УДК 518:517.944/.947

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Б.С.Киндалев

В динамической теории упругости представляет интерес численное решение уравнений в частных производных четвертого порядка. В данной работе для решения одной простой задачи этого класса используются кубические сплайны.

## 1. Постановка задачи. Построение разностной схемы

Пусть в $\bar{D}=\{0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ требуется найти численное решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad 0\le x\le 1,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

$$u\Big|_{x=0}=g_1(t), \quad u\Big|_{x=1}=g_2(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=g_3(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=1}=g_4(t), \quad 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\phi(x), \quad 0\le x\le 1. \tag{3}$$

Для решения задачи (1) – (3) введем в $\bar{D}$ разностную сетку $\bar{D}_{h\tau}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau$, где $\bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\dots,N;\ \ h=\frac{1}{N}\}$, $\bar{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,\dots,K;\ \tau=\frac{T}{K}\}$. Продолжим сетку $\bar{D}_{h\tau}$ влево и вправо при помощи узлов $(x_i, t_n)$ ( $i=-1,\ N+1$; $n=0,1,\dots,K$ ). Обозначим через $y_i^n$ значение в узле ( $x_i$, $t_n$ ) сеточной функции $y$, определенной на $\bar{D}_{h\tau}$, а через $S_n(x)$ – кубическую сплайн-функцию, интерполирующую значения $y_i^n$.

Заменяя производные, входящие в уравнение (1), разностными отношениями по формулам:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=x_i} \sim \frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{t=t_n} \sim \frac{M_{i+1}^n-2M_i^n+M_{i-1}^n}{h^2},$$

где $M_i^n=S_n''(x_i)$, и вводя вещественный параметр $\sigma$, рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\tau^2} = -\sigma\,\frac{M_{i+1}^{n+1}-2M_i^{n+1}+M_{i-1}^{n+1}}{h^2} -$$

$$-(1-2\sigma)\,\frac{M_{i+1}^n-2M_i^n+M_{i-1}^n}{h^2} - \sigma\,\frac{M_{i+1}^{n-1}-2M_i^{n-1}+M_{i-1}^{n-1}}{h^2}, \tag{4}$$

$$i=0,1,\dots,N, \quad n=1,2,\dots,K-1.$$

Исключим из (4) величины $M_i^n$, $i=-1,\dots,N+1$; $n=0,1,\dots,K$. Известно [1], что

$$M_{i+1}^n+4M_i^n+M_{i-1}^n = 6\,\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}, \tag{5}$$

$$i=0,1,\dots,N;\quad n=0,1,\dots,K.$$

Перепишем (5) следующим образом:

$$M_{i+1}^n-2M_i^n+M_{i-1}^n = 6\,\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2} - 6M_i^n \tag{6}$$

Используя (6), приведем (4) к виду:

$$\frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{6\tau^2} + \sigma\,\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^4} + (1-2\sigma)\,\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^4} +$$

$$+\sigma\,\frac{y_{i+1}^{n-1}-2y_i^{n-1}+y_{i-1}^{n-1}}{h^4} = \sigma\,\frac{M_i^{n+1}}{h^2} + (1-2\sigma)\,\frac{M_i^n}{h^2} + \sigma\,\frac{M_i^{n-1}}{h^2}, \tag{7}$$

$$i=0,1,\dots,N, \quad n=1,2,\dots,K-1.$$

Из (5) имеем

$$M_{i+1}^{n+1}+4M_i^{n+1}+M_{i-1}^{n+1}=6\,\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{8}$$

$$M_{i+1}^{n}+4M_i^{n}+M_{i-1}^{n}=6\,\frac{y_{i+1}^{n}-2y_i^{n}+y_{i-1}^{n}}{h^2},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{9}$$

$$M_{i+1}^{n-1}+4M_i^{n-1}+M_{i-1}^{n-1}=6\,\frac{y_{i+1}^{n-1}-2y_i^{n-1}+y_{i-1}^{n-1}}{h^2},\quad i=1,2,\ldots,N-1. \tag{I0}$$

Если умножить (8)-(I0) соответственно на $\frac{\vartheta}{h^2}$, $\frac{(1-2\vartheta)}{h^2}$, $\frac{\vartheta}{h^2}$, а затем сложить левые и правые части полученных соотношений, то, используя (7), легко получить следующую трехслойную разностную схему:

$$\left(y_{i-2}^{n+1}+y_{i+2}^{n+1}\right)\frac{\vartheta}{h^4}+\left(y_{i-1}^{n+1}+y_{i+1}^{n+1}\right)\left(\frac{1}{6\tau^2}-\frac{4\vartheta}{h^4}\right)+y_i^{n+1}\left(\frac{2}{3\tau^2}+\frac{6\vartheta}{h^4}\right)+$$

$$+\left(y_{i-2}^{n}+y_{i+2}^{n}\right)\frac{(1-2\vartheta)}{h^4}+\left(y_{i-1}^{n}+y_{i+1}^{n}\right)\left(-\frac{1}{3\tau^2}-\frac{4(1-2\vartheta)}{h^4}\right)+$$

$$+y_i^n\left(-\frac{4}{3\tau^2}+\frac{6(1-2\vartheta)}{h^4}\right)+\left(y_{i-2}^{n-1}+y_{i+2}^{n-1}\right)\frac{\vartheta}{h^4}+$$

$$+\left(y_{i-1}^{n-1}+y_{i+1}^{n-1}\right)\left(\frac{1}{6\tau^2}-\frac{4\vartheta}{h^4}\right)+y_i^{n-1}\left(\frac{2}{3\tau^2}+\frac{6\vartheta}{h^4}\right)=0, \tag{II}$$

$$i=1,2,\ldots,N-1,\quad n=1,2,\ldots,K-1.$$

Введем следующие обозначения: $\delta_t^2 y_i^n=y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}$, $\delta_x^2 y_i^n=y_{i-1}^n-2y_i^n+y_{i+1}^n$, $\delta_x^4 y_i^n=\delta_x^2(\delta_x^2 y_i^n)$.

Крандаллом в [2] для численного решения уравнения (I) была предложена разностная схема

$$\left(\frac{\tau}{h^2}\right)^2(1+\vartheta\delta_t^2)\delta_x^4 y_i^n+(1+\beta\delta_x^2)\delta_t^2 y_i^n=0, \tag{I2}$$

$$i=1,2,\ldots,N-1,\quad n=1,2,\ldots,K-1,$$

где $\vartheta$ и $\beta$ – некоторые весовые множители.



Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что разностная схема (II) может быть получена из схемы, предложенной Крандаллом, если положить $\beta=\frac{1}{6}$.

Следуя работе [2], выпишем погрешность аппроксимации и условия устойчивости разностной схемы (II) либо, что все равно, (I2) с $\beta=\frac{1}{6}$. В классе достаточно гладких решений уравнения (I) имеет место разложение

$$\frac{(1+\vartheta\delta_t^2)\delta_x^4 u_i^n}{h^4}+\frac{(1+\frac{1}{6}\delta_x^2)\delta_t^2 u_i^n}{\tau^2}=\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u_i^n}{\partial x^4}+$$

$$+h^4\left[-\frac{1}{720}+\frac{z^2}{12}(1-12\vartheta)\right]\frac{\partial^8 u_i^n}{\partial x^8}+O(h^6),$$

где $z=\frac{\tau}{h^2}=const$.

Таким образом, разностная схема (II) аппроксимирует уравнение (I) в классе достаточно гладких решений с точностью до членов порядка $O(h^4)$. Если выполняется соотношение $z^2(1-12\vartheta)=\frac{1}{60}$, то порядок аппроксимации равен $O(h^6)$. Следует отметить, что при $\beta\neq\frac{1}{6}$ схема Крандалла аппроксимирует исходное уравнение с точностью до членов порядка $O(h^2)$. Следовательно, привлечение кубических сплайнов для численного решения уравнения (I) приводит к схемам повышенной точности.

Условие устойчивости примет вид:

а) Разностная схема (II) при $\vartheta\geq\frac{1}{4}$ абсолютно устойчива.

б) При $\vartheta<\frac{1}{4}$ схема (II) устойчива, если $z^2\leq\frac{1}{12(1-4\vartheta)}$.

В зависимости от того, с каким порядком схема (II) аппроксимирует уравнение (I), построим разностную аппроксимацию того же порядка для краевых и начальных условий.

При использовании схемы погрешности аппроксимации порядка $O(h^4)$, можно предложить следующую аппроксимацию краевых и начальных условий:

$$y_0^n=g_1(n\tau),$$

$$y_N^n=g_2(n\tau),$$

$$y_{-1}^n = 2g_1(n\tau) - y_1^n + h^2 g_3(n\tau) - \frac{h^4}{12} g_1''(n\tau) + O(h^6),$$

$$y_{N+1}^n = 2g_2(n\tau) - y_{N-1}^n + h^2 g_4(n\tau) - \frac{h^4}{12} g_2''(n\tau) + O(h^6),$$

$$y_i^0 = \varphi(ih), \tag{13}$$

$$y_i^{-1} = y_i^1 - 2\tau\psi(ih) + O(\tau^3),$$

$$i = 0,1,\ldots, N; \quad n = 0,1,\ldots,K.$$

В случае схемы погрешности аппроксимации порядка $O(h^6)$ возьмём аппроксимацию в виде:

$$y_0^n = g_1(n\tau),$$

$$y_N^n = g_2(n\tau),$$

$$y_{-1}^n = 2g_1(n\tau) - y_1^n + h^2 g_3(n\tau) - \frac{h^4}{12} g_1''(n\tau) - \frac{h^6}{360} g_3''(n\tau) + O(h^8),$$

$$y_{N+1}^n = 2g_2(n\tau) - y_{N-1}^n + h^2 g_4(n\tau) - \frac{h^4}{12} g_2''(n\tau) - \frac{h^6}{360} g_4''(n\tau) + O(h^8), \tag{14}$$

$$y_i^0 = \varphi(ih),$$

$$y_i^1 = \varphi(ih) + \tau\psi(ih) - \frac{\tau^2}{2}\varphi^{IV}(ih) - \frac{\tau^3}{6}\psi^{IV}(ih) + O(\tau^4),$$

$$n = 0,1,\ldots,K, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

При построении аппроксимаций (13) и (14) предполагалась достаточная гладкость начальных и краевых условий (2)-(3). В (14) предполагается, что при $t = 0$ выполняются соотношения:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\varphi^{IV}(x),$$

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{t=0} = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\right]\Bigg|_{t=0} = -\psi^{IV}(x).$$



## 2. Построение кубического сплайн-решения

Согласно работе [1], кубический сплайн $S_n(x)$ на интервале $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots, N$, определяется формулой

$$S_n(x) = M_{i-1}^n \frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i^n \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \left(y_{i-1}^n - \frac{M_{i-1}^n h^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h} + \left(y_i^n - \frac{M_i^n h^2}{6}\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h}.$$

Таким образом, для построения кубического сплайн-решения на $n$-м временном слое необходимы величины $M_i^n$ и $y_i^n$, $i = 0,1,\ldots, N$.

В дальнейшем понадобятся следующие аппроксимации краевых условий, которые можно получить, используя оценки, приведенные в [3]:

$$\frac{1}{2}\left(M_0^n + \frac{y_{-1}^n - 2y_0^n + y_1^n}{h^2}\right) = g_3(n\tau) + O(h^4),$$

$$\frac{1}{2}\left(M_N^n + \frac{y_{N-1}^n - 2y_N^n + y_{N+1}^n}{h^2}\right) = g_4(n\tau) + O(h^4), \quad n = 0,1. \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\left(M_0^n + \frac{y_{-1}^n - 2y_0^n + y_1^n}{h^2} + \frac{1}{180} g_3''(n\tau)\right) = g_3(n\tau) + O(h^6),$$

$$\frac{1}{2}\left(M_N^n + \frac{y_{N-1}^n - 2y_N^n + y_{N+1}^n}{h^2} + \frac{1}{180} g_4''(n\tau)\right) = g_4(n\tau) + O(h^6), \quad n = 0,1. \tag{16}$$

Технику построения кубического сплайн-решения рассмотрим в случае, когда разностная схема (11) аппроксимирует исходное уравнение (1) с точностью до членов порядка $O(h^4)$.

Задавая $M_0^0$, $M_N^0$ согласно (15), найдем $M_i^0$, $i = 1,2,\ldots, N-1$, из решения системы

$$M_{i+1}^n + 4M_i^n + M_{i-1}^n = 6\,\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}, \quad n = 0, \; i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{17}$$

Используя (II), (I3), находим $y_i^1$, $i = 0,1,\dots,N$. Система уравнений (I7) при $n = 1$ позволяет определить $M_i^1$, $i = 1,2,\dots,N-1$, если $M_0^1$, $M_N^1$ взяты из (I5).

Если известны значения $y_i^n$, $i = 0,1,\dots,N$, на $(n-1)$-м и $n$-м временном слое, то (II) с (I3) позволяет найти $y_i^{n+1}$, $i = 0,1,\dots,N$. Если же известны значения $M_i^{n-1}$ и $M_i^n$ $i = 0,1,\dots,N$, то из (7) можно найти $M_i^{n+1}$, $i = 0,1,\dots,N$.

В случае, когда схема (II) аппроксимирует уравнение (I) с точностью до членов порядка $O(h^6)$ техника построения аналогична рассмотренной выше, только $M_0^0$, $M_N^0$, $M_0^1$, $M_N^1$ берутся уже из (I6).

Если $\vartheta \neq 0$, то для построения кубического сплайн-решения приходится решать систему уравнений (II) с пятидиагональной матрицей. Можно это сделать методом прогонки [4]. Достаточные условия устойчивости прогонки примут вид:

$$\tau^2 \leq \frac{1}{4\vartheta}, \quad \text{если} \quad \vartheta > 0,$$

$$\tau^2 \leq \frac{1}{48|\vartheta|}, \quad \text{если} \quad \vartheta < 0.$$

При $\vartheta = 0$ система уравнений (II) имеет трехдиагональную структуру. Её удобно решать обычным методом прогонки для трехдиагональных матриц [5], который, как легко проверить, является устойчивым.

В заключение отметим следующие два обстоятельства. Аппроксимация решения $u(x,t)$ по пространственной переменной $x$ кубическим сплайном приводит нас к разностной схеме для определения значений сплайна в узлах сетки. Как было уже замечено, такую же схему можно получить, если использовать метод конечных разностей, как это делается в [2]. Однако разностный подход дает приближенное решение в виде таблицы дискретных значений, в то время как использование кубического сплайна позволяет получать на каждом временном слое гладкое численное решение.

Второй, на наш взгляд, положительный момент заключается в подходе к построению схемы повышенной точности. Известно, что на пятиточечном шаблоне аппроксимировать $\frac{d^4u}{dx^4}$ в классе достаточно гладких функций разностями можно не лучше, чем с погрешностью $O(h^2)$. Поэтому, чтобы получить разностную схему четвертого порядка точности, приходится вводит в схему разностные операторы с неопределенными коэффициентами, выбор которых позволяет повысить точность аппроксимации.



Использование кубического сплайна для аппроксимации четвертой производной позволяет обойти эту трудность, так как в работе [3] показано, что $\frac{M_{i-1}-2M_i+M_{i+1}}{h^2}$ аппроксимирует $\frac{d^4u}{dx^4}$ в классе достаточно гладких функций с погрешностью порядка $O(h^4)$. Исключение же из схемы $M_i$ позволяет ответить на вопрос, какие операторы и с какими коэффициентами следовало бы брать в разностном подходе, чтобы аппроксимация была $O(h^4)$.

Автор благодарен В.Л.Мирошниченко за полезное обсуждение данной работы.

## Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", I972.

2. CRANDALL S.H. Optimum recurrence formulas for a fourth order parabolic partial differential equation.-"J.Assoc.Comput. Machinery",1957,v.4, p.467-471.

3. FYFE D.J. The use of cubic splines in the solution of certain fourth order boundary value problems. - "Comput.J." , 1970,v.13, N 2,p.204-205.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42. Новосибирск, I970, с.89-I08.

5. САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", I97I.

Поступила в ред.-изд.отд.
3 июня I975 года