ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 518

МЕТОД СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Имамов

В теории приближенных методов решения дифференциальных уравнений подпространство полиномиальных сплайнов давно проявляет свои прекрасные свойства и возможности широкого применения [I].Это связано с тем, что норма ошибки приближенного решения операторного уравнения,полученного проекционным методом, кроме нормы некоторого проекционного оператора, еще зависит от полноты последовательности подпространств, к которым принадлежат приближенные решения [I,2].

В связи с распространением понятия полиномиальных сплайнов и их свойств на гильбертовы пространства [3,4] возникает необходимость в использовании этих сплайнов для приближенного решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

В этой заметке доказывается, что и в общем случае полнота последовательности подпространств сплайнов сохраняется. Этот факт доказан с помощью теоремы сходимости интерполяционного процесса. Для линейных уравнений доказывается отдельная теорема о сходимости метода сплайнов.

I. Основные определения и обозначения [5]. Пусть X, Y, Z - действительные гильбертовы пространства, $T: X \to Y$ - линейный непрерывный оператор с областью определения $D(T)$ и областью значений $R(T)$, T^* - сопряженный к нему оператор. Через $N(T)$ обозначается ядро оператора T. Аналогично вводится оператор $A: X \to Z$.

Фиксируем элемент $z \in Z$ и предположим, что множество $I_Z = \{x \in X \mid Ax = z\}$ не пусто.

Элемент $\sigma = \sigma(T, A, z)$, являющийся решением задачи

$$\|T\sigma\|_Y^2 = \min_{x \in I_z} \|Tx\|_Y^2, \qquad (1)$$

называется интерполяционным сплайном.

В дальнейшем всюду предполагается, что $D(T) = D(A) = X$, а $R(T)$ и $R(A)$ замкнуты в Y и Z, соответственно. Тогда, для того чтобы существовало решение задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$N(T) + N(A) \text{ было замкнуто в } X. \qquad (2.\text{а})$$

Если, кроме того,

$$N(T) \cap N(A) = \{\theta_X\} \quad (\theta_X \text{ – нуль-вектор в } X), \qquad (2.\text{б})$$

то это решение единственно.

В пространстве X определим новое скалярное произведение и норму формулами

$$\langle x_1, x_2 \rangle_X = (Tx_1, Tx_2)_Y + (Ax_1, Ax_2)_Z, \quad |x|_X^2 = \langle x, x \rangle_X. \qquad (3)$$

Из условий (2) вытекает, что норма $|\cdot|_X$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_X$ [5 , § 4.4]. Верно и обратное, из эквивалентности норм $\|\cdot\|_X$ и $|\cdot|_X$ вытекает справедливость (2).

Пусть выполнены условия (2). Тогда для каждого $z \in R(A)$ существует единственный интерполяционный сплайн $\sigma = \sigma(T, A, z)$. Множество $S = S[X, T, A]$ всех интерполяционных сплайнов σ образует подпространство в пространстве X. Оно называется подпространством сплайнов пространства X.

Сопоставляя все $x \in I_z$ с единственным элементом $\sigma = \sigma(T, A, z)$, определим оператор $\Pi: X \to S$ такой, что

$$\sigma = \sigma(T, A, z) = \Pi x. \qquad (4)$$

Очевидно, что $\Pi^2 = \Pi$, т.е. Π является проектором.

При выполнении условий (2) сужение A_S оператора A на подпространство сплайнов $S = [X, T, A]$ является взаимно-однозначным и линейным непрерывным оператором из S на $R(A)$, и, следовательно, A_S^{-1} ограничен. Отсюда и из представления $\sigma = \sigma(T, A, z) = A_S^{-1} z$ вытекает устойчивость интерполяционного сплайна относительно вектора "экспериментальных данных" z.

Одним из замечательных свойств интерполяции сплайнами является ограниченность сплайн-проектора $\Pi: X \to S[X, T, A]$, когда выполнены условия (2). Это вытекает из следующего представления этого проектора $\Pi = A_S^{-1} A$. Отметим, что проектор P_n, проектирующий пространство непрерывных функций $C[0,1]$ на подпространство алгебраических многочленов степени $\leq n$, имеет норму $\|P_n\|_{C[0,1]} \geq c \ln n \; (c = const)$ [5, § 5.4].

2. Сходимость интерполяционного процесса. Пусть x_0 – фиксированный элемент из X, Z_i – гильбертовы пространства, $\alpha_i: X \to Z_i$ – линейные непрерывные операторы ($i = 1,2,\ldots$). Предположим, что для элемента x_0 известна последовательность образов $\{z_i\}$, где $z_i = \alpha_i(x_0) \in Z_i$ ($i = 1,2,\ldots$). Если определить оператор $A_n: X \to Z^n = Z_1 \times \ldots \times Z_n$, действующий по формуле $A_n x = [\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)]$, то для заданного (допустимого) элемента $z^n = [z_1, \ldots, z_n]$, при выполнении соответствующих условий, можно построить сплайн $\sigma_n = \sigma(T, A_n, z^n)$ [4,6]. Исследуем сходимость $\{\sigma_n\}$ к x_0 при $n \to \infty$.

Система операторов $\{\alpha_i\}$ называется правильной [6], если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся по системе операторов $\{\alpha_i\}$, т.е. из $\lim_{n\to\infty} \alpha_i(x_n) = \alpha_i(x)$ ($i = 1,2,\ldots$) следует слабая сходимость $\{x_n\}$ к x_0 на множестве, всюду плотном в X.

Сходимость $\{\sigma_n\}$ к x_0 в дальнейшем мы изучаем для правильной системы операторов $\{\alpha_i\}$. Этот вопрос исследован также в [7]. При этом ограничение, налагаемое на систему $\{\alpha_i\}$, более жесткое, чем ограничение, наложенное на ту же систему в [6].

Очевидно, что если $\{k_i\}$ – базис пространства X, то система операторов $\{\alpha_i\}$, где $\alpha_i(x) = (k_i, x)_X$ ($i = 1,2,\ldots$), правильная.

Из основных предположений предыдущего пункта вытекает, что мы должны здесь принять: $D(\alpha_i) = X$ ($i = 1,2,\ldots$), $R(T)$ замкнуто в Y и $R(A_n)$ замкнуто в Z^n при любом n.

ТЕОРЕМА 1. Пусть система операторов $\{\alpha_i\}$ ($i = 1,2,\ldots$) правильная и пусть при $n \geq n_0$ множество $N(T) + N(A_n)$ замкнуто, а $N(T) \cap N(A_n) = \{\theta_X\}$, где n_0 фиксировано; тогда, начиная с n_0, существуют единственные сплайны σ_n и $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - x_0\|_X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\{\sigma_n\}$ сходится к x_0 слабо. Из предположений ясно, что это верно на некотором множестве, всюду плотном в X.

Пусть

$$|x|_X^2 = \|Tx\|_Y^2 + \|A_{n_0}x\|_{Z^{n_0}}^2 = \|Tx\|_Y^2 + \sum_{i=1}^{n_0} \|\alpha_i(x)\|_{Z_i}^2.$$

В предположениях теоремы нормы $\|\cdot\|_X$ и $|\cdot|_X$ эквивалентны. Так как $|\sigma_n|_X \le |x_0|_X$, то последовательность $\{\|\sigma_n\|_X\}$ ограничена по n. Поскольку последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена и слабо сходится к x_0 на множестве, всюду плотном в X, то она сходится слабо к x_0 на всем X [8, §4.3].

Далее, очевидно, что $\{T\sigma_n\}$ слабо сходится к Tx_0 и, кроме того, $\|T\sigma_n\|_Y \le \|Tx_0\|_Y$ для всех n. Тогда при $n \to \infty$

$$\|T\sigma_n - Tx_0\|_Y^2 \le 2\|Tx_0\|_Y^2 - 2(T\sigma_n, Tx_0)_Y \to 0.$$

Следовательно, $|\sigma_n - x_0|_X \to 0$, т.е. $\|\sigma_n - x_0\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

В теории проекционных методов приближенного решения как линейных, так и нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве является очень важным такое следствие теоремы I [I, гл. IУ]; [2, гл. УП]:

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы I для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $\sigma_n \in S_n = S[X, T, A_n]$ такой, что

$$\min_{S_n \in S_n} \|x - S_n\|_X \le \|x - \sigma_n\|_X \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно, таким элементом является $\sigma_n = \sigma(T, A_n, A_n x) = \Pi_n x$. Свойство последовательности $\{S[X, T, A_n]\}$, выраженное этим следствием, называется ее полнотой в пространстве X.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не предполагая замкнутости $R(A_n)$ при условиях, что система операторов $\{\alpha_i\}$ правильная, размерность $N(T)$ конечна и $N(T) \cap N(A_n) = \{\theta_X\}$ при $n \ge n_0$ в [6], доказано утверждение: при $n \to \infty$ последовательность $\{\sigma_n\}$ слабо сходится к x_0, а последовательность $\{T\sigma_n\}$ сходится к Tx_0 сильно. При этом из конечномерности ядра $N(T)$ вытекает ограниченность последовательности $\{\|\sigma_n\|_X\}$ по n [6].

Сильную сходимость $\{\sigma_n\}$ к x_0 при $n \to \infty$ легко доказать. В самом деле, пусть $T(\sigma_n - x_0) \to \theta_Y$ при $n \to \infty$. По теореме Банаха, сужение $\tilde{T}$ оператора T на ортогональное дополнение $N(T)^\perp$ ядра $N(T)$ непрерывно обратимо как оператор, отображающий $N(T)^\perp$ на $R(T)$ [5, § 4.2]; [7, § 4.5]. С другой стороны, поскольку $X = N(T)^\perp + N(T)$ и $N(T) \cap N(A_n) = \{\theta_X\}$, то $\sigma_n - x_0 \in N(T)^\perp$ и $T(\sigma_n - x_0) = \tilde{T}((\sigma_n - x_0) \cap N(T)^\perp) = \tilde{T}(\sigma_n - x_0)$. Отсюда имеем $\|\sigma_n - x_0\|_X \le \|\tilde{T}^{-1}\| \, \|T(\sigma_n - x_0)\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Сплайн-решения линейных уравнений. Пусть Z – гильбертово пространство и $K: X \to Z$ – взаимно-однозначный и линейный непрерывный оператор такой, что $D(K) = X$, $R(K) = Z$. Тогда уравнение

$$Kx = z_0 \in Z \tag{5}$$

имеет единственное решение $x_0 = K^{-1} z_0$. При этих предположениях уравнение (5) корректно разрешимо, т.е. для всех $x \in X$ справедливо неравенство $c\|x\|_X \le \|Kx\|_Z$, где $c > 0$. Это следует из теоремы Банаха [5, §4.2].

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $b_i: Z \to Z_i$ такой, что $D(b_i) = Z$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Обозначим $b_i(z_0) = z_i$, $\alpha_i = b_i K$ и $A_n = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Как и в предыдущем пункте, для заданного элемента $z^n = [z_1, \ldots, z_n] \in Z^n$, при выполнении соответствующих условий, можно построить сплайн $x_n = \sigma(T, A_n, z^n)$, интерполирующий элемент x_0 по системе операторов $\{b_i K\}$. Этот интерполяционный сплайн назовем приближенным сплайн-решением уравнения (5).

Очевидно, что имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x_n = \sigma(T, A_n, z^n)$ – приближенное сплайн-решение уравнения (5). Предположим, что для операторов T, A_n и системы операторов $\{b_i K\}$ выполняются условия, сформулированные в теореме I. Тогда $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$.

Сформулируем одно достаточное условие правильности системы операторов $\{\alpha_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

ТЕОРЕМА 3. Для правильности системы операторов $\{\alpha_i\}$ достаточно, чтобы $\bigcup_{i=1}^{\infty} R(\alpha_i^*)$ было плотно в X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_i(x_n) \to a_i(x)$ для всех i при $n \to \infty$. Тогда для всех $z_i \in Z_i$ имеет место $(x_n, a_i^*(z_i))_X \to (x, a_i^*(z_i))_X$ при $n \to \infty$, т.е. $\{x_n\}$ сходится слабо к x на каждом $R(a_i^*)$ $(i = 1, 2, \dots)$. Следовательно, если $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R(a_i^*)$ плотно в X, то система операторов $\{a_i^*\}$ правильная.

При решении уравнения (5) методом сплайнов полезна следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K: X \to Z$ - взаимно-однозначный и линейный непрерывный оператор, $b_i: Z \to Z_i$ - линейные непрерывные операторы, где Z и Z_i - гильбертовы пространства $(i = 1, 2, \dots)$. Тогда если система операторов $\{b_i\}$ правильная, то система операторов $\{b_i K\}$ также правильная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b_i K \xi_n \to b_i K \xi$ при $n \to \infty$ $(i = 1, 2, \dots)$. Нужно доказать, что существует плотное в X множество X_0, такое, что $(\xi_n - \xi, \bar{\xi})_X \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\bar{\xi} \in X_0$.

Пусть $K\xi_n = \zeta_n$, $K\xi = \zeta$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} b_i(\zeta_n) = b_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, \dots)$. В силу правильности системы операторов $\{b_i\}$ существует плотное множество $Z_0 \subset Z$ такое, что $(\zeta_n - \zeta, \bar{\zeta})_Z \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\bar{\zeta} \in Z_0$. Отсюда следует, что $(\xi_n - \xi, K^* \zeta)_X \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\bar{\zeta} \in Z_0$. Положим, $X_0 = K^* Z_0$. Поскольку K^* взаимно-однозначный и линейный непрерывный оператор, то X_0 плотно в X. Теорема доказана.

Литература

1. ВАРГА Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., "Мир", 1974.

2. МИХЛИН С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., "Наука", 1970.

3. ATTEIA M. Generalization de la definition et des proprietes des "spline" functions. - "Compt.Rend.",1965, v. 260. p.3550-3553.

4. SARD A. Optimal approximation. - "J.Functional anal.", 1967, N 1, p.222-244; 1968, N 2, p.368-369.

5. LANRENT P.I. Approximation et optimization. Paris, Hermann, 1972.

6. ВАСИЛЕНКО В.А. Сходимость операторных интерполирующих сплайнов. -В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1973, с. 95-100.

7. МОРОЗОВ В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., Изд-во МГУ, 1974.

8. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., "Наука", 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
8 мая 1975 года