ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 518.517.949.12

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ

А. Имамов

Рассматривается задача сглаживания элемента гильбертова пространства, который является проявлением некоторой характеристики изучаемого физического объекта. Сглаживание заданного элемента (информации) осуществляется с помощью сглаживающих сплайнов. В такой постановке задача сглаживания исходной информации сводится к нахождению сглаживающего сплайна и последующему вычислению требуемых величин.

В статье предложен один общий метод для нахождения сглаживающих сплайнов. Для клеточных сглаживающих сплайнов предлагается применить дискретное преобразование Фурье. При этом решение задачи выписывается явно с помощью формул Фурье.

1. Постановка задачи. Пусть изучаемый объект характеризуется элементом x, принадлежащим пространству X. Часто x недоступно для прямого изучения, и исследуется его некоторое проявление $z = Ax$, $z \in Z = AX$, т.е. Z – образ пространства X при отображении, осуществляемом оператором A. В свою очередь, элемент z обычно получается путем измерения, и потому известен нам приближенно, т.е. $z = Ax + \xi$, где ξ – случайная ошибка. Требуется сгладить элемент z, т.е. найти элемент z^α, где $\alpha > 0$ – параметр, такой, что: 1) z^α близок к z; 2) $z^\alpha = A x^\alpha$, где x^α обладает более хорошими вычислительными свойствами и свойствами гладкости, чем элемент x.

Пусть $\sigma^\alpha = \sigma^\alpha(T, A, z)$ – сглаживающий сплайн (см. [2]), т.е. он является решением следующей вариационной задачи

$$M_\alpha[\sigma^\alpha, z] = \min_{x \in X} M_\alpha[x, z] = \min_{x \in X} \left\{ \|Tx\|_Y^2 + \alpha \|Ax - z\|_Z^2 \right\}, \quad (1)$$

где X, Y, Z – действительные гильбертовы пространства $T: X \to Y$, $A: X \to Z$ – линейные непрерывные операторы, $\alpha > 0$ – параметр сглаживания. Тогда задача сглаживания элемента z сводится к вычислению элемента $z^\alpha = A\sigma^\alpha$.

Установим связь между исходным и сглаженным элементами z и $z^\alpha = A\sigma^\alpha$. Пусть $P = Y \times Z$ – гильбертово пространство элементов вида $p = [y, z]$ со скалярным произведением $(p_1, p_2)_P$ и нормой $\|p\|_P$, где $p_1 = [y_1, z_1]$, $p_2 = [y_2, z_2]$, а

$$(p_1, p_2)_P = (y_1, y_2)_Y + \alpha (z_1, z_2)_Z, \quad \|p\|_P^2 = (p, p)_P. \quad (2)$$

Введем оператор $L: X \to P$, действующий по формуле $Lx = [Tx, Ax]$.

Тогда уравнение Эйлера для сплайна $\sigma^\alpha = \sigma^\alpha(T, A, z)$ имеет следующий вид:

$$L^* L \sigma^\alpha = L^* p_0 = \alpha A^* z, \quad (3)$$

где $L^*L = T^*T + \alpha A^*A$, $p_0 = [0, z]$. Если требовать, чтобы сплайн σ^α существовал и был единственным, то $T^*T + \alpha A^*A$ – ограниченный положительно определенный оператор, и, следовательно, оператор $(T^*T + \alpha A^*A)^{-1}$ существует и ограничен. Тогда формула

$$z^\alpha = A\sigma^\alpha = \alpha A (T^*T + \alpha A^*A)^{-1} A^* z \quad (4)$$

устанавливает связь между исходным и сглаженным элементами z и z^α. Оператор сглаживания $B_\alpha = \alpha A (T^*T + \alpha A^*A)^{-1} A^*$ ограничен и самосопряжен.

В дальнейшем предположим, что параметр α, учитывающий известную информацию о величине ξ, уже выбран (см. [4,5]). Предположим также, что существует единственный сглаживающий сплайн $\sigma^\alpha = \sigma^\alpha(T, A, z)$ для каждого $z \in Z$. Для этого достаточно предположить, что $R(T) = Y$, $R(A) = Z$ и $N(T) + N(A)$ замкнуто, $N(T) \cap N(A) = \{0\}$, где $R(T)$ – область значений, $N(T)$ – ядро оператора T [2].

2. Приближенный метод для операторных сглаживающих сплайнов. Переходим к приближенному решению задачи сглаживания в общем случае. Решение задачи сглаживания в пространстве X сведем к решению задач сглаживания на последовательности конечномерных подпрост-

ранств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, полной в X. Под полнотой последовательности конечномерных подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ понимается следующее: для любого элемента $x \in X$ находятся элементы $x_n \in X_n$ такие, что

$$\| x - x_n \|_X \le \delta(n; x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть σ_n^α – решение задачи (I) в подпространстве X_n.

ТЕОРЕМА. Пусть система подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в X и сглаживающий сплайн σ^α существует и единствен. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \| \sigma_n^\alpha - \sigma^\alpha \|_X = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требование существования и единственности σ^α обеспечивает положительную определенность оператора $L^* L$ [2]. Тогда уравнение Эйлера (3) может быть решено приближенно методом Ритца на последовательности конечномерных подпространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Приближенные решения по Ритцу сходятся к точному решению уравнения (3) по норме пространства X [3]. Функционал энергии для уравнения (3) имеет следующий вид:

$$F[x] = (L^* L x, x)_X - 2(L^* \rho_0, x)_X = M_\alpha[x, z] - \|\rho_0\|^2. \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что задачи о минимуме функционалов $F[x]$ и $M_\alpha[x, z]$ эквивалентны, и, следовательно, упомянутые приближенные решения по Ритцу для уравнения (3) можно получить, минимизируя функционал $M_\alpha[x, z]$ на последовательности конечномерных подпространств $\{X_n\}_{n=1}$, полной в X.

Теорема доказана.

Используя априорные оценки метода Ритца, можно оценить разность $\sigma_n^\alpha - \sigma^\alpha$. Существует постоянное число C такое, что (см. [3, § 53-54])

$$\| \sigma_n^\alpha - \sigma^\alpha \|_X \le C \inf_{x_n \in X_n} \| x_n - \sigma^\alpha \|_X .$$

3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В случае функций одной переменной ДПФ определяется следующим образом (см. [4,6]). Пусть в точках $t_k = k \Delta t$

($k = 0, 1, \ldots, N-1$, N – натуральное число, $\Delta t = a/N$, $a > 0$) заданы значения $z_k = z(t_k)$ функции $z(t)$. ДПФ ряда значений z_k (Z_ℓ) определяется следующими формулами

$$Z_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(-i(\omega_\ell t_k)), \quad \ell = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (6)$$

где $\omega_\ell = \ell \Delta\omega$, $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$, $\Delta\omega = 2\pi/a$. Справедливы формулы обратного ДПФ:

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} Z_\ell \exp(i \omega_\ell t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (7)$$

Кроме того, имеет место основное тождество

$$\sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} |Z_\ell|^2. \quad (8)$$

Эти формулы справедливы и в случае функций многих переменных. Справедливость многомерных формул Фурье доказывается повторным применением одномерных формул Фурье. Приведем двумерные аналоги формул (6)-(8).

Пусть $R = [0, a_1] \times [0, a_2]$ – прямоугольник в плоскости (t^1, t^2). В точках прямоугольной сетки ($t^1_{k_1}$, $t^2_{k_2}$), $0 \le k_j \le N_j - 1$, $j = 1, 2$, где N_1 и N_2 – натуральные числа, заданы значения $z_{k_1,k_2} = z(t^1_{k_1}, t^2_{k_2})$ функции $z(t^1, t^2)$, где $t^j_{k_j} = k_j \Delta t^j$, $\Delta t^j = a_j / N_j$, $j = 1, 2$.

Определим $Z_{\ell_1 \ell_2}$ – ДПФ ряда значений $z_{k_1 k_2}$ по формулам

$$Z_{\ell_1 \ell_2} = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} z_{k_1 k_2} \exp(-i(\omega_{\ell_1} t^1_{k_1} + \omega_{\ell_2} t^2_{k_2})), \quad (9)$$

где $\omega_{\ell_j} = \ell_j \Delta\omega_j$, $\ell_j = 0, 1, \ldots, N-1$, $\Delta\omega_j = 2\pi/a_j$, $j = 1, 2$.

Тогда справедливы формулы обратного ДПФ:

$$z_{k_1 k_2} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{\ell_1=0}^{N_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{N_2-1} Z_{\ell_1 \ell_2} \exp(i(\omega_{\ell_1} t^1_{k_1} + \omega_{\ell_2} t^2_{k_2})), \quad (10)$$

и основное тождество

$$\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} z^2_{k_1 k_2} = \frac{1}{N_1 N_2}\sum_{\ell_1=0}^{N_1-1}\sum_{\ell_2=0}^{N_2-1} |Z_{\ell_1 \ell_2}|^2. \qquad (11)$$

4. Применение ДПФ (одномерный случай). Пусть m, μ, N – целые числа, $1 \le \mu \le m$ и $X = W_2^{(m)}(0,\alpha)$ – пространство С.Л.Соболева, $Y = L_2(0,\alpha)$ – пространство квадратично суммируемых функций,

$$Tx = Q_m\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sum_{q=0}^{m} \beta_q(t) x^{(q)}(t), \quad \beta_q(t) \in C^q[0,\alpha],\ x^{(q)}(t) = \frac{d^q x}{(dt)^q},$$

$$Ax = [x^{(\nu)}(t_k), \quad k = 0,1,\ldots,N-1; \ \nu = 0,1,\ldots,\mu-1],$$

Z – евклидово пространство размерности μN.

Здесь $C^q[0,\alpha]$ – пространство функций с непрерывными производными до порядка q.

Тогда мы приходим к следующему функционалу:

$$M_\alpha[x,z] = \int_0^\alpha (Tx)^2 dt + \alpha \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^{(\nu)} - z_k^{(\nu)})^2. \qquad (12)$$

Существование и единственность экстремальной функции для (12) доказаны Ю.С.Завьяловым [1]. Для приближенного нахождения экстремальной функции применим ДПФ. Аппроксимируем функционал (12) выражением

$$M_\alpha[\hat{x},\hat{z}] = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1}(Tx)_k^2 + \alpha\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^{(\nu)} - z_k^{(\nu)})^2, \qquad (13)$$

где $\hat{x} = [x_k^{(\nu)},\ \nu = 0,1,\ldots,\mu-1;\ k = 0,1,\ldots,N-1]$ – вектор размерности μN.

Пусть X_ℓ является ДПФ ряда значений x_k. Определим функцию

$$x(t) = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_\ell \exp(i\omega_\ell t), \quad x(t_k) = x_k. \qquad (14)$$

Нетрудно видеть, что

$$x_k^{(\nu)} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_\ell (i\omega_\ell)^\nu \exp(i\omega_\ell t_k),$$
$$(Tx)_k = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_\ell Q_m(i\omega_\ell)\exp(i\omega_\ell t_k). \qquad (15)$$

Следовательно, $X_\ell(i\omega_\ell)^\nu$ и $X_\ell Q_m(i\omega_\ell)$ являются ДПФ рядов значений $x_k^{(\nu)}$ и $(Tx)_k$, соответственно.

Используя (8), (13) и (15), найдем, что

$$M_\alpha[\hat{x},\hat{z}] = \frac{\Delta t}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\left\{|X_\ell Q_m(i\omega_\ell)|^2 + \frac{\alpha}{\Delta t}|X_\ell - Z_\ell|^2 \sum_{\nu=0}^{\mu-1}|i\omega_\ell|^{2\nu}\right\} = M_\alpha[\hat{X},\hat{Z}].$$

Следовательно, решение $\hat{X}^\alpha$ задачи

$$\min_{\hat{X}} M_\alpha[\hat{X},\hat{Z}] = M_\alpha[\hat{X}^\alpha, \hat{Z}]$$

дается формулой*)

$$X_\ell^\alpha = \frac{\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) Z_\ell \sum_{\nu=0}^{\mu-1}|i\omega_\ell|^{2\nu}}{\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)\sum_{\nu=0}^{\mu-1}|i\omega_\ell|^{2\nu} + |Q_m(i\omega_\ell)|^2}, \quad \ell = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (16)$$

Так как решение $\hat{x}^\alpha$ задачи

$$\min_{\hat{x}} M_\alpha[\hat{x},\hat{z}] = M_\alpha[\hat{x}^\alpha, \hat{z}]$$

является обратным ДПФ ряда значений $X_\ell^\alpha(i\omega_\ell)^\nu$, то

$$(x_k^{(\nu)})^\alpha = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_\ell^\alpha (i\omega_\ell)^\nu \exp(i\omega_\ell t_k), \qquad (17)$$

где $k = 0,1,\ldots,N-1$; $\nu = 0,1,\ldots,\mu-1$.

---

*) Это вытекает из формулы дифференцирования функций комплексных переменных $\partial f(t^1+it^2)/\partial(t^1+it^2) = \partial f/\partial t^1 + i\partial f/\partial t^2$.

Формула (I7) дает приближенное решение задачи минимизации функционала (I2). Непрерывное приближенное решение можно строить по формуле (I4).

Количество необходимых операций для вычисления ДПФ и обратного ДПФ может быть уменьшено использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье, предложенного Кули и Таки (см.[6]).

5. Применение ДПФ (двумерный случай). Пусть $m=[m_1,m_2]$, $\mu=[\mu_1,\mu_2]$, $N=[N_1,N_2]$ – векторы с целыми компонентами, где $1\le\mu_j\le m_j$, $j=1,2$ и $X=W_2^{(m)}(\Omega)$ – пространство С.Л.Соболева, где $\Omega=[0,\alpha_1]\times[0,\alpha_2]$. Далее $Y=L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$, Z– евклидово пространство размерности $\mu_1\mu_2N_1N_2$. Операторы $T=[T_1,T_2]$ и A определяются следующим образом:

$$T_1x=Q_{m_1}(x^{(1,0)}(t^1,t^2))=\sum_{q_1=0}^{m_1}\beta_{1,q_1}(t^1)\,x^{(q_1,0)}(t^1,t^2),$$

$$T_2x=Q_{m_2}(x^{(0,1)}(t^1,t^2))=\sum_{q_2=0}^{m_2}\beta_{2,q_2}(t^2)\,x^{(0,q_2)}(t^1,t^2),$$

$$Ax=[x_{k_1k_2}^{(\nu_1,\nu_2)},\ \nu_j=0,1,\dots,\mu_j-1,\ k_j=0,1,\dots,N_j-1,\ j=1,2],$$

где

$$x^{(\nu_1,\nu_2)}(t^1,t^2)=\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}x}{(\partial t^1)^{\nu_1}(\partial t^2)^{\nu_2}},$$

$$x_{k_1k_2}^{(\nu_1,\nu_2)}=x^{(\nu_1,\nu_2)}(t^1_{k_1},t^2_{k_2}).$$

Тогда $M_\alpha[x,z]$ принимает следующий вид (см. [I]).

$$M_\alpha[x,z]=\iint_\Omega[(T_1x)^2+(T_2x)^2]\,dt^1dt^2+\alpha\sum_\nu\sum_k[x_k^{(\nu)}-z_k^{(\nu)}]^2, \quad (I8)$$

где $\nu=[\nu_1,\nu_2]$, $k=[k_1,k_2]$ и $\nu_j=0,1,\dots,\mu_j-1$; $k_j=0,1,\dots,N_j-1$, $j=1,2$.

Для приближенного решения задачи минимизации функционала (I7) аппроксимируем его следующим выражением:

$$M_\alpha[\hat x,\hat z]=\Delta t^1\Delta t^2\sum_k\{(T_1x)_k^2+(T_2x)_k^2+\frac{\alpha}{\Delta t^1\Delta t^2}\sum_\nu[x_k^{(\nu)}-z_k^{(\nu)}]^2\}. \quad (I9)$$

Дальше будем поступать так, как в случае функций одной переменной. При этом будем использовать формулы (9), (I0), (II).

Окончательно решение $\hat x_\alpha$ задачи

$$\min_{\hat x} M_\alpha[\hat x,\hat z]=M_\alpha[\hat x^\alpha,\hat z]$$

имеет следующий вид:

$$\left(x_{k_1k_2}^{\nu_1,\nu_2}\right)^\alpha=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{\ell_1=0}^{N_1-1}\sum_{\ell_2=0}^{N_2-1}X_{\ell_1\ell_2}^\alpha(i\omega_{\ell_1})^{\nu_1}(i\omega_{\ell_2})^{\nu_2}\exp(i(\omega_{\ell_1}t^1_{k_1}+\omega_{\ell_2}t^2_{k_2})), \quad (20)$$

где $\nu_j=0,1,\dots,\mu_j-1$, $k_j=0,1,\dots,N_j-1$, $j=1,2$ и

$$X_{\ell_1\ell_2}=\frac{\dfrac{\alpha}{\Delta t^1\Delta t^2}\,z_{\ell_1\ell_2}\sum\limits_{\nu_1=0}^{\mu_1-1}\sum\limits_{\nu_2=0}^{\mu_2-1}|i\omega_{\ell_1}|^{2\nu_1}|i\omega_{\ell_2}|^{2\nu_2}}{\dfrac{\alpha}{\Delta t^1\Delta t^2}\sum\limits_{\nu_1=0}^{\mu_1-1}\sum\limits_{\nu_2=0}^{\mu_2-1}|i\omega_{\ell_1}|^{2\nu_1}|i\omega_{\ell_2}|^{2\nu_2}+\sum\limits_{j=1}^{2}|Q_{m_j}(i\omega_{\ell_j})|^2}. \quad (2I)$$

Как и в одномерном случае, непрерывное решение задачи минимизации функционала (I9), имеет следующий вид (см. (I4)):

$$(x(t^1,t^2))^\alpha=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{\ell_1=0}^{N_1-1}\sum_{\ell_2=0}^{N_2-1}X_{\ell_1\ell_2}^\alpha\exp(i(\omega_{\ell_1}t^1+\omega_{\ell_2}t^2)),$$

$$(x^{(\nu_1,\nu_2)}(t^1_{k_1},t^2_{k_2}))^\alpha\doteq(x_{k_1k_2}^{(\nu_1,\nu_2)})^\alpha.$$

6. Порядок вычислений. Опишем порядок вычислений при решении задачи сглаживания.

Первый шаг. Вычисляются величины Z_ℓ, $\ell=0,1,\dots,N-1$ (ДПФ ряда значений z_k, $k=0,1,\dots,N-1$) по формуле (6). На этом шаге применяется быстрое ДПФ [7].

Второй шаг. Вычисляется сумма

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} |i\omega_\ell|^{2\nu} = \frac{|i\omega_\ell|^{2\mu}-1}{|i\omega_\ell|^2-1}.$$

Третий шаг. Вычисляется значение полинома Q_m в точке $i\omega_\ell$.

Четвертый шаг. Вычисляются X_ℓ^α, $\ell = 0,1,\ldots,N-1$, по формуле (16).

Пятый шаг. Вычисляются $(x_k^{(\nu)})^\alpha$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, являющиеся обратными ДПФ ряда значений $X_\ell^\alpha(i\omega_\ell)^\nu$, $\ell = 0,1,\ldots,N-1$. На этом шаге применяется быстрое обратное ДПФ [7].

Порядок вычислений в двумерном случае такой же.

В заключение отметим, что применение дискретных преобразований Фурье позволило нам получить приближенное решение задачи сглаживания в явном виде.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Сглаживание L – сплайн-функциями многих переменных. -"Матем.заметки", 1974, т.15, № 3, с. 371-379.

2. LANRENT P.I. Approximation et optimization. Paris.Hermann, 1972.

3. МИХЛИН С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., "Наука", 1970.

4. МОРОЗОВ В.А. О задаче дифференцирования и некоторых алгоритмах приближения экспериментальной информации.-В кн.: Вычислительные методы и программирование.Вып.XIV.М.,Изд-во МГУ,1970.

5. ВАСИЛЕНКО В.А. Теория сплайнов и задачи обработки информации. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат.наук, Новосибирск, 1974, 16 с. (ВЦ СО АН СССР).

6. COOLEY I.W., TUKEY I.W. An algorithm for machine calculation of complex Fourier series. - "Math.Comp.",1965, v.19, p. 297-301.

7. ГУСЕВ В.Д. Процедуры быстрого преобразования Фурье и Уолша. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.45.Новосибирск,1971, с. 107-119.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 декабря 1974 года