518.5

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СПЛАЙНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.Имамов

Пусть $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ – прямоугольник в плоскости переменных (t,s), а $\Delta=\Delta_t\times\Delta_s$ – прямоугольная сетка на нем, где

$$\Delta_t: a=t_0<t_1<\ldots<t_{N_1}=b,\ \ \Delta_s: c=s_0<s_1<\ldots<s_{N_2}=d.$$

Зафиксируем два вектора $m=[m_1,m_2]$, $\mu=[\mu_1,\mu_2]$ с целочисленными компонентами такие, что $1\leqslant\mu_j\leqslant m_j$ $(j=1,2)$.

Функция $\sigma=\sigma(t,s)$, определенная на Ω и обладающая свойствами:

I) $D^{(2m_1,0)}\sigma=D^{(0,2m_2)}\sigma=0$ для $(t,s)\in(t_{i_1},t_{i_1+1})\times(s_{i_2},s_{i_2+1})$;

2) $D^{(p_1,p_2)}\sigma$ $(p_j=0,1,\ldots,2m_j-\mu_j-1;\ j=1,2)$ непрерывны на Ω, т.е. $D^{(p_1,p_2)}\sigma\in C[\Omega]$;

3) $D^{(m_1,0)}\sigma=0$ вне $[a,b]$; $D^{(0,m_2)}\sigma=0$ вне $[c,d]$,

называется полиномиальным сплайном с естественными краевыми условиями дефекта μ.

Введем оператор A, действующий по формуле $Ax=[D^{(\nu_1,\nu_2)}x|_\Delta$, $\nu_j=0,1,\ldots,\mu_j-1;\ j=1,2]\in E_n$, где E_n есть $n=\mu_1\mu_2(N_1+1)(N_2+1)$ – мерное евклидово пространство. Пусть $z=[z^{\nu_1\nu_2}_{i_1 i_2},\ i_j=0,1,\ldots,N_j;\ \nu_j=0,1,\ldots,\mu_j-1;\ j=1,2]\in E_n$. В [I] показано, что полиномиальный сплайн дефекта μ во множестве $I_z=\{x\in B_2^m|Ax=z\}$ минимизирует функционал

$$\|D^{(m_1,m_2)}x\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{I}$$

где B_2^m – гильбертово пространство ([2, гл.IУ, §49; гл. IX § 27]):

$$B_2^m=B_2^m(\Omega)=\left\{x(t,s)\ \middle|\ \begin{array}{l} D^{(p_1,p_2)}x\in C[\Omega],\ p_j=0,1,\ldots,m_j-1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j=1,2, \\ D^{(p_1,p_2)}x\in L_2(\Omega),\ p_j=0,1,\ldots,m_j. \end{array}\right\}$$

Из-за бесконечности множества решений уравнений $D^{(m_1,m_2)}x=0$ с условиями $D^{(\nu_1,\nu_2)}x|_\Delta=0$ $(\nu_j=0,1,\ldots,\mu_j-1;\ j=1,2)$, такое решение не единственно. На этот факт впервые внимание обратил Ю.С.Завьялов [3]. Чтобы получить экстремальные свойства, принадлежащие только полиномиальным сплайнам дефекта μ, он ввел новый функционал на некотором подпространстве B_2^m [3]. В настоящей заметке мы получаем подобные свойства только за счет усложнения функционала.

Всюду предположим, что $\mu_j(N_j+1)\geqslant m_j$ $(j=1,2)$. Кроме того, определим оператор

$$T=[D^{(m_1,m_2)},\ D^{(\nu_1,m_2)}\cdot|_{\Delta_t},\ D^{(m_1,\nu_2)}\cdot|_{\Delta_s},\ \nu_j=0,1,\ldots,\mu_j-1;\ j=1,2],$$

отображающий линейно и непрерывно пространство B_2^m в

$$Y=L_2(\Omega)\times[L_2(a,b)]^{\mu_2(N_2+1)}\times[L_2(c,d)]^{\mu_1(N_1+1)}.$$

ТЕОРЕМА I. Полиномиальный сплайн $\sigma=\sigma(t,s)=\sigma(T,A,z)\in I_z$ дефекта μ является единственным решением задачи

$$\|T\sigma\|^2_Y=\min_{x\in I_z}\|Tx\|^2_Y=\min_{x\in I_z}\Big\{\|D^{(m_1,m_2)}x\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\sum_{\nu_1=0}^{\mu_1-1}\sum_{i_1=0}^{N_1}\|D^{(\nu_1,m_2)}x(t_{i_1},s)\|^2_{L_2(c,d)}+$$
$$+\sum_{\nu_2=0}^{\mu_2-1}\sum_{i_2=0}^{N_2}\|D^{(m_1,\nu_2)}x(t,s_{i_2})\|^2_{L_2(a,b)}\Big\}, \tag{2}$$

Этот сплайн называют интерполяционным [4,5].

Случай $\mu_1=\mu_2=1$ рассматривали Д.Артур [6] и Менсфилд [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество

$$\|Tx-T\xi\|_Y^2=\|Tx\|_Y^2-2(T\xi,Tx-T\xi)_Y-\|T\xi\|_Y^2. \quad (3)$$

Интегрируя по частям, легко показать, что $(T\sigma, Tx-T\sigma)_Y=0$, если $\sigma, x\in I_z$ [I, §5.I и § 8.3].

Тогда из (3) вытекает, что $\|T\sigma\|_Y^2\le\|Tx\|_Y^2$ для всех $x\in I_z$. Докажем единственность интерполяционного сплайна.

Если $\sigma_1,\sigma_2\in I_z$ и $\|T\sigma_1\|_Y^2=\|T\sigma_2\|_Y^2=\min\limits_{x\in I_z}\|Tx\|_Y^2$, то $A(\sigma_1-\sigma_2)=T(\sigma_1-\sigma_2)=0$.

Пусть $\sigma_1-\sigma_2=\psi(t,s)$. Тогда

$$D^{(m_1,m_2)}\psi=D^{(\nu_1,m_2)}\psi|_{\Delta_t}=D^{(m_1,\nu_2)}\psi|_{\Delta_s}=0$$

$$(\nu_j=0,1,\dots,\mu_j-1;\ j=1,2).$$

Обозначим $D^{(0,m_2)}\psi=u$ и $D^{(m_1,0)}\psi=v$. Докажем, что $u(t,s)=0$. Имеем

$$\begin{cases} u(t,s)=\varphi_0(s)+\varphi_1(s)t+\dots+\varphi_{m_2-1}(s)t^{m_1-1}, \\ D^{(\nu_1,0)}u|_{\Delta_t}=0 \qquad (\nu_1=0,1,\dots,\mu_1-1). \end{cases}$$

Нахождение функций $\varphi_{\nu_2}(s)$ $(\nu_2=0,1,\dots,m_2-1)$ в этой задаче есть задача эрмитовой интерполяции нулевых условий алгебраическими полиномами, которая при $\mu_1(N_1+1)\ge m_1$ имеет единственное решение $u(t,s)=0$. Аналогично доказывается, что $v(t,s)=0$.

Следовательно, $\psi(t,s)$ есть полином степени m_1-1 по t и m_2-1 по s, имеющий $\mu_1\mu_2(N_1+1)(N_2+1)\ge m_1m_2$ нулей, т.е. $\psi(t,s)\equiv 0$ или $\sigma_1\equiv\sigma_2$.

Существование интерполяционного сплайна $\sigma\in I_z$ вытекает из его единственности для каждого z, так как получаемые уравнения для неизвестных коэффициентов сплайна являются системой линейных уравнений с правой частью, зависящей от вектора z также линейно [I].

ТЕОРЕМА 2. Единственным решением $\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(t,s)=\sigma^\alpha(T,A,z)$ $(\alpha>0)$ задачи

$$M_\alpha[\sigma^\alpha,z]=\min_{x\in B_2^m}M_\alpha[\sigma^\alpha,z]=\min_{x\in B_2^m}\Big\{\|Tx\|_Y^2+$$

$$+\alpha\sum_{\nu_1=0}^{\mu_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{\mu_2-1}\sum_{i_1=0}^{N_1}\sum_{i_2=0}^{N_2}[D^{(\nu_1,\nu_2)}x(t_{i_1},s_{i_2})-z_{i_1i_2}^{\nu_1\nu_2}]^2\Big\} \quad (4)$$

является полиномиальный сплайн дефекта μ.

Этот сплайн называют сглаживающим [4,5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (4) в виде

$$M_\alpha[\sigma^\alpha,z]=\min_{x\in B_2^m}\left\{\|Tx\|_Y^2+\alpha\|Ax-z\|_{E_n}^2\right\}. \quad (5)$$

Рассмотрим тождество

$$\|Tx-T\xi\|_Y^2+\alpha\|Ax-A\xi\|_{E_n}^2=M_\alpha[x,z]-M_\alpha[\xi,z]-$$

$$-2\left\{(T\xi,Tx-T\xi)_Y+\alpha(A\xi-z,\ Ax-A\xi)_{E_n}\right\}. \quad (6)$$

Зафиксируем функцию $\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(T,A,z)$ по формуле

$(T\sigma^\alpha,Tx)_Y+\alpha(A\sigma^\alpha-z,Ax)_{E_n}=0$ для всех $x\in B_2^m$. (7)

Тогда из (6) вытекает, что $\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(T,A,z)$ будет решением задачи (4). Покажем, что $\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(T,A,z)$ существует и единственно. Для этого достаточно показать, что линейное уравнение (7) при $z=0$ имеет только нулевое решение.

Пусть $z=0$. Подставляя в (7) $x=\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(T,A,0)$, имеем $\|T\sigma^\alpha\|_Y^2+\alpha|A\sigma^\alpha|_{E_n}^2=0$, т.е. $T\sigma^\alpha(T,A,0)=A\sigma^\alpha(T,A,0)=0$. Из доказательства теоремы I вытекает, что $\sigma^\alpha(T,A,0)=0$. Это решение также единственно.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $\sigma^\alpha=\sigma^\alpha(T,A,z)$ есть полиномиальный сплайн дефекта μ. Пусть $z^\alpha=A\sigma^\alpha$. Для этого элемента построим интерполяционный сплайн $\sigma_\alpha=\sigma(T,A,z^\alpha)$. Тогда из свойств сплайнов σ_α и σ^α имеем

$$\| T\sigma_\alpha \|^2_Y \le \| T\sigma^\alpha \|^2_Y ;$$

$$\| T\sigma^\alpha \|^2_Y + \alpha \| A\sigma^\alpha - z \|^2_{E_n} \le \| T\sigma_\alpha \|^2_Y + \alpha \| A\sigma_\alpha - z \|^2_{E_n} ,$$

т.е. $\| T\sigma_\alpha \|_Y = \| T\sigma^\alpha \|_Y$ или $T(\sigma^\alpha - \sigma^\alpha) = 0$. Учитывая равенство $A(\sigma^\alpha - \sigma_\alpha) = 0$ и доказательство теоремы I, имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma(T, A, z^\alpha) \equiv \sigma^\alpha = \sigma^\alpha(T, A, z) .$$

Поскольку сглаживающий сплайн σ^α совпадает с интерполяционным сплайном $\sigma_\alpha = \sigma(T, A, z^\alpha)$ $(z^\alpha = A\sigma^\alpha)$, то он обладает и всеми его свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы I и 2 можно доказать по схеме Лорана [5, гл.IУ], который в одномерном случае аналогичные теоремы получил по признакам сплайнов, используя одномерную формулу Тейлора. Для их доказательства нужно использовать признаки сплайнов и двумерную формулу Тейлора для функций $x(t, s) \in B_2^m$.

В заключение отметим возможные обобщения полученных результатов. Во-первых, можно рассматривать случай большего числа переменных, во-вторых, можно усложнять оператор T, заменяя частные производные линейными дифференциальными операторами; в-третьих, можно также усложнять оператор A, чтобы учитывать некоторые краевые условия, отличные от естественных краевых условий.

Автор считает своим долгом выразить благодарность Ю.С.Завьялову за неоднократное обсуждение результатов настоящей заметки.

Литература

I. AHLBERG J.H., WALSH E.N., WALSH J.L. The theory of splines and their application. Acad.Press, N.Y. and L., 1967.

2. SARD A. Linear approximation. - In: Mathematical Surveys, N 9. American Mathematical Society, Previdence, Rhole Island, 1963.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство бикубических многозвенников (сплайнов) и задача сглаживания. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42, Новосибирск, 1970, с. 109-158.

4. ATTEIA M. Etude de certains neyaux et theerie des fonctrons "spline" en analyse numerique. These. Universite de Grenoble, 1966.

5. LAURENT P.J. Approximation et optimization. Paris, Hermann, 1972.

6. ARTHUR D.W. Multivariate spline functions. I. Construction, Properties and Computation. - "J.Appr.theory", 1974, v.12, N 4, p.396-411.

7. MANSFIELD L. On the variational approach to defining splines on L-shaped regions. - "J.Appr.theory", 1974, v.12, N 2, p.99-112.

Поступила в ред.-изд.отд.
II августа 1975 года