикубические сплайны) была сформулирована Бором [I2], который исследовал существование и единственность решения и построил алгоритм для сплайнов с граничными условиями типа I. Эти вопросы для различных типов граничных условий изучались в [I,I3-I7]. В настоящей статье постановке задачи, существованию и единственности решения для случая n переменных посвящен § 2.

В § 3 предлагается один из возможных алгоритмов решения задачи в области R^n. Он сводится к многократному решению одномерных задач, как и в работах [I2,I6].

Сходимость интерполяционных процессов впервые была рассмотрена Албергом, Нильсоном и Уолшем. В [I] для функций $f(x^1,x^2)\in C^{(2,2)}[R^2]$ и функций $f(x^1,x^2)\in C^{(4,4)}[R^2]$ (непрерывны производные до порядка $\mathcal{D}^{(2,2)}$ и $\mathcal{D}^{(4,4)}$ соответственно) доказана равномерная сходимость для самих функций и их производных до порядков $\mathcal{D}^{(1,1)}$ и $\mathcal{D}^{(3,3)}$, соответственно. При этом установлена скорость сходимости относительно шага интерполяции.

Более полное исследование сходимости было сделано автором в статье [I6], где доказана равномерная сходимость интерполяционных процессов для функций $f(x^1,x^2)\in C^{(\sigma_1,\sigma_2)}[R^2]$ $(\sigma_1,\sigma_2\le 3)$ вплоть до производных порядка $\mathcal{D}^{(q_1,q_2)}$ $(q_j\le\sigma_j)$. Для $\sigma_j = 4$ и $q_j\le 3$ скорость сходимости увеличивается на один порядок по сравнению с $\sigma_j = 3$. Последний результат был повторен в статье Карлсона и Холла [I8].

В § 4 вводится понятие частичного сплайна ранга $1\le r\le n-1$ (случай r = I рассмотрен в [I]). На основе этого понятия в §5 исследуется равномерная сходимость интерполяционных процессов в случае n переменных. Получены аналоги теорем, известных для функций одной переменной.

Приводимые в данной статье результаты достаточны для практического применения мультикубической сплайн-интерполяции. Они могут быть распространены в нескольких направлениях. Во-первых, на области в виде объединения параллелепипедов. Для бикубических сплайнов эти вопросы рассматривались еще в работе [I3], а затем также в [I4,I6,I9,20]. Наиболее полные результаты получены в последних двух работах. Замечания на эту тему в [I6] справедливы только для периодических функций, а также для одного случая непериодических функций (тип Ш при $\rho=0$ в обозначениях работы [I6]). Для граничных условий типа I и П они не верны. Во-вторых, можно рассматривать области с "неправильной" границей по аналогии с работами [I,I6]. В третьих, практически важен случай параметрического представления многомерной поверхности параметрическими сплайнами от криволинейных координат на ней. В трехмерном пространстве также примеры приведены в [I,I6,

2I]. Наконец, в n – мерной области можно реализовать идеи Кунза [22,23] на основе мультикубических сплайнов.

При подготовке обзорной части данной статьи, особенно § I, существенную помощь оказал В.Л.Мирошниченко, которому автор выражает искреннюю благодарность.

§ I. Интерполирование кубическими сплайнами

I. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть $S(x)$ – кубический сплайн дефекта I, т.е. $S(x)\in C^2[a,b]$, с точками склеивания $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Уравнения звеньев сплайна суть

$$P_i(x) = a_\nu^{(i)}(x-x_i)^\nu,\quad x\in[x_i,x_{i+1}] \tag{I.I}$$

(по индексу ν тензорная сумма от 0 до 3).

Задача. Построить кубический сплайн $S(f;x)$, интерполирующий значения f_i в узлах Δ, т.е.

$$S(f;x_i) = a_0^{(i)} = f_i \quad (i = 0,\ldots,N), \tag{I.2}$$

и удовлетворяющий граничным условиям:

$$A_a S = a_0^{(-1)},\quad A_b S = a_0^{(N+1)}. \tag{I.3}$$

Оператор A_a ставит в соответствие функции $S(f,x)$ линейную комбинацию значений функции и производных $\mathcal{D}^\rho P_0(x)$ (ρ = 0, I,2,3) в некоторых точках числовой оси. Аналогично A_b действует на $P_{N-1}(x)$. Из общих условий выделяется обладающий рядом интересных свойств случай

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}^\rho S(f;x_0) &= \frac{a_0^{(-1)}}{(-h_0)^\rho} = \mathcal{D}^\rho f(x_0),\\ \mathcal{D}^\rho S(f;x_N) &= \frac{a_0^{(N+1)}}{(h_{N-1})^\rho} = \mathcal{D}^\rho f(x_N), \end{aligned}\right\} \tag{I.4}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$. При ρ = I имеем граничные условия типа I, а при ρ = 2 – условия типа П.

Сплайн может быть периодическим с периодом $T = b - a$. При этом условия (I.3) заменяются соотношениями:

$$\mathcal{D}^\rho S(f;a) = \mathcal{D}^\rho S(f;b)\quad (\rho = 0,1,2). \tag{I.5}$$

2. Определяющие уравнения [I,2]. Задача интерполирования сводится к системе уравнений для определения коэффициентов сплайна $a_2^{(i)}$ с трехдиагональной матрицей Q_2 либо к аналогичной задаче для коэффициентов $a_1^{(i)}$:

$$Q_2 a_2 = T_2 a_0 = d, \qquad (I.6)$$

где T_2 – тоже трехдиагональная матрица, порождающая вторые разделенные разности $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, и тогда уравнения системы имеют вид:

$$\alpha_i a_2^{(i-1)} + 2a_2^{(i)} + \beta_i a_2^{(i+1)} = 3f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \qquad (I.7)$$

где $\alpha_i = h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)^{-1}$, $\beta_i = 1-\alpha_i$.

Для непериодических сплайнов уравнения (I.7) справедливы для $i=1,\dots,N-1$, и к ним добавляются граничные условия:

$$\begin{aligned} &2a_2^{(0)} + \beta_0 a_2^{(1)} = d_{20}, \\ &\alpha_N a_2^{(N-1)} + 2a_2^{(N)} = d_{2N}, \end{aligned} \qquad (I.8)$$

где коэффициенты β_0, α_N и правые части d_{20}, d_{2N} зависят от вида граничных условий (I.3). Матрица Q_2 имеет размерность $(N+1)\times(N+1)$, а T_2 – $(N+1)\times(N+3)$.

В периодическом случае $a_2^{(0)} = a_2^{(N)}$, $a_0^{(0)} = a_0^{(N)}$, и тогда в (I.7) $i=0,\dots,N-1$. Обе матрицы Q_2 и T_2 – размерности $N\times N$ и имеют элементы в левом нижнем и правом верхнем углах. В дальнейшем нам будет удобнее в этом случае считать, что с концом отрезка b совпадает точка x_{N+1}, а не x_N. Тогда вектор a_2 всегда будет $(N+1)$-мерным, а матрица Q_2 размерности $(N+1)\times(N+1)$.

Коэффициенты $a_1^{(i)}$ и $a_3^{(i)}$ выражаются через $a_2^{(i)}$ по формулам:

$$a_1^{(i)} = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{h_i}{3}(2a_2^{(i)} + a_2^{(i+1)}), \qquad (I.9)$$

$$a_3^{(i)} = \frac{1}{3h_i}(a_2^{(i+1)} - a_2^{(i)}), \qquad (I.10)$$

$$i = 0,\dots,N-1.$$

При сделанном предположении множество кубических сплайнов на сетке Δ есть $(N+1+\gamma)$-мерное векторное пространство $F(a,b)(\gamma=2)$, в котором периодические сплайны образуют $(N+1)$-мерное подпространство ($\gamma=0$).

3. Существование и единственность. Матрица системы (I.7) в периодическом случае – положительно-определенная с доминирующими диагональными элементами. Для непериодических сплайнов с условиями (I.8) доминируемость сохраняется, если $\max(|\beta_0|, |\alpha_N|) < 2$. В частности, это имеет место для граничных условий (I.4) [I] и в некоторых других примерах [2]. В этом случае решение системы (I.7) существует и единственно.

При других ограничениях на коэффициенты задача рассматривалась в [I], но полное её решение получено В.Л.Мирошниченко. В работе [3] им установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения. Оно может быть найдено методом прогонки [I-3], а при равноотстоящих узлах и в явном виде [I,2].

4. Сходимость интерполяционных процессов. Пусть $\{\Delta_k\}$ – последовательность сеток на отрезке $[a,b]$ и $H_k = \max_i h_{ki}$, $h_k = \max h_{ki}$. Относительно расстояний между узлами в некоторых случаях предполагается, что

$$\frac{H_k}{h_k} \le K < \infty \qquad (I.11)$$

или

$$\max_{|i-l|=1} \frac{h_{ki}}{h_{kl}} \le \rho \quad (1 \le \rho < \rho^* < \infty). \qquad (I.12)$$

Если Δ_k – фиксированное разбиение отрезка $[a,b]$, то непрерывную на $[a,b]$ функцию $f(x)$ будем характеризовать максимумом колебания на сетке Δ_k

$$\sigma_k(f) = \max_i \max_{(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}) \in [x_{ki}, x_{k\,i+1}]} |f(\overset{2}{x}) - f(\overset{1}{x})|. \qquad (I.13)$$

Другой характеристикой является модуль непрерывности

$$\omega(f;H) = \max_{|\overset{2}{x} - \overset{1}{x}| \le H} |f(\overset{2}{x}) - f(\overset{1}{x})|. \qquad (I.14)$$

Очевидно, если Δ_k имеет максимальный шаг не больше чем H_k, то $\sigma_k(f) \le \omega(f; H_k)$.

Пусть $f(x) \in C^{\sigma}[a,b]$ ($\sigma = 0,1,2,3$) и $S_k(f; H_k)$ – интерполяционный кубический сплайн на Δ_k. Оценки остаточных членов самих функций и их производных в периодическом случае имеют вид [2]:

$$|\mathcal{D}^q R_k(x)| = |\mathcal{D}^q[f(x) - S_k(f;x)]| \leq b_{\sigma q}\, v_k(\mathcal{D}^\sigma f) H_k^{\sigma - q} \quad (q \leq \sigma), \qquad \text{(I.I5)}$$

где $b_{\sigma q}$ – константы, не зависящие ни от x, ни от k, а только от σ и q, а также от ρ или K, если $\sigma = 0$ или 3.

Из (I.I5) следует, что если $\{\Delta_k\}$ – последовательность разбиений такая, что $H_k \to 0$ при $k \to \infty$, то интерполяционные процессы сходятся равномерно. Этот факт удобнее выразить через модули непрерывности и H_k:

$$|\mathcal{D}^q R_k(x)| \leq b_{\sigma q}\, \omega(\mathcal{D}^\sigma f; H_k) H_k^{\sigma - q} \to 0 \quad (q \leq \sigma) \qquad \text{(I.I6)}$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Для фактического вычисления погрешности интерполяции нужно знать величину коэффициентов $b_{\sigma q}$ в (I.I5). Этому вопросу посвящено более десятка работ. Здесь мы приводим только последние результаты для каждого из случаев $\sigma = 0,\text{I},2,3$ и некоторые их следствия.

а) $f(x) \in C^0[a,b]$. Оценка (I.I5) имеет место при ограничениях на шаги. Для ограничения (I.II) в [2] найдено значение $b_{00} = 1 + \frac{3}{4}K$. Для условий (I.I2) Н.Л.Зматраковым [4] показано, что сходимость имеет место при $\rho^* = (3+\sqrt{5})/2$ и это значение точное в том смысле, что при $\rho \geq \rho^*$ процесс расходится. Однако оценку, сделанную в [4], можно улучшить и получить значение коэффициента $b_{00} = 1 + \frac{3}{4} g(\rho, j)$, где

$$g(\rho,j) = \frac{\rho^{1+j}(\rho + \sqrt[j]{\rho^{-1}})}{2\rho(1+\rho) - (\rho^3 + \sqrt[j]{\rho})} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

При $j = \text{I}$ вещественный корень знаменателя $\rho^* = 1 + \sqrt{2}$ и получаем результат работы [2]. При $j \to \infty$ корень равен $(3 + \sqrt{5})/2$. Выбор j зависит от конкретных условий задачи. При $\rho = \text{I}$ b_{00} от j не зависит и равно 7/4.

б) $f(x) \in C^1[a,b]$. Оценки имеют место без предположений (I.II) или (I.I2). Методика их нахождения для $\mathcal{D}R_k(x)$, использованная в [I,2], позволяет получить $b_{22} = 4$ (вместо $b_{11} = 5$ в [2]). Тот же способ, но примененный для $R_k(x)$ дает $b_{10} = 9/8$ (в [2] было 5/2).

в) $f(x) \in C^2[a,b]$. Здесь оценки также имеют место без ограничений на шаги. Значение коэффициента $b_{22} = 4$ [2]. Аналогичным образом можно найти $b_{21} = \text{I}$, $b_{20} = 3/8$ (в [2] $b_{21} = 4$, $b_{20} = \text{I}$).

г) $f(x) \in C^3[a,b]$. Для этого класса снова оценку $\mathcal{D}^3 R_k(x)$ удается получить только при ограничениях на шаги. В случае (I.II) методика работ [I,2] позволяет найти значение $b_{33} = 1 + 2K$ (вместо $b_{33} = 1 + 3K$ в [2]). При ограничениях (I.I2), по сообщению Н.Л.Зматракова, точное значение $\rho^* = (3 + \sqrt{5})/2$, как и для класса $C^0[a,b]$. Коэффициент $b_{33} = 1 + 2g(\rho, j)$. Остальные оценки $\mathcal{D}^q R_k(x)$ ($q = 0,\text{I},2$) не требуют ограничений на шаги, и можно получить следующие значения коэффициентов: $b_{32} = 5/4$, $b_{31} = \text{I}/2$, $b_{30} = 23/192$.

д) Если функция $f(x)$ обладает в своем классе более сильными свойствами дифференцируемости, то порядок сходимости в некоторых случаях может быть повышен. Например, $\mathcal{D}^\sigma f(x) \in Lip\,\alpha$ ($\sigma = 0,\text{I},2,3$). Тогда $\omega(\mathcal{D}^\sigma f; H_k) \leq L H_k$, и порядок сходимости в (I.I6) по H_k увеличивается до $H_k^{\sigma - q + \alpha}$ [I,2,4].

е) В частности, если $f(x) \in C^4[a,b]$, то

$$\omega(\mathcal{D}^3 f; H_k) \leq \max_{x \in [a,b]} [\mathcal{D}^4 f(x)] H_k.$$

Оценки сходимости будут

$$|\mathcal{D}^q R_k(x)| \leq b_{4q} \max_{x \in [a,b]} |\mathcal{D}^4 f(x)| H_k^{4-q}, \qquad \text{(I.I7)}$$

и это наивысший порядок для интерполяционных кубических сплайнов дефекта I. В работе Холла [5] получены значения коэффициентов: $b_{43} = \frac{1}{2}(1 + K^2)$, $b_{42} = \frac{1}{12}(1 + 3K)$, $b_{41} = (9 + \sqrt{3})/216$, $b_{40} = 5/384$. Для случая $f(x) \in C^6[a,b]$ и равных шагов близкие результаты получены в [6].

В последнее время выяснилось, что порядок сходимости в ряде случаев сохраняется, если интерполируемая функций $f(x)$ обладает хотя бы кусочно-непрерывными производными $\mathcal{D}^\sigma f(x)$ на $[a,b]$ [7,8]. В частности, в работе [8] показано, что сохраняется наивысший порядок (I.I7), если $f(x) \in C^2[a,b]$ и производная $\mathcal{D}^4 f(x)$ кусочно-непрерывна.

Для непериодических сплайнов оценки (I.I5) в общем случае либо усложняются, либо даже не верны. Однако для функций $f(x)\in C^{\sigma}[a,b]$ $(\sigma\ge 1)$ и граничных условий вида (I.4) они выполняются. С вопросами сходимости для более общих граничных условий можно познакомиться по работам [I-4,I7].

Самостоятельную область исследования составляют асимптотические оценки при $k\to\infty$. Они относятся главным образом к периодическим функциям с равными шагами интерполяции [9,I0].

Асимптотический характер носит, в частности, известная теорема [I,2]: если $f(x)\in C^4[a,b]$ и Δ_k – такая последовательность, что

$$\lim_{k\to\infty}\max_{|i-\ell|=1}\frac{h_{ki}}{h_{k\ell}}=1, \qquad (I.I8)$$

то для периодических сплайнов и сплайнов с граничными условиями типа I

$$\lim_{k\to\infty}\max_{i}\left|\frac{\mathcal{D}^3S_k(f;x_{ki}+)-\mathcal{D}^3S_k(f;x_{ki}-)}{H_k}-\mathcal{D}^4f(x_i)\right|=0. \qquad (I.I9)$$

При этом максимум модуля ограничен сверху $\max|g_{ki}(\mathcal{D}^4f)|$, где $g_{ki}(\mathcal{D}^4f)$ – некоторая линейная комбинация $\mathcal{D}^4f(x_{i+s})$, стремящаяся к нулю при $k\to\infty$, так же, как $\sigma_k(\mathcal{D}^4f)$.

§ 2. Задача интерполирования мультикубическими сплайнами. Существование и единственность решения

Пусть R^n – n-мерный параллелепипед в пространстве переменных $x=(x^1,\dots,x^n)$. Множествами гиперплоскостей

$$L^j: a^j = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{i_j}^j < \dots < x_{N^j}^j = b^j \quad (j=1,\dots,n)$$

он делится на ячейки R_i^n, $i=(i_1,\dots,i_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мультикубическим сплайном дефекта I относительно сетки $\Delta=\prod_{j=1}^{n}(\times\Delta^j)$ называется функция $S(x)$, обладающая двумя свойствами: а) в каждой ячейке R_i^n $S(x)$ является мультикубическим полиномом

$$P_i(x)=a^{(i_1\dots i_n)}_{\nu_1\dots\nu_n}(x^1-x^1_{i_1})^{\nu_1}\dots(x^n-x^n_{i_n})^{\nu_n} \qquad (2.I)$$

(по индексам ν_j тензорная сумма от 0 до 3); б) в R^n $S(x)$ непрерывна вместе с производными $\mathcal{D}^{(p)}S(x)=\mathcal{D}^{p_1}\dots\mathcal{D}^{p_n}S(x)$ до порядка $2n$, что обозначается как $S(x)\in C^{(2)}[R^n]$.

I. Постановка задачи. Множество мультикубических сплайнов относительно сетки Δ представляет собой конечномерное векторное пространство $F(R^n)$, которое можно рассматривать как тензорное произведение n пространств $F(a^j,b^j)$ кубических сплайнов одной переменной с размерностями N^j+1+r^j (r^j = 0 или 2). Такая точка зрения позволяет легко определить структуру данных – значений функции на сетке узлов Δ и граничных условий – в многомерной интерполяционной задаче.

Будем обозначать через $\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_\ell}$ множество узлов, принадлежащих $(n-\ell)$-мерным границам параллелепипеда R^n, где j_α – номера фиксированных на $\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_\ell}$ переменных x^{j_α}, т.е. $x^{j_\alpha}=a^{j_\alpha}$ или b^{j_α}.

Сформулируем задачу интерполирования. Найти мультикубический сплайн $S(f;x)$ на сетке Δ, интерполирующий заданное множество значений f_i в узлах сетки, $S(f;x_i)=f_i$ для всех $x_i\in\Delta$. Вследствие (2.I) это означает, что

$$a^{(i_1\dots i_n)}_{0\dots0}=f_{i_1\dots i_n} \quad (i=0,\dots,N^j). \qquad (2.2)$$

При этом $S(f;x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$A_{x^{j_1}}\dots A_{x^{j_\ell}}S=a^{(i_1\dots i_n)}_{0\dots0} \qquad (2.3)$$

(операторы $A_{x^{j_\alpha}}$, очевидно, перестановочны) для каждого множества узлов $\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_\ell}$. Здесь верхние индексы суть

$i_{j_\alpha}=-1$, если $x^{j_\alpha}=a^{j_\alpha}$,

$i_{j_\alpha}=N^{j_\alpha}+1$, если $x^{j_\alpha}=b^{j_\alpha}$,

$i_{j_1}=0,\dots,N^j$, если $j\notin\{j_\alpha\}$.

Аналогами граничных условий (I.4) являются усло[illegible] вида

$$\mathcal{D}^{(p)}S(f,x_i)=\mathcal{D}^{(p)}f(x_i)\quad (x_i\in\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_l})$$

или

$$\frac{a_{0\dots0}^{(i_1\dots i_n)}}{(t^{j_1})^{p_{j_1}}\dots(t^{j_l})^{p_{j_l}}}=\mathcal{D}^{p_{j_1}}\dots\mathcal{D}^{p_{j_l}}f(x^1_{i_1},\dots x^n_{i_n})\qquad(2.4)$$

$$(x_i\in\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_l}),$$

где p_{j_α} = I или 2 (типы I или II); i_j определены выше; наконец,

$$t^{j_\alpha}=-h_0^{j_\alpha},\ \text{если}\ x^{j_\alpha}=a^{j_\alpha},$$
$$t^{j_\alpha}=h^{j_\alpha}_{N^{j_\alpha}-1},\ \text{если}\ x^{j_\alpha}=b^{j_\alpha}.$$

Условия $x_i\in\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_l}$ означают, что сначала перебираются ($n-1$)-мерные граничные гиперплоскости, затем ($n-2$)-мерные ребра (их границы) и т.д. до 0-мерных вершин параллелепипеда. И, таким образом, каждому граничному узлу x_i соответствует столько условий, скольким множествам $\Delta^{\Gamma}_{j_1\dots j_l}$ он принадлежит.

Мультикубический сплайн может быть периодическим по всем переменным $x^{j'}$ или их части с периодами $\pi^{j'}=b^{j'}-a^{j'}$. Аналогами условий (I.5) являются условия

$$\mathcal{D}^{(p)}S(f;x_i)\Big|_{x^{j'}=a^{j'}}=\mathcal{D}^{(p)}S(f;x_i)\Big|_{x^{j'}=b^{j'}}\ (x_i\in\Delta^{\Gamma}_{j'})\qquad(2.5)$$

для p_j = I,2. Как и §I, будем предполагать, что $b^{j'}=x^{j'}_{N^{j'}+1}$.

Множество коэффициентов $a_0^{(i)}$, определяемых исходной информацией (2.2) задачи, представим себе размещенными в узлах сетки Δ. За счёт граничных условий сетка расширяется на один слой со стороны каждой из ($n-1$)-мерных граней, и только по тем переменным, по которым имеет место периодичность, расширения не происходит.

2. Определяющие уравнения. Если у мультикубического сплайна зафиксировать все переменные, кроме одной x^j, то он превращается в кубический сплайн по x^j. Кубическими сплайнами будут и производные $\mathcal{D}^{(p)}S(f;x)$, не содержащие дифференцирования по x^j.

Кубические сплайны на одномерных отрезках $[a^j, b^j]$ сетки Δ описываются соотношениями вида (I.6)-(I.I0). Эти соотношения определяются исходными данными многомерной задачи, т.е. равенствами (2.2) и граничными условиями (2.3) с простыми операторами A_{aj} и A_{bj} и условиями гладкости сплайна. Так, имеют место системы уравнений типа (I.6):

$$Q_2^{(j)}a^{(r_1\dots j\dots r_n)}_{\nu_1\dots2\dots\nu_n}=T_2^{(j)}a^{(r_1\dots j\dots r_n)}_{\nu_1\dots0\dots\nu_n},\qquad(2.6)$$

где $\nu_\beta=0$, $r_\beta=0,\dots,N^\beta$ $(\beta\ne j)$. Здесь символ j и нижние индексы 0 и 2 стоят на j-м месте; $a^{(r_1\dots j\dots r_n)}_{\nu_1\dots2\dots\nu_n}$ и $a^{(r_1\dots j\dots r_n)}_{\nu_1\dots0\dots\nu_n}$ – (N^j+1) - и ($N^j+1+\gamma^j$)-мерные векторы соответственно с компонентами $a^{(r_1\dots i_j\dots r_n)}_{\nu_1\dots2\dots\nu_n}$ и $a^{(r_1\dots i_j\dots r_n)}_{\nu_1\dots0\dots\nu_n}$.

Значения $a^{(r_1\dots r_n)}_{0\dots0}$, определяемые граничными условиями на ($n-l$)-мерных гранях параллелепипеда R^n, параллельных оси x^j, могут быть проинтерполированы кубическими сплайнами с граничными условиями, заданными на их ($n-l-1$)-мерных границах. Интерполяционные задачи будут по-прежнему описываться уравнениями (2.6), только индексы r_α, отвечающие фиксированным на данном ребре переменным, будут в непериодическом случае вместе со значениями $0,\dots,N^\alpha$ пробегать значения $-1, N^\alpha+1$. Поэтому в уравнениях (2.6) в данном случае будем считать, что $r_\beta=-1,\dots,N^\beta+1$ $(\beta\ne j)$ ($r_\beta=0,\dots,N^\beta$, если по x^j сплайн периодический).

После того, как решены все одномерные задачи по x^j, включая интерполяцию граничных условий, можно найти коэффициенты с индексами $\nu_{j'}=2$, $r_{j'}=i_{j'}$ и $\nu_j=2$, $r_j=i_j$ (остальные нижние индексы-нули). Они определяются системами типа (2.6), где справа стоят векторы из коэффициентов с индексами $\nu_j=2$, $r_j=i_j$. Аналогично коэффициенты с тремя индексами $\nu_\beta=2$ определяются через коэффициенты с двумя индексами, равными 2 и т.д.

Коэффициенты, у которых среди нижних индексов имеются I и 3, находятся по формулам, аналогичным (I.9) и (I.I0):

$$\alpha^{(i_1\dots i_j\dots i_n)}_{\nu_1\dots 1\dots\nu_n} = \frac{1}{h^j_{i_j}}\left[\alpha^{(i_1\dots i_j+1\dots i_n)}_{\nu_1\dots 0\dots\nu_n} - \alpha^{(i_1\dots i_j\dots i_n)}_{\nu_1\dots 0\dots\nu_n}\right] -$$

$$-\frac{h^j_{i_j}}{3}\left[\alpha^{(i_1\dots i_j+1\dots i_n)}_{\nu_1\dots 2\dots\nu_n} + 2\alpha^{(i_1\dots i_j\dots i_n)}_{\nu_1\dots 2\dots\nu_n}\right]; \quad (2.7)$$

$$\alpha^{(i_1\dots i_j\dots i_n)}_{\nu_1\dots 3\dots\nu_n} = \frac{1}{3h^j_{i_j}}\left[\alpha^{(i_1\dots i_j+1\dots i_n)}_{\nu_1\dots 2\dots\nu_n} - \alpha^{(i_1\dots i_j\dots i_n)}_{\nu_1\dots 2\dots\nu_n}\right] \quad (2.8)$$

$$(i_j = 0,\dots, N^j - 1).$$

3. С у щ е с т в о в а н и е и е д и н с т в е н н о с т ь р е ш е н и я. Как показано выше, многомерная интерполяционная задача сводится к решению одномерных задач. Нетрудно видеть, что по каждой из переменных x^j решения всех одномерных задач либо одновременно существуют и единственны, либо нет. Отсюда очевидна

ТЕОРЕМА I. З а д а ч а и н т е р п о л и р о в а н и я м у л ь т и к у б и ч е с к и м с п л а й н о м с г р а н и ч н ы м и у с л о в и я м и (2.3) и л и у с л о в и я м и п е р и о д и ч н о с т и (2.5) и м е е т и п р и т о м е д и н с т в е н н о е р е ш е н и е, е с л и с у щ е с т в у ю т е д и н с т в е н н ы е р е ш е н и я о д н о м е р н ы х з а д а ч п о в с е м п е р е м е н н ы м x^j.

§ 3. Вычислительные алгоритмы

Схемы вычислений могут быть различными. Опишем одну из них.

Исходные данные будем представлять размещенными в узлах расширенного параллелепипеда $\overline{R^n}$ (расширение по тем переменным, по которым сплайн непериодический).

Формируем матрицы $Q^{(1)}$ и $T^{(1)}$ и находим $\alpha^{(i_1 z_2\dots z_n)}_{20\dots 0}$ как решения одномерных задач в количестве $\prod_{\alpha=2}^{n}(N^\alpha+1+\gamma^\alpha)$. Затем формируются матрицы $Q^{(2)}$ и $T^{(2)}$ и определяются коэффициенты, у которых второй нижний индекс 2, а именно: по исходным данным находятся $\alpha^{(i_1 i_2 z_3\dots z_n)}_{020\dots 0}$, а по результатам первого шага $\alpha^{(i_1 i_2 z_3\dots z_n)}_{220\dots 0}$. Число решаемых задач будет $2(N^1+1)\prod_{\alpha=3}^{n}(N^\alpha+1+\gamma^\alpha)$. Далее определяются коэффициенты с третьим индексом 2, затем с четвертым индексом и т.д. Коэффициенты можно вычислять в порядке, соответствующем двоичной записи (с 2 вместо I) изменяемой группы индексов. Таким способом будут перебраны все коэффициенты с нижними индексами $\nu_j = 0{,}2$. Для этого придется решить M одномерных задач

$$M = \sum_{j=1}^{n}\sum_{z=0}^{j-1} C^z_{j-1}\prod_{\alpha=1}^{j-1}(N^\alpha+1)\prod_{\alpha=j+1}^{n}(N^\alpha+1+\gamma^\alpha),$$

где C^z_{j-1} – число сочетаний из $j-1$ по z. Например, при $n=2$ $M=2N^1+N^2+3+\gamma^2$ [I2,I6].

Коэффициенты, у которых среди нижних индексов имеются I и 3, находятся по формулам (2.7) и (2.8).

§ 4. Частичные мультикубические сплайны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $S_z(y,z)$, $y=(x^1,\dots,x^z)$, $z=(x^{z+1},\dots,x^n)$ в области R^n с сеткой Δ, являющаяся мультикубическим сплайном только по z переменным из n, называется ч а с т и ч н ы м м у л ь т и к у б и ч е с к и м с п л а й н о м р а н г а z.

Коэффициенты такого сплайна предполагаются непрерывными функциями остальных $n-z$ переменных в R^n. Например, если $S_z(x)$ есть частичный мультикубический сплайн по первым z переменным, то его уравнения в ячейках $R^n_{i_1\dots i_z}$ суть

$$P_{i_1\dots i_z}(y,z) = \alpha^{(i_1\dots i_z)}_{\nu_1\dots\nu_z}(z)(x^1-x^1_{i_1})^{\nu_1}\dots(x^z-x^z_{i_z})^{\nu_z}, \quad (4.I)$$

где по ν_j проводится суммирование от 0 до 3.

Для частичных сплайнов можно ставить задачу интерполирования. Рассмотрим её для функции $f(x)$ и сплайнов ранга I. По следам функции на гиперплоскостях Δ^1 можно найти $\alpha^{(i_1)}_0(z)=f(x^1_{i_1},z)$

$(i_1=0,\ldots,N^1)$. При этом если $f(x)$ – периодическая по x^1 функция с периодом $\pi^1=b^1-a^1$, то можно построить интерполяционный кубический сплайн $S_1(x^1,z)$, зависящий от вектора z, как параметра, и периодический по x^1. Если это не так, то нужно задать еще две функции $a_0^{(-1)}(z)$ и $a_0^{(N^1+1)}(z)$, имеющие смысл граничных условий функции $f(x)$ по переменной x^1. В обоих случаях будут получены частичные сплайны ранга I.

Согласно (I.7)–(I.10) коэффициенты этих сплайнов $\alpha_{\nu_1}^{(i_1)}(z)$ ($\nu_1=1,2,3;\ i_1=0,\ldots,N^1-1$) линейно зависят от исходных данных $a_0^{(i_1)}(z)$ $(i_1=-1,\ldots,N^1+1)$. Если функции обладают непрерывными производными до порядка $\mathcal{D}^{(\sigma)}a_0^{(i_1)}(z)$, $\sigma=(0,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, то можно построить частичные сплайны по множествам функций $\mathcal{D}^{(q)}a^{(i_1)}(z)$, $q=(0,q_2,\ldots,q_n)$ при $q_j\le\sigma_j$. Очевидно, что операции интерполирования и дифференцирования по параметрическим переменным перестановочны.

Функцию $S_1(x^1,z)$ проинтерполируем частичным сплайном ранга I по переменной x^2. Новая функция будет частичным сплайном ранга 2 $S_2(x^1,x^2,z)$. Этот процесс можно продолжить и, в конце концов, получить мультикубический сплайн по всем переменным, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ.

§ 5. Сходимость интерполяционных процессов

I. Обозначения. Пусть рассматривается последовательность $\{\Delta_k\}$ различных разбиений области R^n. По аналогии с функциями одной переменной вводим обозначения $h_k^j=\min\limits_{i_j} h_{ki_j}^j$, $H_k^j=\max\limits_{i_j} h_{ki_j}^j$ и предполагаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} H_k^j=0$ дл. всех $j=1,\ldots,n$. При этом на шаги h_{ki_j} могут налагаться ограничения типа (I.II) и (I.I2) с константами K^j и ρ^j.

Будем рассматривать приращение непрерывной функции $f(x)$ по одной переменной, например, x^{j_1} в слое $R_{ki_{j_1}}^1$, выделяемом из R^n гиперплоскостями $x^{j_1}=x_{i_{j_1}}^{j_1}$ и $x^{j_1}=x_{i_{j_1}+1}^{j_1}$, считая остальные переменные параметрами. Обозначим приращение

$$\delta_{ki_{j_1}}^{j_1} f=f(\overset{2}{x}{}^{j_1},z)-f(\overset{1}{x}{}^{j_1},z)\quad(\overset{1}{x}{}^{j_1},\overset{2}{x}{}^{j_2}\in R_{ki_{j_1}}^1).$$

Приращение функции по двум переменным x^{j_1} и x^{j_2} в пересечении слоев $R_{ki_{j_1}i_{j_2}}^2=R_{ki_{j_1}}^1\cap R_{ki_{j_2}}^1$ определяется как приращение величины $\delta_{ki_{j_1}}^{j_1} f$ по переменной x^{j_2}. Вообще, приращение функции по r переменным x^{j_α} $(\alpha=1,\ldots,r)$ есть

$$\delta_{ki_{j_1}\ldots i_{j_r}}^{j_1\ldots j_r} f=\delta_{ki_{j_1}\ldots i_{j_{r-1}}}^{j_1\ldots j_{r-1}} f(\overset{2}{x}{}^{j_r},z)-$$

$$-\delta_{ki_{j_1}\ldots i_{j_{r-1}}}^{j_1\ldots j_{r-1}} f(\overset{1}{x}{}^{j_r},z)\quad(\overset{1}{x}{}^{j_r},\overset{2}{x}{}^{j_r}\in R_{ki_{j_r}}^1).$$

Очевидно, порядок переменных в этом выражении роли не играет. Для любых r переменных x^{j_α} $(\alpha=1,\ldots,r)$ из n имеем

$$\delta_{ki_{j_1}\ldots i_{j_r}}^{j_1\ldots j_r} f=\sum_{\{e_1\ldots e_r\}}(-1)^{e_1+\ldots+e_r} f(\overset{e_1}{x}{}^{j_1},\ldots,\overset{e_r}{x}{}^{j_r},x^{j_r+1},\ldots,x^{j_n}),\qquad(5.I)$$

где сумма берется по всем комбинациям $e_\alpha=1,2$.

Функция $f(x)$ характеризуется на сетке Δ_k функциями (сравни с (I.I3))

$$\omega_k^{j_1\ldots j_r}(f)=$$

$$=\max_{\{i_{j_1}\ldots i_{j_r}\}}\ \max_{\overset{e_1}{x}{}^{j_1},\ldots,\overset{e_r}{x}{}^{j_r}\in R_{ki_{j_1}\ldots i_{j_r}}^r}\left|\delta_{ki_{j_1}\ldots i_{j_r}}^{j_1\ldots j_r} f\right|,\qquad(5.2)$$

которые зависят от переменных $z=(x^{r+1},\ldots,x^n)$.

Отметим также, что

$$\omega_k^{j_1\ldots j_r}(f)=\max_{i_{j_r}}\ \max_{\overset{1}{x}{}^{j_r},\overset{2}{x}{}^{j_r}\in R_{i_r}^1}\omega_k^{j_1\ldots j_{r-1}}(\delta_{i_{j_r}}^{r} f).\qquad(5.3)$$

Характеристиками функции $f(x)$, зависящими не от сетки Δ_k^j, а только от шагов H_k^j, будут модули непрерывности.

Частный модуль непрерывности по переменной x^{j_1} есть

$$\omega(f;\, H_k^{j_1}) = \max_{z\in R^n} \max_{|\overset{2}{x}{}^{j_1} - \overset{1}{x}{}^{j_1}| \le H_k^{j_1}} \left| f(\overset{2}{x}{}^{j_1}, z) - f(\overset{1}{x}{}^{j_1}, z)\right|. \tag{5.4}$$

Смешанные модули непрерывности определяются так:

$$\omega(f; H_k^{j}, \dots, H_k^{j_r}) =$$

$$= \max_{z\in R^n} \max_{\substack{\{|\overset{2}{x}{}^{j_\alpha} - \overset{1}{x}{}^{j_\alpha}| \le H_k^{j_\alpha}\} \\ (\alpha = 1,\dots,r)}} \left| \sum_{\substack{\{e_\alpha\} \\ (\alpha=1,\dots,r)}} (-1)^{e_1+\dots+e_r} f(\overset{e_1}{x}{}^{j_1}, \dots, \overset{e_r}{x}{}_{j_r}, z) \right| \tag{5.5}$$

В отличие от случая одной переменной здесь берется максимум по переменным $z = (x^{r+1}, \dots, x^n)$, по которым нет приращений. Очевидно, если шаги на $\Delta_k^{j_\alpha}$ $(\alpha = 1, \dots, r)$ не больше $H_k^{j_\alpha}$, то

$$v^{j_1 \dots j_r}(f) \le \omega(f, H_k^{j_1}, \dots, H_k^{j_r}). \tag{5.6}$$

Модули непрерывности суть непрерывные функции своих аргументов $H_k^{j_\alpha}$ в параллелепипеде $0 \le H_k^{j_\alpha} \le b^{j_\alpha} - a^{j_\alpha}$ $(\alpha = 1, \dots, r)$. Они стремятся к нулю, если к нулю стремится хотя бы один из аргументов.

Понятия функций $v_k^{j_1 \dots j_r}(f)$ и модулей непрерывности имеют смысл и для производных $\mathcal{D}^{(q)} f(x)$, если они непрерывны в R^n.

2. Сходимость для функций класса $C^{\sigma}[R^n]$ $(\sigma_j \le 3,\ j = 1, \dots, n)$. При этом, вообще говоря, σ_j могут быть различными. В основе исследования лежит

ЛЕММА I. Пусть $f(x) \in C^{(\sigma)}[R^n]$ и для некоторого r $\sigma_r \le 3$. Пусть $S_{k1}(x^r, z)$ – частичный сплайн ранга I, интерполирующий $f(x)$ по x^r. Тогда если при $\sigma_r = 0$ или 3 выполняются условия типа (I.II) или (I.I3), то

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x^r, z) - S_{k1}(x^r, z)]\right| = O(1)\,\omega(\mathcal{D}^{(\sigma^r)} f; H_k^r)(H_k^r)^{\sigma_r - q_r} \to 0,$$

$$\sigma^r = (q_1, \dots, q_{r-1}, \sigma_r, q_{r+1}, \dots, q_n), \quad q_j \le \sigma_j \quad (j = 1, \dots, n) \tag{5.7}$$

равномерно по x в R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для частичного сплайна ранга I сохраняют силу оценки сходимости, полученные для одной переменной (I.I5), а именно:

$$\left|\mathcal{D}^{q_r}[f(x^r, z) - S_{k1}(x^r, z)]\right| \le b_{\sigma_r q_r}\, v_k^r(\mathcal{D}^{\sigma_r} f)(H_k^r)^{\sigma_r - q_r}. \tag{5.8}$$

В силу перестановочности операций интерполирования и дифференцирования по параметрическим переменным эта оценка будет верна для любых $q = (q_1, \dots, q_n)$ $(q_j \le \sigma_j)$. Но тогда на основании (5.6) и свойств частного модуля непрерывности следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) \in C^{\sigma}[R^n]$ $(\sigma_j \le 3,\ j = 1, \dots, n)$ и $S_k(f; x)$ – мультикубический сплайн, интерполирующий $f(x)$. Тогда если при $\sigma_j = 0$ или 3 выполняются условия типа (I.II) или (I.I2), то

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x) - S_k(f; x)]\right| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{j_r = 1}^{n} \sum_{j_{r-1} = l-1}^{j_r - 1} \dots \sum_{j_{r-l+1} = 1}^{j_{r-l+2} - 1} O_{j_r \dots j_{r-l+1}}(1)\, \omega(\mathcal{D}^{(\sigma^\omega)} f; H_k^{j_{r-l+1}}, \dots, H^{j_r}) \times$$

$$\times \left(H_k^{j_{r-l+1}}\right)^{\sigma_{j_{r-l+1}} - q_{j_{r-l+1}}} \dots \left(H_k^{j_r}\right)^{\sigma_{j_r} - q_{j_r}} \to 0 \quad (q_{j_\alpha} \le \sigma_{j_\alpha}) \tag{5.9}$$

равномерно по x в R^n. При этом порядок производной $\mathcal{D}^{(\sigma^\omega)} f(x)$ определяется как $\sigma^\omega = (\sigma_1^\omega, \dots, \sigma_n^\omega)$, где $\sigma_{j_\alpha}^\omega = \sigma_{j_\alpha}$ $(\alpha = r - l + 1, \dots, r)$ и $\sigma_{j_\beta}^\omega = q_{j_\beta}$ $(\beta \ne \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем представлять интерполяционный процесс как последовательное интерполирование частичных сплайнов ранга $r-1$ сплайнами ранга r в порядке возрастания номеров переменных. При этом можно записать

$$\left|D^{(q)}[f(x)-S(f;k)]\right| \le \sum_{r=1}^{n} \left|D^{(q)}[S_{r-1}(y,z)-S_r(y,z)]\right|, \qquad (5.10)$$

где $S_0(y,z)=f(x)$. Здесь и в дальнейшем ради сокращения записей индекс k в выкладках опускается.

На каждом шаге интерполяционного процесса по лемме I имеем оценки

$$\left|D^{(q)}[S_{r-1}(y,z)-S_r(y,z)]\right| \le b_{\sigma_r q_r} v^r(D^{(\sigma^r)}S_{r-1})(H_k^r)^{\sigma_r-q_r}. \qquad (5.11)$$

Найдем оценку величины $v^r(D^{(\sigma^r)}S_{r-1})$. Согласно (5.2)

$$v^r(D^{(\sigma^r)}S_{r-1}) \le$$

$$\le \max_{i_j} \max_{(x^r,\tilde{x}^r)\in R^1_{i_r}} \left\{\left|\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-1} - \delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-2}\right| + \left|\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-2}\right|\right\} \qquad (5.12)$$

Первый модуль в правой части этого выражения представляет собой остаточный член интерполирования функции $\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-2}$ частичным сплайном $\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-1}$ по x^{r-1}, и в силу (5.8)

$$\left|\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-1} - \delta^r_{i_r}D^{(\sigma^r)}S_{r-2}\right| \le$$

$$\le b_{\sigma_{r-1}q_{r-1}} v^{r-1}(\delta^r_{i_r}D^{(\sigma^{r-1,r})}S_{r-2})(H_k^{r-1})^{\sigma_{r-1}-q_{r-1}}, \qquad (5.13)$$

где $\sigma^{r-1,r}=(q_1,\dots,q_{r-2},\sigma_{r-1},\sigma_r,q_{r+1},\dots,q_n)$.

Из (5.3), (5.12) и (5.13) следует

$$v^r(D^{(\sigma^v)}S_{r-1}) \le v^r(D^{(\sigma^v)}S_{r-2}) +$$

$$+ b_{\sigma_{r-1}q_{r-1}} v^{r-1,r}(D^{(\sigma^v)}S_{r-2})(H_k^{r-1})^{\sigma_{r-1}-q_{r-1}}. \qquad (5.14)$$

Здесь и в дальнейшем в выражениях $v^{j_{r-l}\cdots j_r}(D^{(\sigma^v)}S_{r-l-1})$ в порядке производной $D^{(\sigma^v)}$ $\sigma^v_{j_\alpha}=\sigma_{j_\alpha}$ для $\alpha=r-l,\dots,r$ и $\sigma^v_{j_\beta}=q_{j_\beta}$ для $\beta\neq\alpha$.

Применяя оценку (5.14) последовательно к $v^r(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-1}-1})$ $(j_{r-1}=r-1,\dots,2)$, получаем:

$$v^r(D^{(\sigma^v)}S_{r-1}) \le v^r(D^{(\sigma^v)}f) +$$

$$+\sum_{j_{r-1}=1}^{r-1} b_{\sigma_{j_{r-1}}q_{j_{r-1}}} v^{j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-1}-1})(H^{j_{r-1}})^{\sigma_{j_{r-1}}-q_{j_{r-1}}}$$

Аналогично неравенству (5.15) для пересечения слоев $R^2_{i_{j_{r-1}}i_r}$ можно получить неравенство

$$v^{j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-1}-1}) \le v^{j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}f) +$$

$$+\sum_{j_{r-2}=1}^{j_{r-1}-1} b_{\sigma_{j_{r-2}}q_{j_{r-2}}} v^{j_{r-2}j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-2}-1})(H^{j_{r-2}})^{\sigma_{j_{r-2}}-q_{j_{r-2}}}.$$

Вообще, для пересечения слоев $R^l_{i_{j_{r-l+1}}\dots i_{j_{r-1}}i_r}$ при $l=1,2,\dots,r-1$

$$v^{j_{r-l+1}\cdots j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-l+1}-1}) \le v^{j_{r-l+1}\cdots j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}f) +$$

$$+\sum_{j_{r-l}=1}^{j_{r-l+1}-1} b_{\sigma_{j_{r-l}}q_{j_{r-l}}} v^{j_{r-l}\cdots j_{r-1}r}(D^{(\sigma^v)}S_{j_{r-l}-1})(H^{j_{r-l}})^{\sigma_{j_{r-l}}-q_{j_{r-l}}}.$$

Применяя к правой части (5.15) последовательно оценки (5.16) при $l=2,\dots,r-1$, получаем

$$\upsilon^{r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} S_{r-1}\right) \le \upsilon^{r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{r-1}\left\{\sum_{j_{r-1}=l}^{r-1}\dots\sum_{j_{r-l}=1}^{j_{r-l+1}-1} b_{\sigma_{j_{r-1}}q_{j_{r-1}}}\dots b_{\sigma_{j_{r-l}}q_{j_{r-l}}}\, \upsilon^{j_{r-l}\dots j_{r-1} r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(H^{j_{r-1}}\right)^{\sigma_{j_{r-1}}-q_{j_{r-1}}}\dots\left(H^{j_{r-l}}\right)^{\sigma_{j_{r-l}}-q_{j_{r-l}}}\right\}. \qquad (5.17)$$

Подставляя это выражение в (5.II) и вводя вместо индекса l $l' = l+1$, можно записать

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[S_{r-1}(y,x) - S_r(y,x)]\right| \le$$

$$\le\sum_{l'=1}^{r}\left\{\sum_{j_{r-1}=l'-1}^{r-1}\dots\sum_{j_{r-l'+1}=1}^{j_{r-l'+2}-1} b_{\sigma_r q_r}\dots b_{\sigma_{j_{r-l'+1}}q_{j_{r-l'+1}}}\,\upsilon^{j_{r-l'+1}\dots j_{r-1} r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(H^{r}\right)^{\sigma_r-q_r}\dots\left(H^{j_{r-l'+1}}\right)^{\sigma_{j_{r-l'+1}}-q_{j_{r-l'+1}}}\right\}. \qquad (5.18)$$

Теперь можно подсчитать правую часть в (5.I0), подставляя в нее выражение (5.I8):

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x) - S(f;x)]\right| \le$$

$$\le\sum_{r=1}^{n}\sum_{l'=1}^{r}\left\{\sum_{j_{r-1}=l'-1}^{r-1}\dots\sum_{j_{r-l'+1}=1}^{j_{r-l'+2}-1} b_{\sigma_r q_r}\dots b_{\sigma_{j_{r-l'+1}}q_{j_{r-l'+1}}}\,\upsilon^{j_{r-l'+1}\dots j_{r-1} r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(H^{r}\right)^{\sigma_r-q_r}\dots\left(H^{j_{r-l'+1}}\right)^{\sigma_{j_{r-l'+1}}-q_{j_{r-l'+1}}}\right\}. \qquad (5.19)$$

Переставим местами первую и вторую суммы справа, учитывая очевидное равенство

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{l'=1}^{r} c_{r l'} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j_r=l}^{n} c_{j_r l}.$$

Тогда, возвращаясь к обозначениям формулы (5.9),

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x) - S_k(f;x)]\right| \le$$

$$\le\sum_{l=1}^{n}\sum_{j_r=l}^{n}\sum_{j_{r-1}=l-1}^{j_r-1}\dots\sum_{j_{r-l+1}=1}^{j_{r-l+2}-1} b_{\sigma_{j_r} q_{j_r}}\dots b_{\sigma_{j_{r-l+1}}q_{j_{r-l+1}}}\,\upsilon^{j_{r-l+1}\dots j_r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f\right)\times$$

$$\times\left(H_k^{j_r}\right)^{\sigma_{j_r}-q_{j_r}}\dots\left(H_k^{j_{r-l+1}}\right)^{\sigma_{j_{r-l+1}}-q_{j_{r-l+1}}}. \qquad (5.20)$$

Это и есть искомая оценка остаточного члена интерполяции мультикубическими сплайнами. В правой части (5.20) заменим функции $\upsilon^{j_{r-l+1}\dots j_r}(\mathcal{D}^{(\sigma^{\upsilon})} f)$ модулями непрерывности согласно (5.6). Тогда из свойств модулей следует утверждение теоремы.

Правую часть в (5.9) можно представить иначе, а именно как сумму последовательных сумм выражений с частными модулями непрерывности $O_j(1)\,\omega(\mathcal{D}^{(\sigma^{\omega})} f; H_k^j)(H_k^j)^{\sigma_j - q_j}$, затем со смешанными модулями по двум переменным $H_k^{j\alpha}$, $H_k^{j\beta}$, по трем и т.д. до выражения с модулем непрерывности по всем переменным. Для случая $n=2$ этот результат получен автором в [16].

Теорема 2 имеет место при $q_j \le \sigma_j$. Если $q_j < \sigma_j$, то члены в правой части (5.9), содержащие произведения величин $(H_k^j)^{\sigma_j - q_j}$, будут малыми более высокого порядка относительно H_k^j, и вместо формулы (5.9) имеем

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x) - S_k(f;x)]\right| = \sum_{j=1}^{n} O_j(1)\,\omega(\mathcal{D}^{(\sigma^{\omega})} f; H_k^j)(H_k^j)^{\sigma_j - q_j} \to 0. \qquad (5.21)$$

3. Сходимость для функций класса $C^{(\sigma)}[R^n]$ $(\sigma_j = 4)$. Как и в случае одной переменной, порядок сходимости по $H_k^{j\alpha}$ повышается, если по соответствующим переменным $x^{j\alpha}$ функция $f(x)$ обладает в своем классе более сильными свойствами дифференцируемости. Здесь мы рассмотрим практически важный случай $f(x) \in C^{(\sigma)}[R^n]$ $(\sigma_j = 4)$.

В этом случае будем рассматривать формулу (5.20) для $f(x)\in C^{(\sigma)}[R^n]$ $(\sigma_j=3)$. Тогда согласно (5.2) входящие в (5.20) функции v_k удовлетворяют неравенствам

$$v_k^{j_{r-\ell+1}\dots j_r}\left(\mathcal{D}^{(\sigma^{\nu})}f\right)\le \max_{x^{j_{r-\ell+1}},\dots,x^{j_r}\in R^n}\left|\mathcal{D}^{(\sigma^m)}f(x)\right|H_k^{j_{r-\ell+1}}\dots H_k^{j_r}, \qquad (5.22)$$

где $\sigma_{j_\alpha}^m=4$ $(\alpha=r-\ell+1,\dots,r)$ и $\sigma_{j_\beta}^m=q_{j_\beta}\le 3$ $(\beta\ne\alpha)$.

Подставляя (5.22) в (5.20), видим, что члены суммы по ℓ при $\ell>1$ малые более высокого порядка относительно $H_k^{j_\alpha}$, чем при $\ell=1$, для всех $q_{j_\alpha}\le 3$. Таким образом, теорема 2 имеет

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $f(x)\in C^{(\sigma)}[R^n]$ $(\sigma_j=4)$ и пусть $S_k(f;x)$ – мультикубический сплайн, интерполирующий $f(x)$. Если на шаги наложены ограничения вида (I.II) или (I.I2), то

$$\left|\mathcal{D}^{(q)}[f(x)-S_k(f;x)]\right|=\sum_{j=1}^{n}O_j(1)\,(H_k^j)^{4-q_j}\to 0 \quad (q_j\le 3) \qquad (5.23)$$

равномерно по x в R^n.

Для случая двух переменных этот вопрос решен в [I].

В заключение рассмотрим теорему, являющуюся многомерным аналогом теоремы, выраженной формулой (I.I9).

Введем понятие разрыва производных мультикубического сплайна $\mathcal{D}^{(\tau')}S(x)$, где $\tau_j'=0$ или 3, на гиперплоскостях Δ^j и их пересечениях, являющихся многообразиями размерностей $n-\ell$ $(\ell=1,\dots,n)$.

На гиперплоскостях $x^1=x^1_{i_1}$ ...ерпит разрыв третья частная производная $\mathcal{D}^{3_1}S(x^1,z)$, $z=(x^2,\dots,x^n)$, что обозначаем как

$$[\mathcal{D}^{3_1}S(x^1_i,z)]_1=\mathcal{D}^{3_1}S(x^1_{i_1}+,z)-\mathcal{D}^{3_1}S(x^1_{i_1}-,z). \qquad (5.24)$$

На пересечении гиперплоскостей $x^1=x^1_{i_1}$ и $x^2=x^2_{i_2}$ разрывна производная $\mathcal{D}^{3_2}[\mathcal{D}^{3_1}S(x^1_i,x^2,z)]_1$. На пересечении трех гиперплоскостей – следующая производная и т.д. Вообще

$$[\mathcal{D}^{(3_1\dots 3_r)}S(x^1_{i_1},\dots,x^r_{i_r},z)]_{1\dots r}=$$

$$=\mathcal{D}^{3_r}[\mathcal{D}^{(3_1\dots 3_{r-1})}S(x^1_{i_1},\dots,x^{r-1}_{i_{r-1}},x^r_{i_r}+,z)]_{1\dots r-1}-$$

$$-\mathcal{D}^{3_r}[\mathcal{D}^{(3_1\dots 3_{r-1})}S(x^1_{i_1},\dots,x^{r-1}_{i_{r-1}},x^r_{i_r}-,z)]_{1\dots r-1} \qquad (5.25)$$

для всех $r=1,\dots,n$. Полный разрыв в точке $x_i=(x^1_{i_1},\dots,x^n_{i_n})$ обозначаем $[\mathcal{D}^{(3)}S(x_i)]_{1\dots n}$. Разумеется, разрывы не зависят от порядка перебора переменных.

ЛЕММА 2. Пусть $f(x)=C^{\sigma}[R^n]$ $(\sigma_j=4,\ j=1,\dots,n)$ и пусть $S_{k1}(x^r,z)$ – частичный сплайн ранга I, интерполирующий $f(x^r,z)$ на Δ_k^r, либо периодический по x^r, либо с граничными условиями типа I. Если для шагов $h^r_{k i_r}$ выполняются условия (I.I8), то

$$\lim_{k\to\infty}\max_{i_r}\left|\frac{1}{H_k^r}\left[\mathcal{D}^{(\nu)}S_{k1}(x^r_{i_r},z)\right]_r-\mathcal{D}^{(\sigma)}f(x^r_{i_r},z)\right|=0, \qquad (5.26)$$

где $\nu=(q_1,\dots,q_{r-1},3,q_{r+1},\dots,q_n)$, $\sigma=(q_1,\dots,q_{r-1},4,q_{r+1},\dots,q_n)$, $q_j\le 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для частичного сплайна ранга I, интерполирующего $f(x)$ по x^r, сохраняет силу теорема, выраженная формулой (I.I9). При этом, как было отмечено,

$$\max_{i_r}\left|\frac{1}{H_k^r}[\mathcal{D}^{3_r}S_{k_1}(x^r_{i_r},z)]_r-\mathcal{D}^{4_r}f(x^r_{i_r},z)\right|=\max_{i_r}\left|q^r_{i_r}(\mathcal{D}^{4_r}f)\right|\to 0 \qquad (5.27)$$

при $k\to\infty$ как $v_k^r(\mathcal{D}^{4_r}f)$. Учитывая перестановочность операций интерполирования и дифференцирования по параметрическим переменным, получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x)\in C^{\sigma}[R^n]$ $(\sigma_j=4)$ и пусть $S_k(f;x)$ – мультикубический сплайн, интерполирующий $f(x)$ с граничными условиями типа I или условиями периодичности. Тогда если для всех $h^j_{k i_j}$ выполняются условия (I.I8), то

$$\lim_{k\to\infty}\max_i\left|\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} H^j_k}[\mathcal{D}^{(3)}S_k(f;x_i)]_{1\ldots n}-\mathcal{D}^{(4)}f(x_i)\right|=0. \qquad (5.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 2, будем представлять интерполяционный процесс последовательного интерполирования частичных сплайнов ранга $r-1$ сплайнами ранга r в порядке возрастания номеров переменных. Тогда можно записать (индексы k опущены)

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{n} H^j\right)^{-1}[\mathcal{D}^{(3)}S(f;x_i)]_{1\ldots n}-\mathcal{D}^{(4)}f(x_i)\right|\le$$

$$\le\sum_{r=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{r-1}H^j\right)^{-1}\left|(H^r)^{-1}[\mathcal{D}^{(\tau_r)}S_r(x_i)]_{1\ldots r}-[\mathcal{D}^{(\tau_{r-1})}S_{r-1}(x_i)]_{1\ldots r-1}\right|,$$

где $\tau_r=(\overbrace{3,\ldots,3}^{r},\overbrace{4,\ldots,4}^{n-r})$, и следует считать $[\mathcal{D}^{(\tau_0)}S_0(x_i)]_0=\mathcal{D}^{(4)}f(x_i)$.

К каждому члену U^r суммы справа будем применять лемму 2. Учитывая (5.27), получим

$$U^r=\left(\prod_{j=1}^{r-1}H^j\right)^{-1}\left|g^r\left([\mathcal{D}^{(\tau_{r-1})}S_{r-1}]_{1\ldots r-1}\right)\right|.$$

Далее проделаем с правой частью процедуру, аналогичную уже применявшейся в (5.I2).

$$U^r\le\left(\prod_{j=1}^{r-2}H^j\right)^{-1}\left\{\left|g^r\left(\frac{1}{H^{r-1}}[\mathcal{D}^{(\tau_r-1)}S_{r-1}]_{1\ldots r-1}-[\mathcal{D}^{(\tau_r-2)}S_{r-2}]_{1\ldots r-2}\right)\right|+\left|g^r\left([\mathcal{D}^{(\tau_r-2)}S_{r-2}]_{1\ldots r-2}\right)\right|\right\}.$$

Применяя лемму 2 повторно, находим

$$U^r\le\left(\prod_{j=1}^{r-2}H^j\right)^{-1}\left\{\left|g^r[\mathcal{D}^{(\tau_{r-2})}S_{r-2}]_{1\ldots r-2}\right|+\left|g^r\left(g^{r-1}\left([\mathcal{D}^{(\tau_{r-2})}S_{r-2}]_{1\ldots r-2}\right)\right)\right|\right\}$$

В результате осуществлен переход от частичных сплайнов ранга $r-1$ к сплайнам ранга $r-2$, и одновременно из произведения исключен множитель H^{r-1}. Это первый шаг. Повторяя указанную процедуру $r-1$ раз, приходим в правой части к сумме вида (5.I7) от выражений

$$g^r(g^{j_{r-1}}(\ldots g^{j_{r-\ell}}(\mathcal{D}^{(4)}f(x_{i,s}))\ldots)). \qquad (5.29)$$

Подставляя полученную оценку для U^r в (5.28), получаем оценку левой части через выражения вида (5.29). Так как при $k\to\infty$ $g^{j_{r-\ell}}(\mathcal{D}^{(4)}f(x_{i,s}))\to0$ для всех $j_{r-\ell}$ и всех точек x_i, то стремятся к нулю и выражения (5.29). Отсюда и следует утверждение теоремы. Для $n=2$ она доказана в [I6].

Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и её приложения. М., "Мир", I972.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками (сплайнами). –В кн.: Вычислительные системы. Вып.38, Новосибирск, I970, с. 23–73.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применения к исследованию кубической сплайн-интерполяции. –Настоящий сборник, с.29–49.

4. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. Труды МИ АН СССР, I975, т.I38, с. 7I–93.

5. HALL C.A. On error bounds for spline interpolation. –"J.Approx.Theory", 1968, v.1, N 2, p.209–218.

6. SWARTZ B. O(h^{2n+2-1}) bounds on some spline interpolation erros.–"Bull.Amer.Math.Soc.", 1968, v.74, N 6, p.1072–1078.

7. ANDRIA G.D., BYRNE G.D., HALL C.A. Convergence of cubic spline interpolants of functions posessing discontinuites. –"J.Approx.Theory", 1973, v.8, N 2, p.150–159.

8. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполировании кубическими сплайнами. –В кн.: Вычислительные системы. Вып.56, Новосибирск, I973, с. I8–22.

9. ВЕЛИКИН В.Л.Приближение кубическими сплайнами на классах непрерывно-дифференцируемых функций.-"Мат.заметки",1972, т. II, № 2, с.215-226.

10. ЖЕНСЫКБАЕВ А.А. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению.-"Мат.заметки", 1973, т.13, № 6, с. 807-816.

11. РЯБЕНЬКИЙ В.С., ФИЛИППОВ А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. Приложение. М., ГИТТЛ, 1965.

12. De BOOR C. Bicubic spline interpolations. - "J. Math. Phys.",1962,v.41, N 3,p.212-218

13. BIRKHOFF G., de BOOR C. Picewise polynomial interpolation and approximation. - In: Approximation of Functions. (Ed. H.Garabedian), Amsterdam, Elsevier, 1965.

14. BIRKHOFF G. Picewise bicubic interpolation and approximation in polygons. - In: Approximations with special emphasis on spline functions. (Ed.I.J.Schoenbirg). New York-London,Acad. Press, 1969.

15. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кусочно-полиномиальными функциями одной и двух переменных. -В сб.: Математические вопросы геофизики, вып. I, 1969, с.125-141.

16. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С.Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами). -В кн.: Вычислительные системы.Вып.38,Новосибирск, 1970, с.74-101.

17. HALL C.A. Natural cubic and bicubic spline interpolation.- "SIAM J.Numer.Anal.",1973,v.10, N 6,p.1055-1060.

18. CARLSON R.E., HALL C.A. Error bounds for bicubic spline interpolation. - "J.Approxim.Theory",1973,v.7,N 1,p.41-47.

19. CARLSON R.E., HALL C.A. On piecewise polynomial interpolation in rectangular polygons. - "J.Aproxim.Theory", 1971 , v.4, N 1,p.37-53.

20. CARLSON R.E., HALL C.A. Bicubic spline interpolation in rectagular polygons. - "J.Approx. Theory", 1972, v.6, N 4, p.366-377.

21. FERGUSON J. Multivariable curve interpolation. - "Journal ACM",1964,v.11, N 2,p.221-228.

22. COONS S.A. Surfaces for computer-aided design on space forms. Report MAC-TR-41. Massachusetts Institute of Technology. 1967.

23. GORDON W.J. Spline-blended surface interpolation through curve networks. - "J.Math.Mech.",1969,v.18,N 10,p.931-952.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 сентября 1975 г.