ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 518.61

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.Дуйсеков, В.Л.Мирошниченко

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти решение уравнения

$$y^{IV}(x) + p(x)y(x) = f(x), \qquad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(a)=m_0,\ y(b)=m_1,\ y'(a)=n_0,\ y'(b)=n_1. \qquad (2)$$

Введем на $[a,b]$ сетку $\Delta: x_i = a + ih\ (i=0,\dots,N),\ x_N = b$. Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде сплайна пятой степени дефекта 1 [1] с узлами в точках сетки Δ. Для нахождения параметров сплайна используем метод коллокации. Согласно этому методу, искомый сплайн $s(x)$ должен удовлетворять системе

$$s_i^{IV} + p_i s_i = f_i \qquad (i=0,1,\dots,N), \qquad (3)$$

$$s_0 = m_0,\ s'_0 = n_0,\ s_N = m_1,\ s'_N = n_1, \qquad (4)$$

где $s_i = s(x_i),\ p_i = p(x_i),\dots$

Относительно коэффициентов уравнения (1) в дальнейшем будем предполагать: $p(x), f(x) \in C[a,b]$; $p(x), f(x) \in C^2[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\dots,N)$, $p(x) > 0$. В этих условиях задача (1)-(2) имеет единственное решение $y(x) \in C^4[a,b],\ y(x) \in C^6[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\dots,N)$. В [4] показано, что при сделанных предположениях система (3)-(4) для всех достаточно малых $h \le h_0$ будет иметь единственное решение и $\|y^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\|_C = O(h^2)$ $(k=0,1,2,3,4)$.

Основным содержанием данной работы является построение алгоритма решения системы (3)-(4) и исследование его с точки зрения устойчивости.

Используя следующие известные соотношения [3,4]:

$$s_{i-2}^{IV}+26s_{i-1}^{IV}+66s_i^{IV}+26s_{i+1}^{IV}+s_{i+2}^{IV} = \frac{120}{h^4}(s_{i-2}-4s_{i-1}+6s_i-4s_{i+1}+s_{i+2}) \quad (i=2,\dots,N-2), \tag{5}$$

$$s'_{i-2} = -\frac{h^3}{720}(19s_{i-2}^{IV}+108s_{i-1}^{IV}+51s_i^{IV}+2s_{i+1}^{IV}) + \frac{1}{6h}(-11s_{i-2}+18s_{i-1}-9s_i+2s_{i+1}) \quad (i=2,\dots,N-1), \tag{6а}$$

$$s'_{i+2} = -\frac{h^3}{720}(19s_{i+2}^{IV}+108s_{i+1}^{IV}+51s_i^{IV}+2s_{i-1}^{IV}) + \frac{1}{6h}(-11s_{i+2}+18s_{i+1}-9s_i+2s_{i-1}) \quad (i=1,\dots,N-2), \tag{6б}$$

систему (3)–(4) легко привести к виду:

$$\left(18+\frac{108h^4}{120}p_1\right)s_1-\left(9-\frac{51h^4}{120}p_2\right)s_2+\left(2+\frac{h^4}{60}p_3\right)s_3 = \frac{h^4}{120}\left(19f_0+108f_1+51f_2+2f_3\right)+\left(11-\frac{19h^4}{120}p_0\right)m_0+6hn_0, \tag{7.I}$$

$$\left(1+\frac{h^4}{120}p_{i-2}\right)s_{i-2}-\left(4-\frac{26h^4}{120}p_{i-1}\right)s_{i-1}+\left(6+\frac{66h^4}{120}p_i\right)s_i-\left(4-\frac{26h^4}{120}p_{i+1}\right)s_{i+1}+\left(1+\frac{h^4}{120}p_{i+2}\right)s_{i+2} = \frac{h^4}{120}\left(f_{i-2}+26f_{i-1}+66f_i+26f_{i+1}+f_{i+2}\right) \quad (i=2,3,\dots,N-2), \tag{7.i}$$

$$\left(2+\frac{h^4}{60}p_{N-3}\right)s_{N-3}-\left(9-\frac{51h^4}{120}p_{N-2}\right)s_{N-2}+\left(18+\frac{108h^4}{120}p_{N-1}\right)s_{N-1} = \frac{h^4}{120}\left(2f_{N-3}+51f_{N-2}+108f_{N-1}+19f_N\right)+\left(11-\frac{19h^4}{120}p_N\right)m_1+6hn_1. \tag{7.N-I}$$

Для решения этой системы используем метод прогонки, описанный в работе [5]. Рассмотрим этот метод применительно к системе с пятидиагональной матрицей. Обозначая коэффициенты при неизвестных через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i$ $(i=1,\dots,N-1)$, запишем систему (7) в виде:

$$\gamma_1 s_1+\delta_1 s_2+\varepsilon_1 s_3 = d_1, \tag{8.I}$$

$$\beta_2 s_1+\gamma_2 s_2+\delta_2 s_3+\varepsilon_2 s_4 = d_2, \tag{8.2}$$

$$\alpha_i s_{i-2}+\beta_i s_{i-1}+\gamma_i s_i+\delta_i s_{i+1}+\varepsilon_i s_{i+2} = d_i \tag{8.i}$$

$$(i=3,4,\dots,N-3),$$

$$\alpha_{N-2}s_{N-4}+\beta_{N-2}s_{N-3}+\gamma_{N-2}s_{N-2}+\delta_{N-2}s_{N-1} = d_{N-2}, \tag{8.N-2}$$

$$\alpha_{N-1}s_{N-3}+\beta_{N-1}s_{N-2}+\gamma_{N-1}s_{N-1} = d_{N-1}. \tag{8.N-I}$$

Положим $\varepsilon_{N-1}=\varepsilon_{N-2}=\delta_{N-1}=0$. Тогда решение системы (8) находится по формулам:

$$s_i = A'_i s_{i+1}+B'_i s_{i+2}+D'_i \quad (i=1,\dots,N-1),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&A'_i=-\frac{B'_{i-1}-B_i}{A'_{i-1}-A_i}, \quad B'_i=\frac{C_i}{A'_{i-1}-A_i}, \quad D'_i=-\frac{D'_{i-1}-D_i}{A'_{i-1}-A_i} \\
&(i=2,\dots,N-1), \\
&A'_1=-\frac{\delta_1}{\gamma_1}, \quad B'_1=-\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}, \quad D'_1=\frac{d_1}{\gamma_1},
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i=-\frac{\alpha_i B_{i-1}+\gamma_i}{\alpha_i A_{i-1}+\beta_i}, \quad B_i=-\frac{\alpha_i C_{i-1}+\delta_i}{\alpha_i A_{i-1}+\beta_i}, \\
&C_i=-\frac{\varepsilon_i}{\alpha_i A_{i-1}+\beta_i}, \quad D_i=\frac{d_i-\alpha_i D_{i-1}}{\alpha_i A_{i-1}+\beta_i} \\
&(i=2,\dots,N-1), \\
&A_1=-\frac{\gamma_2}{\beta_2}, \quad B_1=-\frac{\delta_2}{\beta_2}, \quad C_1=-\frac{\varepsilon_2}{\beta_2}, \quad D_1=\frac{d_2}{\beta_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Последовательность действий такова: сначала по формулам (II) находим A_i, B_i, C_i, D_i $(i=1,\dots,N-1)$, затем по формулам (I0) вычисляем A'_i, B'_i, D'_i $(i=1,\dots,N-1)$ и, наконец, по формулам (9) определяем неизвестные s_i $(i=1,\dots,N-1)$.

Для решения системы (8) необходимо произвести $22(N-1)$ арифметических операций.

Достаточные условия устойчивости алгоритма установлены в работе [5] в виде требований А, Б, С. Покажем выполнение этих требований при применении алгоритма для решения системы (7).

А. Нужно показать, что корни λ_j уравнения

$$|F_i - \lambda E| = 0, \qquad (12)$$

где

$$F_i = \begin{bmatrix} \beta_i & -\alpha_i & 0 & 0 \\ \gamma_i & 0 & -\alpha_i & 0 \\ \delta_i & 0 & 0 & -\alpha_i \\ \varepsilon_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_i = 1 + \frac{h^4}{120}\rho_{i-2},\ \beta_i = -4 + \frac{26h^4}{120}\rho_{i-1},\quad \gamma_i = 6 + \frac{66h^4}{120}\rho_i,$$

$$\delta_i = -4 + \frac{26}{120}\rho_{i+1},\ \varepsilon_i = 1 + \frac{h^4}{120}\rho_{i+2}\quad (i = 2, \dots, N-2),$$

удовлетворяют условиям

$$|\lambda_1| < \alpha_i,\ |\lambda_2| < \alpha_i,\ |\lambda_3| > \alpha_i,\ |\lambda_4| > \alpha_i. \qquad (13)$$

Положим $\lambda_j = \alpha_i \omega_j$. $(j = 1,2,3,4)$. Тогда уравнение (12) запишется в виде

$$\lambda^4 - \beta_i \lambda^3 + \gamma_i \alpha_i \lambda^2 - \delta_i \alpha_i^2 \lambda + \varepsilon_i \alpha_i^3 = 0. \qquad (14)$$

Согласно формулам Виета

$$\alpha_i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = \beta_i, \qquad (15)$$

$$\alpha_i(\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3 + \omega_2\omega_4 + \omega_3\omega_4) = \gamma_i, \qquad (16)$$

$$\alpha_i(\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \omega_1\omega_3\omega_4 + \omega_2\omega_3\omega_4) = \delta_i, \qquad (17)$$

$$\alpha_i\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = \varepsilon_i. \qquad (18)$$

Очевидно, что при $h \to 0$

$$\lambda^4 - \beta_i\lambda^3 + \gamma_i\alpha_i\lambda^2 - \delta_i\alpha_i^2\lambda + \varepsilon_i\lambda_i^3 \to (\lambda+1)^4.$$

Поэтому при достаточно малых h корни λ_j будут близки к -1. Можно считать, что λ_j лежат в круге

$$|z+1| < 1. \qquad (19)$$

Покажем, что при $\rho(x) > 0$ неравенства (13) будут выполнены. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Предположим, что все корни уравнения (14) действительны. В силу (19) это означает, что $\lambda_j < 0$, $\omega_j < 0$, $(j = 1,2,3,4)$. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим дает $256\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 \leq (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^4$. Принимая во внимание (15), (18), отсюда имеем

$$256\alpha_i^3\varepsilon_i \leq \beta_i^4. \qquad (20)$$

Но при $\rho(x) > 0$ имеем $\alpha_i > 1, \varepsilon_i > 1, \beta_i < 4$, т.е. (20) не может выполняться. Полученное противоречие указывает на то, что в уравнении (14) все корни одновременно не могут быть действительными.

2. Пусть корни уравнения (14) имеют вид:

$$\lambda_1 = \alpha_i(a + bi) = \alpha_i\omega_1,\ \lambda_2 = \alpha_i(a - bi) = \alpha_i\omega_2,$$

$$\lambda_3 = \alpha_i(c + di) = \alpha_i\omega_3,\ \lambda_4 = \alpha_i(c - di) = \alpha_i\omega_4,$$

где $b \neq 0, d \neq 0$ и, согласно (19), $a < 0$, $c < 0$. Вначале покажем, что среди корней λ_j нет по модулю равных α_i. Предположим, например, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \alpha_i$, т.е. $a^2 + b^2 = 1$. Из (16)-(18) имеем

$$\alpha_i(1 + 4ac + c^2 + d^2) = \gamma_i,\ \alpha_i(c^2 + d^2) = \varepsilon_i,$$

$$\alpha_i(2c + 2a(c^2 + d^2)) = \delta_i.$$

Отсюда нетрудно получить

$$a = \frac{1}{4\varepsilon_i}\left(\delta_i \pm \sqrt{\delta_i^2 - 4(\gamma_i - \varepsilon_i - \alpha_i)}\right).$$

Так как $\rho(x) > 0$, то $\delta_i^2 < 4(\gamma_i - \varepsilon_i - \alpha_i)$, что противоречит предположению о том, что величина a действительна. Таким образом, $|\lambda_j| \neq \alpha_i$ $(j = 1,2,3,4)$. Рассмотрим два случая:

а) $a^2 + b^2 < 1$, $c^2 + d^2 < 1$. Тогда из (16)

$$4ac = \frac{\gamma_i}{\alpha_i} - (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) > \frac{\gamma_i}{\alpha_i} - 2.$$

При малых h, очевидно, $\gamma_i/\alpha_i > 6$ и, следовательно $4ac > 4$, т.е. по крайней мере одна из величин $|a|, |c|$ больше единицы. В таком случае одна из величин $(a^2 + b^2)$, $(c^2 + d^2)$ больше единицы, что противоречит первоначальному предположению.

б) $\alpha^2+b^2>1,\ c^2+d^2>1$. Из (I8) и (I6) имеем

$$\frac{1}{c^2+d^2}+\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{4ac}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\frac{\gamma_i}{\varepsilon_i}.$$

Отсюда и в силу сделанных предположений $4ac+2>\gamma_i/\varepsilon_i$, и, следовательно, при малых h имеем $ac>1$. Далее из (I5) $a+c=-\beta_i/2\alpha_i$. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим дает $ac\le\frac{(a+c)^2}{4}\le\frac{\beta_i^2}{16\alpha_i^2}$. В силу того, что $\beta_i^2<16\alpha_i^2$, это противоречит неравенству $ac>1$.

Проведенные в пункте 2 рассуждения показывают, что если уравнение (I4) имеет две пары комплексно-сопряженных корней, то они должны удовлетворять условиям $|\lambda_1|=|\lambda_2|<\alpha_i,\ |\lambda_3|=|\lambda_4|>\alpha_i$.

3. Пусть два корня уравнения (I4) λ_1,λ_2 действительны, а λ_3,λ_4 комплексно-сопряженные. Воспользовавшись теоремой Бюдана-Фурье [6], нетрудно установить, что уравнение (I4) не имеет действительных корней в области $(-\infty,\alpha_i)$. Таким образом, $|\lambda_1|<\alpha_i,\ |\lambda_2|<\alpha_i$, или $|\omega_1|<1,\ |\omega_2|<1$.

Предположим, что $|\lambda_3|=|\lambda_4|=\alpha_i(c^2+d^2)\le\alpha_i$. Из (I7) получаем $\alpha_i[\omega_1\omega_2+2c(\omega_1+\omega_2)+c^2+d^2]=\gamma_i$. Отсюда $\alpha_i[2+2c(\omega_1+\omega_2)]>\gamma_i$ и

$$|c|>\left(\frac{\gamma_i}{2\alpha_i}-1\right)\cdot\frac{1}{|\omega_1+\omega_2|}>\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{2\alpha_i}-1\right),$$

т.е. при малом h $|c|>1$, что противоречит предположению $c^2+d^2<1$. Следовательно, единственный допустимый в этом случае вариант $|\lambda_1|<\alpha_i,\ |\lambda_2|<\alpha_i,\ |\lambda_3|=|\lambda_4|>\alpha_i$.

Суммируя проведенные в пп.I,2,3 рассуждения, приходим к выводу: при $\rho(x)>0$ и достаточно малых h корни уравнения (I4) необходимо удовлетворяют условиям (I3).

Б. Пусть $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ – собственный вектор матрицы F_i, соответствующий собственному числу λ, и $\varphi_1=\{\gamma_1,\delta_1,\varepsilon_1,0\}$, $\varphi_2=\{\beta_2,\gamma_2,\delta_2,\varepsilon_2\}$ – векторы, компонентами которых являются коэффициенты при неизвестных в уравнениях (7.I), (7.i) ($i=2$). Для устойчивости алгоритма должны выполняться условия

$$(V,\varphi_1)\ne0,\quad (V,\varphi_2)\ne0. \tag{2I}$$

Легко видеть, что для системы (7) эти условия выполняются. Действительно, компоненты собственного вектора можно представить в виде

$$V_1=1,\quad V_2=\frac{\beta_i-\lambda}{\alpha_i},\quad V_3=\frac{\gamma_i\alpha_i-\beta_i\lambda+\lambda^2}{\alpha_i^2},\quad V_4=\frac{\varepsilon_i}{\lambda}.$$

Следовательно,

$$(V,\varphi_1)=\gamma_1+\frac{\beta_i-\lambda}{\alpha_i}\delta_1+\frac{\gamma_i\alpha_i-\beta_i\lambda+\lambda^2}{\alpha_i^2}\varepsilon_1,$$

$$(V,\varphi_2)=\beta_2+\frac{\beta_i-\lambda}{\alpha_i}\gamma_2+\frac{\gamma_i\alpha_i-\beta_i\lambda+\lambda^2}{\alpha_i^2}\delta_2-\frac{\varepsilon_i}{\lambda}\varepsilon_2.$$

Учитывая теперь значения величин $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon_i$, а также тот факт, что при достаточно малых h собственные числа λ_j близки к –I, нетрудно показать справедливость неравенств $Re(V,\varphi_1)>0$, $Re(V,\varphi_2)<0$. Отсюда вытекают неравенства (2I).

С. Нужно показать, что $(V,\varphi_{N-2})\ne0$, $(V,\varphi_{N-1})\ne0$, где $\varphi_{N-2}=\{\alpha_{N-2},\beta_{N-2},\gamma_{N-2},\delta_{N-2}\}$, $\varphi_{N-1}=\{0,\alpha_{N-1},\beta_{N-1},\gamma_{N-1}\}$. Справедливость этих неравенств при всех достаточно малых h устанавливается совершенно аналогично тому, как это было сделано для неравенств (2I).

Таким образом, устойчивость алгоритма прогонки для решения системы (7) показана.

После решения системы (7) мы имеем набор величин s_i ($i=0,1,\dots,N$). Кроме того, из исходного уравнения (3) легко вычислить $s_i^{IV}=f_i-\rho_i s_i$ ($i=0,1,\dots,N$). Теперь выражение для сплайна $s(x)$ можно записать в виде:

$$s(x_i+th)=\frac{t(1-t)h^4}{720}\Big\{(2-t)s_{i-1}^{IV}+3s_i^{IV}(11+3t-8t^2+2t^3)+$$
$$+3s_{i+1}^{IV}(8+7t-2t^2-2t^3)+s_{i+2}^{IV}(1+t)\Big\}+\frac{2+t-t^2}{2}\Big[s_i(1-t)+ts_{i+1}\Big]-$$
$$-\frac{t(1-t)}{6}\Big[(2-t)s_{i-1}+(1+t)s_{i+2}\Big]\qquad(i=1,2,\dots,N-2), \tag{22}$$

где $0\le t\le1$.

Пользуясь формулой (22), легко вычислить значение приближенного решения $s(x)$, а также его производных $s^{(\nu)}(x)$

($\nu = 1,\dots,5$) (для этого необходимо предварительно продифференцировать (22) соответствующее число раз, учитывая, что $dx = h\,dt$) в любой точке промежутка $[x_1, x_{N-1}]$. Для промежутков $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ вместо (22) следует использовать формулы.

$$s(x_0+th) = [1-(1-t)^5]s_1 + (1-t)^5 s_0 + [(1-t)^5-(1-t)]hs_1' + [(1-t)^2-(1-t)^5]\frac{h^2}{2}s_1'' + [(1-t)^5-(1-t)^3]\frac{h^3}{6}s_1''' + t(1-t)\frac{h^4}{24}s_1^{IV}, \qquad (23)$$

$$s(x_{N-1}+th) = (1-t^5)s_{N-1} + t^5 s_N + (t-t^5)hs_{N-1}' + (t^2-t^5)\frac{h^2}{2}s_{N-1}'' + (t^3-t^5)\frac{h^3}{6}s_{N-1}'' + t^4(1-t)\frac{h^4}{24}s_{N-1}^{IV}, \qquad (24)$$

$$0 \le t \le 1,$$

где величины $s_j^{(\nu)}$ ($j = 1, N-1$; $\nu = 1,2,3$) вычисляются из (22) и равны

$$s_1' = \frac{h^3}{720}(2s_0^{IV}+33s_1^{IV}+24s_2^{IV}+s_3^{IV}) + \frac{1}{6h}(-2s_0-3s_1+6s_2-s_3),$$

$$s_1'' = \frac{h^2}{120}(-s_0^{IV}-8s_1^{IV}-s_2^{IV}) + \frac{1}{h^2}(s_0-2s_1+s_2),$$

$$s_1''' = \frac{h}{120}(s_0^{IV}-33s_1^{IV}-27s_2^{IV}-s_3^{IV}) + \frac{1}{h^3}(-s_0+3s_1-3s_2+s_3),$$

$$s_{N-1}' = \frac{h^3}{720}(-s_{N-3}^{IV}-24s_{N-2}^{IV}-33s_{N-1}^{IV}-2s_N^{IV}) + \frac{1}{6h}(s_{N-3}-6s_{N-2}+3s_{N-1}+2s_N),$$

$$s_{N-1}'' = \frac{h^2}{120}(-s_{N-2}^{IV}-8s_{N-1}^{IV}-s_N^{IV}) + \frac{1}{h^2}(s_{N-2}-2s_{N-1}+s_N),$$

$$s_{N-1}''' = \frac{h}{120}(s_{N-3}^{IV}+27s_{N-2}^{IV}+33s_{N-1}^{IV}-s_N^{IV}) + \frac{1}{h^3}(-s_{N-3}+3s_{N-2}-3s_{N-1}+s_N).$$

В заключение заметим, что описанный метод получения приближенного решения легко распространяется и на уравнения с более общими, нежели (2), краевыми условиями. Если в краевые условия входят величины $s_j^{(\nu)}$ ($j = 0, N$; $\nu = 1,2,3,4$), то их выражения через s_i, s_i^{IV} легко получить из (23) и (24).

Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", I972.

2. ДУЙСЕКОВ А.К. Интерполирование сплайн-функциями пятой степени дефекта I с равноудаленными узлами. -"Изв. АН Каз.ССР", I974, № 5, с. 28-33.

3. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatievs. - "J.Inst. Math.and Appl.", 1971, v.7, N 3, p.398-406.

4. RUSSELL R.D., SHAMPINE L.F. A collocation method for boundary value problems. - "Numer.Math.", 1972, Bd 19, N 1, S.1-28.

5. СОФРОНОВ И.Д. О методе прогонки для решения разностных краевых задач. -"Журнал вычислительной матем. и мат. физики", I964, т. 4, № 2, с. 256-266.

6. КУРОШ А.Г. Курс высшей алгебры. М., "Наука", I965.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 октября I975 года