УДК 518.12

О СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Б.М.Шумилов

Пусть X есть единичный гиперкуб в R^M и L_j ($j=1,\ldots,M$) – некоторые линейные дифференциальные операторы, каждый по одной переменной x^j. Обозначим $Q(X)$ подмножество всех функций $f=f(X)$, определенных на X, с заданной конечной нормой $\|f\|_X$. В $Q(X)$ рассматривается класс функций $D(X)$, принадлежащих области определения оператора L_j по каждой переменной x^j с конечной нормой [1]:

$$\|g\|_D=\left\{\int_X\sum_{j=1}^{M}[L_j g(x)]^2 dX\right\}^{1/2}.$$

Пусть Δ – сетка в X, образованная пересечением множеств гиперплоскостей

$$\Delta^j:\ 0=x_0^j<x_1^j<\ldots<x_{n_j}^j=1.$$

Множество L – сплайн-функций [1] дефекта 1, удовлетворяющих граничным условиям типа П$'$ [2], образует в $D(X)$ конечномерное линейное подпространство $S_n(X)$ с размерностью $n=\prod_{j=1}^{M}(n_j+1)$, базис в котором состоит из фундаментальных сплайнов [3] $s_{\ell_j}^j(x^j)$ ($\ell_j=0,1,\ldots,n_j$), определенных на сетке Δ^j.

Решается следующая задача наилучшего приближения:

$$\inf_{s\in S_n(X)}\|f-s\|_X=\|f-s_n\|_X,\quad f\in Q(X). \tag{1}$$

В связи с тем, что I) решение задачи (I) может быть не единственным, 2) алгоритмы решения зачастую не определены для областей общего вида в R^M, $M \geq 2$, 3) значения функции f обычно бывают известны с ошибками на конечной последовательности точек $Y \equiv \{y_i\}_{i=1}^N$, не обязательно совпадающих с узлами Δ, заменим $Q(X)$ на подходящее конечномерное подпространство $Q(Y) \subset Q(X)$, функцию $f(x)$ – ее δ-приближением $f_\delta \in Q(X)$, $\|f_\delta - f\|_X \leq \delta$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\inf_{s \in S_n(X)} \|f_\delta - s\|_Y = \|f_\delta - s_n^{\delta,N}\|_Y. \qquad (2)$$

Положим

$$\rho(n,N) = \|f_\delta - s_n^{\delta,N}\|_Y, \quad \gamma(n,N) = \|s_n^{\delta,N} - f\|_X.$$

Далее изучается поведение функции невязки $\rho(n,N)$ при варьировании конечномерных пространств $S_n(X)$ и $Q(Y)$. Предполагается, что $n_{min} \leq n \leq N \leq \infty$, где n_{min} – минимальное число узлов, необходимое для существования сплайна [4], и последовательности пространств $S_n(X)$ и $Q(Y)$ вложены.

ЛЕММА. Функция $\rho(n,N)$ является невозрастающей функцией дискретного аргумента n при фиксированном N, неубывающей функцией N при фиксированном n и

$$\lim_{n \to N} \rho(n,N) = \lim_{N \to n+} \rho(n,N) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \leq n'$ и $s_n^{\delta,N}, s_{n'}^{\delta,N}$ – соответствующие решения задачи (2). Обозначим $s_{n'}^n$ элемент $s \in S_{n'}(X)$, образованный формально из сплайна $s_n^{\delta,N}$ добавлением необходимого числа узлов (линий) склейки сплайна. Очевидно, что

$$\rho(n',N) = \|f_\delta - s_{n'}^{\delta,N}\|_Y \leq \|f_\delta - s_{n'}^n\|_Y = \|f_\delta - s_n^{\delta,N}\|_Y = \rho(n,N)$$

и, следовательно, $\rho(n,N) \geq \rho(n',N)$, т.е. функция $\rho(n,N)$ при фиксированном N не возрастает. Аналогично, пусть $N \leq N'$ и $s_n^{\delta,N}$, $s_n^{\delta,N'}$ – соответствующие решения задачи (2). Тогда $\rho(n,N) \leq \rho(n,N')$ и, следовательно, функция $\rho(n,N)$ при фиксированном n не убывает.

В силу непрерывности тождественного оператора имеем

$$\lim_{N \to n+} \rho(n,N) = \lim_{n \to N} \rho(n,N) = \rho(N,N) = \|f_\delta - s_N^{\delta,N}\|_Y = 0$$

(параметров сплайна достаточно, чтобы интерполировать заданные значения $f_\delta(y_i)$).

Лемма доказана.

Таким образом, для различных n, $n_{min} \leq n \leq N$, решение задачи (2) представляет компромисс между построением чисто интерполяционной функции, если $n = N$, и "идеально гладкой" функции, т.е. нулевого элемента пространства $D(X)$, если $n = n_{min}$ [4].

Функция $\gamma(n,N)$ характеризует "согласие" сглаживающего сплайна $s_n^{\delta,N}(x)$ с истинной функцией $f(x)$, которую мы пытаемся оценить. Существует оптимальное число узлов $n = k$, на котором достигается $\min \gamma(n,N)$ при фиксированном N. Тогда найдется некоторое число m, возможно зависящее от n и k, такое, что $\rho(k,N) = \rho(n,N) + m\gamma(n,N)$ для $k \leq n \leq N$.

Рассмотрим два крайних случая:

I) $n = k$, тогда $m = 0$,

2) $n = N$, тогда $\rho(k,N) = m\gamma(N,N)$, (3)

т.е. m монотонно возрастает, начиная с нулевого значения при $n = k$ до максимального значения $\rho(k,N)/\gamma(N,N)$ при $n = N$. Будем полагать $m \equiv m(n,k) \equiv m_1(n-k)^{\varkappa}$, $0 \leq \varkappa \leq 1$. Здесь m_1 – масштабный коэффициент, значение параметра $\varkappa$ определяется конкретным выбором пространства $Q(Y)$. Если $Q(Y) \equiv R_p^N$ и $\varkappa = 1/p$, то уравнение (3) согласуется с известными способами параметрической аппроксимации (случай $p = 2$ – метод наименьших квадратов [5], случай $p = \infty$ – чебышевское приближение [6]).

Аналогично получаем, что для каждого фиксированного n существует такое дискретное множество Y густоты $N = N(n,\delta)$, что соответствующий сплайн $s_n^{\delta,N}(x)$ доставляет решение задаче (I). Изучим сходимость полученных решений при $\delta \to 0$, $n \to \infty$, для чего будем предполагать выполненными следующие условия [7]:

I) для любых $g \in D(X)$

$$\big| \|g\|_Y - \|g\|_X \big| \leq \tau_N (\|g\|_X + \|g\|_D),$$

где $\tau_N \to 0$ при $N \to \infty$;

2) $\lim\limits_{\delta \to 0,\, N \to \infty} \tau_N \| f_\delta \|_D = 0$.

Уравнение (3) соответствует следующему соотношению

$$\rho(n,N) \leq m(N,n)\,\rho_{N,\delta}\,, \tag{4}$$

где

$$\rho_{N,\delta} = \delta + \frac{\tau_N}{1-\tau_N} \left\| s_N^{\delta,N} - f_\delta \right\|_D, \quad \lim_{\delta \to 0,\, N \to \infty} \rho_{N,\delta} = 0.$$

Тогда

$$\| s_n^{\delta,N} - f \|_X \leq \delta + m(N,n) \frac{\rho_{N,\delta}}{1-\tau_N} + \frac{\tau_N}{1-\tau_N} \left(\left\| s_n^{\delta,N} \right\|_D + \left\| f_\delta \right\|_D \right).$$

Из полученной оценки вытекает

ТЕОРЕМА. Для любых $f,\ f_\delta \in Q(X)$ алгоритм (2), (4) сходится, т.е.

$$\lim_{\delta \to 0,\, n \to \infty} \| s_n^{\delta, N(n,\delta)} - f \|_X = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для достаточно больших N, пренебрегая погрешностью аппроксимации по сравнению с величиной δ, можно положить $\rho_{N,\delta} \approx \delta$.

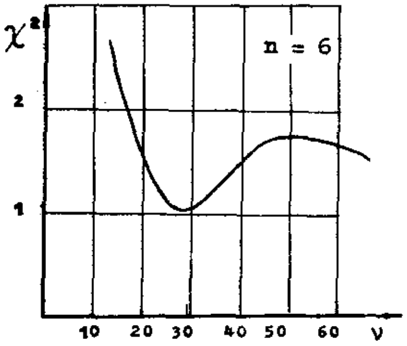

Рис. I

Рассмотрим для примера применение бикубических сплайнов [8]. Пусть на плоскости задана прямоугольная область $R: a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d$, разделенная сеткой прямых линий на прямоугольные ячейки. В каждой ячейке бикубический сплайн $s(x,y)$ дефекта I является бикубическим полиномом и принадлежит классу $C^{2,2}(R)$, т.е. непрерывны производные до $D^{(2,2)} s(x,y)$. В качестве базиса удобно использовать глав-

ные кубические сплайны $\beta_\ell^n(t)$, определенные на равномерной сетке $\Delta:\ 0, I, \dots, \ell, \dots, n$, для которых в [9] содержатся обширные таблицы. Бикубический сплайн $s(x,y)$ однозначно представим в виде

$$s_{m,n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n} s\left(a + k\frac{b-a}{m},\ c + \ell\frac{d-c}{n}\right) \beta_k^m\left(\frac{x-a}{b-a} m\right) \beta_\ell^n\left(\frac{y-c}{d-c} n\right).$$

Пусть тестовая функция имеет вид $f(x,y) = \sin x \sin y,\ 0 \leq x, y \leq \pi$, и задается равномерное δ-приближение $f_\delta(x,y)$:

$$\max_{x,y} | f - f_\delta | \leq \delta = 0{,}05.$$

Для оценки f используется метод наименьших квадратов, т.е. минимизируется сумма квадратов уклонений.

$$\chi^2 = \frac{33{,}33}{N^2 - (n+1)^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} [s_{n,n}^N(x_i, y_j) - f_\delta(x_i, y_j)]^2.$$

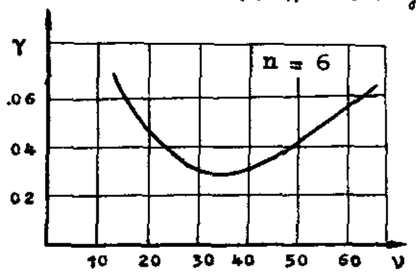

Рис. 2

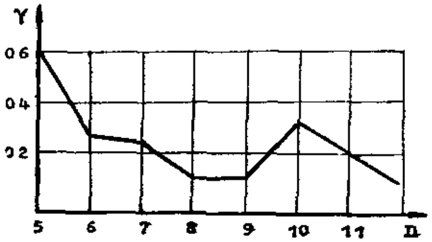

Рис. 3

Результаты численных экспериментов представлены на рис.I, где по оси абсцисс отложено число степеней свободы $\nu(N) = N^2 - (n+1)^2$, по оси ординат – соответствующие значения $\chi^2(\nu)$ ($n = 6$). Кривая достигает теоретического минимума $\chi^2 \approx$ I, в котором следует ожидать оптимальную аппроксимацию. На рис.2 показаны значения $\gamma(\nu) = \max\limits_{x,y} |s_{n,n}^N - f|$ ($n = 6$). На рис.3 изображена зависимость γ от n при оптимальном N.

Таким образом, рассмотренный способ аппроксимации обладает свойствами оптимальности и сходимости и может быть рекомендован для практического применения.

Автор благодарит Завьялова Ю.С. и участников семинара "Методы сплайн-функций" ИМ СО АН СССР за обсуждение работы.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. L - сплайн-функции многих переменных. -"Докл. АН СССР", 1974, т.214, № 6, с.1247-1249.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование L - сплайн-функциями многих переменных. -"Мат.заметки", 1973,т.14, вып.1, с.11-20.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Сглаживание L - сплайн-функциями многих переменных. -"Мат.заметки", 1974, т.15, вып.3, с.317-379.

4. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

5. ХУДСОН Д. Статистика для физиков, изд.2-е, М., "Мир", 1971.

6. РЕМЕЗ Р.Е. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, "Наукова думка", 1969, с.83.

7. МОРОЗОВ В.А. Теория сплайнов и задача устойчивого вычисления значений неограниченного оператора. -"Ж.вычис.матем.и матем.физ.", 1971, т.11, № 3, с.545-558.

8. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами). -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38,Новосибирск, 1970, с. 74-101.

9. SARD A., WEINTRAUB S. A book of splines. New York,e.a. John Willey and Sons, 1971.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 июля 1975 года