

УДК 517.9

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,
СВЯЗАННОЙ С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПРИТЯЖЕНИЕМ МЕМБРАНЫ

Р.Г. Лукьянова, С.И. Фадеев

Описание некоторых физических явлений (например, [1-3]) сводится к решению краевой задачи вида

$$\frac{1}{x^\rho} \frac{d}{dx} \left[x^\rho m(x) \frac{dy}{dx} \right] + \sigma \varphi(x) f(y) = 0, \quad |x| < 1, \quad (1)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1, \quad (2)$$

где $m > 0, \varphi \geq 0 (\varphi \neq 0), f > 0$ — кусочно-непрерывные положительные функции своих аргументов с возможными точками разрыва первого рода, σ — положительное число, $\rho = 0, 1, 2$ — для плоской, осевой и центральной симметрий, соответственно, если x — пространственная координата. Используя функцию Грина $G(x, \theta)$, представим (1), (2) в виде интегрального уравнения типа Гаммерштейна [4]:

$$y(x) = \sigma \int_{-1}^1 G(x, \theta) \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta, \quad |x| < 1. \quad (3)$$

Известно, что в зависимости от вида $f(y)$ и величины σ интегральное уравнение может иметь одно, несколько решений или вообще не иметь решений, и, таким образом, необходим предварительный качественный анализ, связанный с определением точек ветвления решений.

В предлагаемой заметке мы ограничимся частным случаем, когда имеется симметричное относительно $x = 0$ решение (1), (2), то есть $m(x) = m(-x)$ и $\varphi(x) = \varphi(-x)$. При этом $y(x)$ удовлетворяет (1) с граничными условиями

$\frac{dy}{dx} = 0$ при $x=0$; $y=0$ при $x=1$, $0 \leq x < 1$, (4)
и максимальное значение $y(x)$ равно $y(0)=y_0$. Как и в [5,6], мы рассмотрим конкретные примеры, в которых численное решение (3) строится для фиксированного y_0 (область изменения y_0 обычно известна из физических соображений), а затем отыскивается соответствующее значение σ . В задачах, связанных с электростатическим притяжением ($f = (1-y)^2$), такой прием обычно позволяет построить однозначную зависимость σ от y_0 , в то время как обратная зависимость имеет две ветви, что физически просто интерпретируется [1]. Строгое доказательство этого факта для задачи (I)-(2) даже в случае симметричных $m(x)$ и $\varphi(x)$ достаточно затруднительно [3] и не является целью предлагаемой работы. Заметим, что одна из особенностей задач, описывающих электростатическое притяжение мембраны, состоит в том, что практический интерес представляют как устойчивое, так и неустойчивое решения, вследствие чего требуется строить функцию $\sigma(y_0)$ на всем интервале изменения y_0 .

Вычисление σ по заданному y_0 можно осуществить при помощи метода стрельбы, в которой σ — параметр пристрелки: либо отыскивается решение задачи Коши для (I) с начальными данными

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $y(1)=0$, либо в ходе пристрелки выбирается такое решение краевой задачи (I) с граничными условиями $y(0)=y_0$, $y(1)=0$, что $dy/dx=0$. При помощи функции Грина задачи (I), (5), имеющей вид

$$V(x, \theta) = -\theta^p \int_0^x \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)}, \quad (6)$$

преобразуем (I), (5) к интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \sigma \int_0^x V(x, \theta) \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

приписав $m(x)$ и $\varphi(x)$ некоторые постоянные положительные значения, если $x > 1$, и положив $f(y) = 0$, если $y \leq 0$. Выражение производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma}{x^p m(x)} \int_0^x \theta^p \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta \quad (8)$$

показывает, что $y(x)$ — монотонно убывающая функция, и, таким образом, при любом ограниченном положительном значении σ найдется x_n такое, что $y(x_n) = 0$. Очевидно, мы получим искомое решение при помощи пристрелки в том случае, если существует единственное σ , при котором $x_n = 1$.

Другой способ вычисления σ , который можно использовать при решении самосопряженной краевой задачи, содержащей производные более высокого порядка, связан с представлением (I), (4) в виде (3). С учетом симметрии относительно $x=0$ ($0 \leq x \leq 1$) получим следующее интегральное уравнение:

$$y(x) = \sigma J(x), \quad J(x) = \int_0^1 K(x, \theta) \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta, \quad (9)$$

$$K(x, \theta) = \begin{cases} \theta^p \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)}, & x \leq \theta, \\ \theta^p \int_x^1 \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)}, & x \geq \theta. \end{cases} \quad (10)$$

Соответствующее заданному y_0 значение σ находится по формуле $\sigma = y_0 J'(0)$, (II)

где $y(x)$ —, входящее в подынтегральное выражение, удовлетворяет функциональному уравнению

$$y(x) = y_0 J'(0) J(x), \quad (12)$$

которое мы будем решать методом последовательных приближений. Этим способом нами были решены несколько конкретных задач, описывающих электростатическое притяжение мембраны [5,6]. Применение метода последовательных приближений предполагает, как уже отмечалось, однозначность функции $\sigma(y_0)$.

Пусть $y(x)$ удовлетворяет (I), (4) и по заданному y_0 найдено $\sigma(y_0)$. Если в (8) заменить $F = \varphi f m^{-1}$ на $\bar{F}$, $\bar{F} = F + \delta F$, $\delta F > 0$, то при тех же y_0 и $\sigma(y_0)$ решение задачи Коши обратится в ноль при $x_n < 1$. Уменьшая σ , можно добиться того, что x_n будет равно 1. Таким образом, решение краевой задачи

$$\frac{1}{x^p} \frac{d}{dx} \left[x^p \tilde{m}(x) \frac{dy}{dx} \right] + \sigma \tilde{\varphi}(x) \tilde{f}(y) = 0, \quad (I3)$$

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x=0; \quad y=0 \text{ при } x=1, \quad (I4)$$

где $\tilde{m}, \tilde{\varphi}$ и $\tilde{f}$ — приближения m, φ и f , определяет σ , которое меньше $\sigma(y_0)$, если $\delta F > 0$, и больше $\sigma(y_0)$, если $\delta F < 0$.

Для определенности предположим, что $f(y)$ — монотонно возрастающая функция. Построим систему узловых точек $\{x_i\}$, например, равноотстоящих друг от друга: $x_i = ih, h = \frac{1}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим далее: $y(x_i) = y_i, f(y_i) = f_i, \bar{\varphi}_i$ и $\bar{f}_i$ — наименьшее и наибольшее значения $\varphi(x)$ при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{m}_i$ и $\bar{m}_i$. Так как $y(x)$ — монотонно убывающая с ростом x функция, то $f_i > f_{i+1}$. При этом в качестве $\tilde{m}, \tilde{\varphi}$ и $\tilde{f}$ можно взять следующие кусочно-постоянные функции.

$$\begin{aligned} \delta F < 0: \quad \tilde{\varphi} &= \bar{\varphi}_i, \quad \tilde{f} = f_{i+1}, \quad \tilde{m} = \bar{m}_i; \\ \delta F > 0: \quad \tilde{\varphi} &= \bar{\varphi}_i, \quad \tilde{f} = f_i, \quad \tilde{m} = \bar{m}_i. \end{aligned} \quad (I5)$$

Пусть, например, $n=1, m(x) \geq \bar{m}_0, \varphi(x) \leq \bar{\varphi}_0, f(y) \leq f_0$. Используя (8), получим решение задачи Коши при $\delta F > 0$ в виде:

$$y(x) = y_0 - \sigma(y_0) \frac{\bar{\varphi}_0 f_0}{2(\rho+1)\bar{m}_0} x^2.$$

Осложная оценка $\sigma(y_0)$ снизу следует из условия: $y(1) = 0$. Имеем:

$$\sigma(y_0) > \sigma = \frac{2(\rho+1)\bar{m}_0 y_0}{\bar{\varphi}_0 f(y_0)}.$$

1. Простейший алгоритм численного решения (I2) связан с приближенным представлением функционального уравнения в виде конечномерной системы трансцендентных уравнений. Полагая в (9) и (I0) $x = x_i$, где x_i — узловая точка разбиения отрезка $[0, 1]$ на n частей, получим:

$$y_i = \sigma \left\{ \int_{x_i}^1 \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)} \int_{x_i}^{\tau} \theta^p \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta + \int_{x_i}^1 \theta^p \left[\int_{\theta}^1 \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)} \right] \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta \right\}.$$

При помощи выражения y_i составим разность $y_i - y_{i+1}$:

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)} \sum_{s=0}^{i-1} \int_{x_s}^{x_{s+1}} \theta^p \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta^p \left[\int_{\theta}^{x_{i+1}} \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)} \right] \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta \right\}. \quad (I.1)$$

Кроме того, из выражения для y_0 следует равенство:

$$\sigma = y_0 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta^p \left[\int_{\theta}^1 \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)} \right] \varphi(\theta) f[y(\theta)] d\theta \right\}^{-1}. \quad (I.2)$$

Подставим в (I.1) и (I.2) вместо f кусочно-постоянную функцию f_Δ :

$$f_\Delta = f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(y_i - \frac{y_i - y_{i+1}}{2}\right), \text{ если } y_i > y > y_{i+1}. \quad (I.3)$$

При этом неизвестные $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$) определяются из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left(f_{i+\frac{1}{2}} C_i + A_i \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} B_s \right), \quad (I.4)$$

$$\sigma = y_0 \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu+\frac{1}{2}} \left(C_\nu + B_\nu \sum_{s=\nu+1}^{n-1} A_s \right) \right]. \quad (I.5)$$

Здесь использованы обозначения:

$$A_i = g_i(x), \quad B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta^p \varphi(\theta) d\theta, \quad (I.6)$$

$$C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta^p g_i(\theta) \varphi(\theta) d\theta, \quad g_i(\theta) = \int_{\theta}^{x_{i+1}} \frac{d\tau}{\tau^p m(\tau)}.$$

При $i=0$ второе слагаемое в правой части (I.4) следует считать равным нулю.

В качестве начального приближения $y_i^{(0)}$, $i=1, 2, \dots, n-1$, можно взять значения $y_i^{(0)} = y_0 / (1 - x_i)$. Подставив в правые части (1.4), (1.5) $f_{i+\frac{1}{2}} = f(y_i^{(0)} - \frac{y_i^{(0)} - y_{i-1}^{(0)}}{2})$, найдем $y_i^{(1)}$ и так далее до тех пор, пока модуль относительной разности κ -го и $(\kappa+1)$ -го приближений σ не будет меньше наперед заданного положительного числа ε :

$$\frac{|\sigma^{(\kappa)} - \sigma^{(\kappa+1)}|}{\sigma^{(\kappa)}} < \varepsilon, \quad \sigma^{(\kappa)} = y_0 \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu+\frac{1}{2}}^{(\kappa)} \left(C_\nu + B_\nu \sum_{s=\nu+1}^{n-1} A_s \right) \right]^{-1} \quad (1.7)$$

Легко заметить, что метод, использующий интегральное представление типа (3) для решения краевой задачи, является менее общим, чем метод стрельбы. Однако этот метод имеет, по крайней мере, два привлекательных свойства, обусловленных именно его "узкой специализацией": 1) благодаря использованию функции Грина, итерации $y^{(\kappa)}(x)$ удовлетворяют граничным условиям автоматически; 2) число итераций практически всегда будет меньше числа пристрелок в методе стрельбы в тех случаях, когда затруднительно указать заранее достаточно близкие границы σ .

Рассмотрим пример, в котором величина напряжения срабатывания пленочного электростатического реле [1] определяется с учетом проводимости слоя диэлектрика между верхним и нижним электродами. (Все обозначения, не оговариваемые в тексте, приведены на рис.1, где схематично изображена модель пленочного электростатического реле. Картина симметрична относительно $X=0$). Подвижная часть верхнего электрода - натянутая мембрана - притягивается к неподвижному нижнему электроду силой, обусловленной разностью потенциалов $U_0 - U(X)$. Если предположить, что среда (воздух) между поверхностью диэлектрика и мембраной является непро-

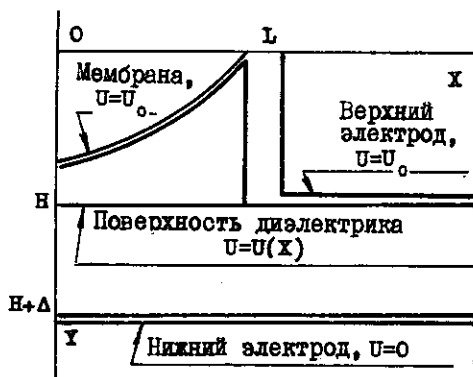


Рис.1

водящей, то распределение потенциала по поверхности диэлектрика определяется заданием только линейных размеров Δ , $\mathcal{L}$ и потенциала U_0 . На это обстоятельство обратил внимание В.Л.Дятлов.

Условия равновесия мембраны в дифференциальной форме представим следующим образом [1]:

$$\mathcal{N} \frac{d^2 y}{dX^2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2}{2} = 0, \quad \varepsilon = \frac{U_0 - U}{H - y}, \quad (1.8)$$

$$\frac{dy}{dX} = 0 \text{ при } X=0; \quad y=0 \text{ при } X=\mathcal{L}.$$

Здесь $\mathcal{N}$ - удельная, растягивающая мембрану сила, ε_0 - электрическая постоянная для пустоты, ε - напряженность электростатического поля в узком зазоре. В качестве масштабов y , X и U выберем H , $\mathcal{L}$ и U_0 . Воспользуемся безразмерными переменными x , y и u : $y = Hy$, $X = \mathcal{L}x$, $U = U_0 u$. При этом (1.8) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \sigma \varphi(x) f(y) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x=0, \quad y=0 \text{ при } x=1,$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 \mathcal{L}^2}{2 \mathcal{N} H^3}, \quad \varphi = (1-u)^2, \quad f = \frac{1}{(1-y)^2}. \quad (1.10)$$

Функция $u(x)$ определяется из решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе $0 < y < \Delta$: требуется найти гармоническую в указанной области функцию $V(X, y)$, удовлетворяющую граничным условиям (см.рис.2):

$$\begin{aligned} V &= 0 & \text{при } y=0, & |X| < \infty; \\ V &= U_0 & \text{при } y=\Delta, & |X| > \mathcal{L}; \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 & \text{при } y=\Delta, & |X| < \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

(Использование здесь обозначений Δ и y в другом смысле не вызовет в дальнейшем недоразумений). Очевидно, смешанной краевой задаче будет эквивалентна формулировка ее как задачи Дирихле в полосе $0 < y < 2\Delta$ с двумя полубесконечными вырезами вдоль $y = \Delta$

(рис.2), если граничные условия для $V(X,Y)$ заданы в виде:

$$V=0 \text{ при } Y=0 \text{ и } Y=2\Delta, |X| < \infty; \quad (\text{I.I2})$$

$$V=U_0 \text{ при } Y=\Delta, |X| > \Delta.$$

Условие равенства нулю нормальной производной в (I.II) будет выполнено в силу симметрии относительно $Y=0$.

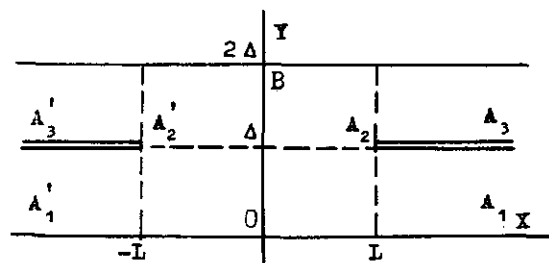


Рис. 2

A_1, A_2, A_3 и A_4 , удаленными в бесконечность (рис.2). Используя интеграл Шварца-Кристоффеля [7], получим функцию $z(\zeta)$, реализующую искомое отображение в виде:

$$z = X + iY, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \alpha = \frac{\pi\Delta}{2\Delta},$$

$$e^{\frac{\pi}{2}z} = \frac{\zeta^2 + (\alpha + \frac{1}{\alpha})\zeta + 1}{\zeta^2 - (\alpha + \frac{1}{\alpha})\zeta + 1}, \quad \alpha = \text{th} \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{I.I3})$$

причем точки O, A_1, A_2, A_3 и B границы в плоскости z соответствуют в том же порядке точкам O, a_1, a_2, a_3 и $b = \infty$ границы в

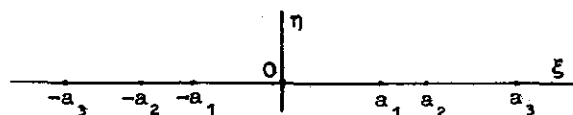


Рис. 3

плоскости ζ , где $a_1 = a, a_2 = 1, a_3 = 1/a$. Образы точек A_1, A_2 и A_3 симметричны a_1, a_2 и a_3 относительно $\zeta = 0$ (рис.3). Приравня-

ем действительные и мнимые части левого и правого выражений в (I.I3), после чего формулы, устанавливающие соответствие точек рассматриваемых областей, запишутся следующим образом:

$$e^{\frac{\pi}{2}X} \cos \frac{\pi}{2}Y = \frac{(\xi^2 - \eta^2 + 1) + 4[\xi^2\eta^2 - (\xi^2 + \eta^2)\text{cth}\alpha]}{(\xi^2 - \eta^2 + 1 - 2\xi\text{cth}\alpha)^2 + 4\eta^2(\xi - \text{cth}\alpha)^2}, \quad (\text{I.I4})$$

$$e^{\frac{\pi}{2}X} \sin \frac{\pi}{2}Y = \frac{4\eta(1 - \xi^2 - \eta^2)\text{cth}\alpha}{(\xi^2 - \eta^2 + 1 - 2\xi\text{cth}\alpha)^2 + 4\eta^2(\xi - \text{cth}\alpha)^2}.$$

Из (I.I4), в частности, следует, что отрезку прямой $Y=\Delta, |X| < \Delta$ соответствует верхняя половина окружности

$$\eta = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi = \text{cth}\alpha \text{ th} \frac{\pi X}{2\Delta}. \quad (\text{I.I5})$$

Преобразование (I.I4) позволяет найти V как решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости $\text{Im} \zeta > 0$ с граничными условиями:

$$V = U_0 \text{ при } \eta = 0, \quad \alpha < |\xi| < \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{I.I6})$$

$$V = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad |\xi| < \alpha, \quad |\xi| > \frac{1}{\alpha},$$

то есть представлять V в виде интеграла Пуассона [7]:

$$V(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V \Big|_{\eta=0} \frac{\eta dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2}.$$

С учетом (I.I6) получим:

$$V(X, Y) = \frac{U_0}{\pi} \left(\arctg \frac{1 + a\xi}{a\eta} - \arctg \frac{a + \xi}{\eta} + \right.$$

$$\left. + \arctg \frac{1 - a\xi}{a\eta} - \arctg \frac{a - \xi}{\eta} \right), \quad (\text{I.I7})$$

где $\xi = \xi(X, Y)$ и $\eta = \eta(X, Y)$ определены в (I.I4). Если $\alpha^2 < \xi^2 + \eta^2 < \frac{1}{\alpha^2}$, то выражение (I.I7) можно преобразовать к виду:

$$V(X, Y) = \frac{U_0}{\pi} \left[\pi - \arctg \frac{2a\eta}{1 - \alpha^2(\xi^2 + \eta^2)} - \arctg \frac{2a\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \alpha^2} \right].$$

Подставив сюда ξ и η из (I.I5), найдем

$$U(X) = U_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg (\text{sh}\alpha \sqrt{1 - \text{cth}^2\alpha} \cdot \text{th}^2 \frac{\pi X}{2\Delta}) \right]. \quad (\text{I.I8})$$

Определением $\mathcal{U}(X)$ завершается постановка задачи о статическом равновесии мембраны, так как теперь нетрудно записать искомую функцию $\varphi(x)$, входящую в (I.9):

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi^2} \operatorname{arctg}^2 \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha x} \sqrt{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha x) \operatorname{sh}(\alpha + \alpha x)} \right] \quad (\text{I.19})$$

Отметим некоторые свойства $\varphi(x)$. Это монотонно убывающая с ростом x функция, причём

$$\varphi = \frac{4}{\pi^2} \operatorname{arctg}^2(\operatorname{sh} \alpha), \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{8\alpha \operatorname{th} \alpha}{\pi^2} \quad \text{при } x = 1.$$

При $\alpha \rightarrow \infty, 0 \leq x < 1$, $\varphi(x)$ ведет себя как

$$1 - \frac{8e^{-\alpha}}{\pi \sqrt{1 - e^{-2\alpha(1-x)}}},$$

то есть быстро возрастает до единицы. Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что учет проводимости диэлектрика вносит существенную поправку в определение напряжения срабатывания, которое связано с расчетом максимального значения $\tilde{\sigma}_*$, $0 < y_0 < 1, \tilde{\sigma}_* = \max \sigma(y)$, если отношение L/Δ достаточно мало. Так как $\varphi(x) < 1$, то с ростом α значения $\tilde{\sigma}_*(\alpha)$ убывают до $\tilde{\sigma}_*(\infty)$, равного 0.350. При $x \rightarrow 1$, $\varphi(x)$ стремится к нулю как

$$\frac{4}{\pi^2} \operatorname{arctg}^2 \left[e^{\alpha(1-x)} \sqrt{\frac{-2\alpha(1-x)}{1-e^{-2\alpha(1-x)}}} \right].$$

Пусть x_z — узловая точка разбиения отрезка $[0, 1]$ на n равных частей: $x = sh, h = \frac{1}{n}, s = 0, 1, \dots, n$. Так как в рассматриваемом случае $p=0, m=1$, то система (I.4), (I.5) может быть представлена в виде:

$$y_0 - y_1 = \frac{\sigma h^2}{2} \varphi_{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}},$$

$$y_i - y_{i+1} = \frac{\sigma h^2}{2} \left(\varphi_{i+\frac{1}{2}} f_{i+\frac{1}{2}} + \varphi_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}} \right) + y_{i-1} - y_i, \quad (\text{I.20})$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

где

$$\frac{\sigma h^2}{2} = \frac{y_0}{\sum_{i=0}^{n-1} (2n-2i-1) \varphi_{i+\frac{1}{2}} f_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (\text{I.21})$$

Графики $\varphi(x)$ в зависимости от α ($\alpha = 1, 2, 3, 5, 10, 20$) и результаты вычисления $\tilde{\sigma}_*(\alpha)$ приведены на рис. 4.

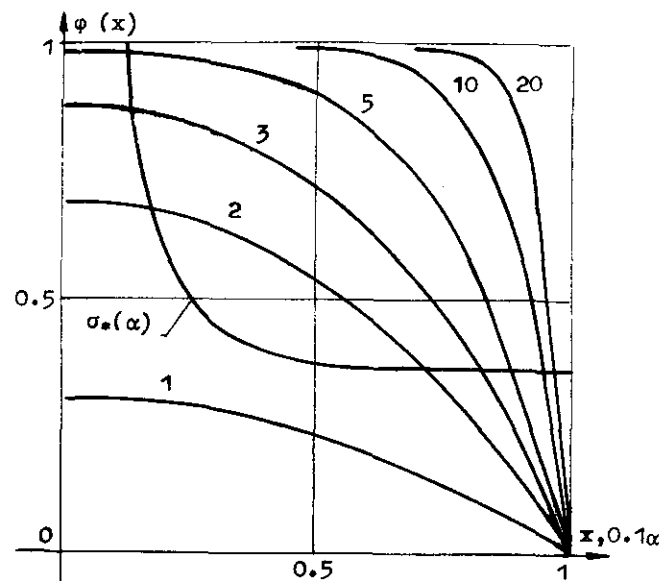


Рис. 4

П. Численное решение задачи (I), (4) становится наиболее простым, если $m = \operatorname{const}_1 > 0, \varphi = \operatorname{const}_2 > 0$. При этом нет необходимости рассматривать систему (I.4) в целом, так как появляется возможность построения алгоритма, основанного на последовательном решении системы типа (I.4): решение первого уравнения позволяет решить второе уравнение и т.д.

Пусть $\rho=0$. Полагая в (I.I) $m=1$, $\varphi=1$, $f=f_{i+\frac{1}{2}}$ ($i=0, 2, \dots, n-1$), получим:

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left\{ (x_{i+1} - x_i) \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} (x_{s+1} - x_s) + \frac{1}{2} f_{i+\frac{1}{2}} (x_{i+1} - x_i)^2 \right\}, \quad (2.1)$$

или

$$y_i - y_{i+1} = \xi \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} \xi_s + \frac{1}{2} f_{i+\frac{1}{2}} \xi_i^2,$$

где

$$\xi_i = (x_{i+1} - x_i) \sqrt{\sigma}.$$

Будем считать y_i известными, то есть y_i — узловые точки разбиения отрезка $[0, y_0]$ на n частей. Тогда (2.1) определяет неизвестные ξ_i в результате последовательного решения квадратных уравнений. Имеем

$$\xi_i = \frac{2 \Delta_i}{\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 + 2 \Delta_i f_{i+\frac{1}{2}}}}, \quad (2.2)$$

$$\Delta_i = y_i - y_{i+1}, \quad \alpha_i = \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} \xi_s, \quad y_n = 0, \quad \alpha_n = 0.$$

После исключения α_i из (2.2) выражения ξ_i примут вид:

$$\xi_i = \sqrt{2} \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{s=0}^{i-1} \Delta_s f_{s+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\sum_{s=0}^i \Delta_s f_{s+\frac{1}{2}}}}. \quad (2.3)$$

Вычислив ξ_i , найдем значения $\sqrt{\sigma}$ и x_i по формулам:

$$\sqrt{\sigma} = \sum_{s=0}^{n-1} \xi_s, \quad x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{s=0}^i \xi_s \quad (2.4)$$

Заметим, что формулы (2.4) могут быть получены непосредственно из точных выражений:

$$\sqrt{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{y_0} \frac{du}{\sqrt{\int_u^{y_0} f(t) dt}}, \quad x(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2} \sigma} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{\int_u^{y_0} f(t) dt}},$$

если в последних заменить f на f_{Δ} .

Рассмотрим далее случай: $\rho=1$, $m=1$, $\varphi=1$. При этом (I.I) примет вид:

$$y_i - y_{i+1} = \frac{\sigma}{4} \left[\ln \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2} \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} (x_{s+1}^2 - x_s^2) + f_{i+\frac{1}{2}} (x_{i+1}^2 - x_i^2 - x_i^2 \ln \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2}) \right]$$

Введем обозначения

$$\eta_i = \frac{\sigma}{4} x_i^2, \quad b_i = \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} (\eta_{s+1} - \eta_s), \quad (2.5)$$

$$\eta_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad \eta_1 = \frac{y_0 - y_1}{f_{\frac{1}{2}}},$$

запишем систему трансцендентных относительно η_{i+1} ($i=1, 2, \dots, n-1$) уравнений следующим образом:

$$y_i - y_{i+1} - f_{i+\frac{1}{2}} (\eta_{i+1} - \eta_i) = (b_i - f_{i+\frac{1}{2}} \eta_i) \ln \frac{\eta_{i+1}}{\eta_i}. \quad (2.6)$$

Границы единственного положительного корня η_{i+1} легко устанавливаются:

$$\frac{\Delta_i \eta_i}{b_i} < \eta_{i+1} - \eta_i < \frac{\Delta_i}{f_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \text{если} \quad b_i - f_{i+\frac{1}{2}} \eta_i > 0; \quad (2.7)$$

$$\frac{\Delta_i}{f_{i+\frac{1}{2}}} < \eta_{i+1} - \eta_i < \frac{\Delta_i \eta_i}{b_i}, \quad \text{если} \quad b_i - f_{i+\frac{1}{2}} \eta_i < 0.$$

Вычислив η_n , найдем значения σ и x_i по формулам:

$$\sigma = 4 \eta_n, \quad x_i = \sqrt{\frac{\eta_i}{\eta_n}}. \quad (2.8)$$

Наконец, если $\rho=2, m=1, \varphi=1$, то (I.I) примет вид:

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i x_{i+1}} \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} \frac{x_{s+1}^3 - x_s^3}{3} + \right. \\ \left. + f_{i+\frac{1}{2}} \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + 2x_i)}{6x_{i+1}} \right]$$

Обозначим

$$\zeta_i = x_i \sqrt{\sigma}, \quad c_i = \sum_{s=0}^{i-1} f_{s+\frac{1}{2}} (\zeta_{s+1}^3 - \zeta_s^3), \quad (2.9)$$

$$\zeta_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad \zeta_n = \sqrt{\frac{6(y_0 - y_1)}{f_{\frac{1}{2}}}}$$

Наряду с ζ_i удобно ввести переменную M_i :

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i (1 + M_i). \quad (2.10)$$

С учетом (2.9) и (2.10) получим следующую систему кубических относительно M_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) уравнений:

$$3\zeta_i (y_i - y_{i+1}) - [c_i - 3\zeta_i (y_i - y_{i+1})] M_i = \\ = \frac{1}{2} f_{i+\frac{1}{2}} \zeta_i^3 M_i^2 (M_i + 3), \quad (2.11)$$

причем значение искомого корня заключено в пределах

$$0 < M_i < \bar{M}_i, \quad (2.12)$$

$$\bar{M}_i = \frac{6\zeta_i (y_i - y_{i+1})}{c_i - 3\zeta_i (y_i - y_{i+1}) + \sqrt{[c_i - 3\zeta_i (y_i - y_{i+1})]^2 + 18\zeta_i^4 (y_i - y_{i+1}) f_{i+\frac{1}{2}}}}$$

После вычисления ζ_n значения $\sqrt{\sigma}$ и x_i находятся по формулам:

$$\sqrt{\sigma} = \zeta_n, \quad x_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_n} \quad (2.13)$$

Аналогичным образом могут быть найдены верхняя и нижняя оценки $\sigma(y_0)$. Если $m=1, \varphi=1$, то для вычисления верхней и нижней оценок достаточно заменить $f(y)$ на кусочно-постоянную функцию $\tilde{f}(y)$ типа (I5), звенья которой либо вписаны в кривую

$f(y)$ - и тогда мы имеем оценку $\sigma(y_0)$ сверху - либо описывают кривую $f(y)$ - и тогда мы имеем оценку $\sigma(y_0)$ снизу.

Рассмотрим примеры решения задачи Дирихле для круга и шара. Решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\sigma}{(1-y)^2} = 0, \quad y|_{u^2+v^2=1} = 0, \quad (2.14)$$

описывает электростатическое притяжение круглой мембраны [6]. Поскольку y зависит только от x , $x = \sqrt{u^2 + v^2}$, то (2.14) преобразуется к (I), (4), где $\rho=1, m(x) \equiv 1, \varphi(x) \equiv 1$. На рис.5 приведено решение системы (2.6) для некоторых значений y_0 , а также зависимость $\sigma(y_0)$, $0 < y_0 < 1$. При равномерном разбиении отрезка $[0, y_0]$ на n частей разница между верхней и нижней оценками $\sigma(y_0)$ имеет порядок y_0/n .

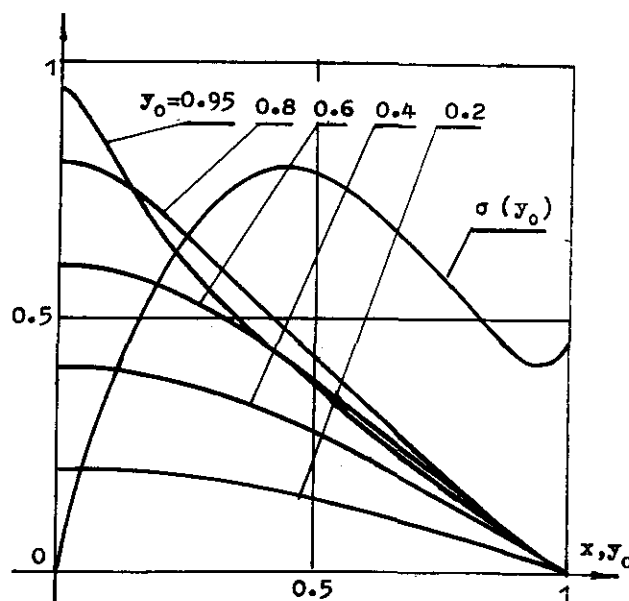


Рис. 5

Если

$$f(y) = (C - y)e^y, \quad (2.15)$$

то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с указанной правой частью, обращающееся в нуль на границе, описывает, например, распределение температуры внутри зерна катализатора с плоской осевой или центральной симметрией [3]. На рис. 6, 7 приведены зависимости $\sigma(y_0)$ при $C=5$, $\rho=0, 1, 2$ (y_0 не слишком близких к C) и $y(x)$, $y_0=4.8$, полученные из решения системы (2.11).

III. Приведем еще один пример, отличающийся от рассмотренных ранее тем, что правая часть в уравнении Пуассона меняет знак в некоторой точке $x=z$. Рассмотрим модельную задачу, описывающую работу электростатического клапана.

I. Случай плоской симметрии. Схематично электростатический клапан изображен на рис. 8 (картина симметрична относительно $X=0$). Металлическая мембрана в невозмущенном положении притянута электростатическими силами к поверхности диэлектрика и перекрывает отверстие шириной $2R$. Если к мембране прикладывается разность давлений P , то мембрана выдвигается



Рис. 8

так, как показано на рис. 8, причем граница $X=z$ заранее не известна и определяется как величиной P , так и разностью потенциалов $\mathcal{U}$ между мембраной и электродом.

Задача о равновесии мембраны существенно упрощается, если пред-

положить, что электростатические силы зависят только от величины зазора между электродами, когда радиус кривизны мембраны много больше продольного характерного размера (например, $z-R$) [1]. В этом случае уравнение равновесия мембраны можно представить в виде:

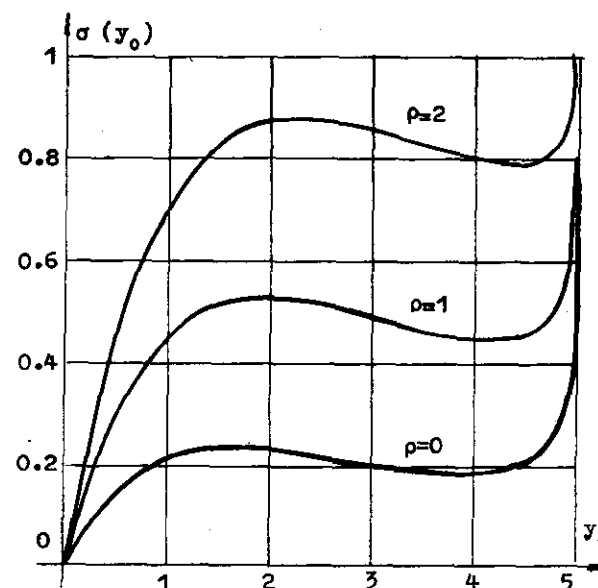


Рис. 6

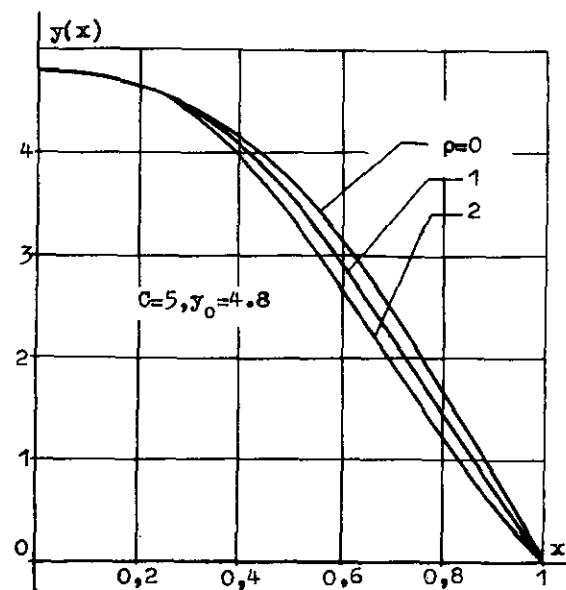


Рис. 7

$$N \frac{d^2 y}{dX^2} + P - \Phi(X) \frac{\epsilon_0 u^2}{2(\frac{\Delta}{\epsilon} + y)^2} = 0, \quad (3.1)$$

с граничными условиями:

$$\frac{dy}{dX} = 0, \quad X=0; \quad y = \frac{dy}{dX} = 0, \quad X=L, \quad (3.2)$$

и с условием сопряжения в точке $X=R$:

$$y(R-0) = y(R+0), \quad \frac{dy}{dX}(R-0) = \frac{dy}{dX}(R+0). \quad (3.3)$$

Здесь N - натяжение мембраны, возникшее вследствие ее выпучивания, ϵ_0 и ϵ - электрические постоянные для пустоты и диэлектрика, Δ - толщина диэлектрика; $\Phi(X) \equiv 0$, если $0 \leq X < R$, и $\Phi(X) \equiv 1$, если $R < X \leq L$. С учетом малости производных dy/dX закон Гука имеет следующее выражение [8]:

$$\frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{dy}{dX} \right)^2 dX = \frac{bN}{SE} (1 - \nu^2), \quad (3.4)$$

где b - ширина мембраны, S - площадь поперечного сечения, E - модуль упругости материала, ν - коэффициент Пуассона. Равенства (3.1)-(3.4) дают полное описание рассматриваемой модельной задачи.

В (3.1)-(3.4) выполним переход к безразмерным величинам x и y :

$$X = Lx, \quad y = \frac{\Delta}{\epsilon} y. \quad (3.5)$$

Получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho - \varphi(x) \frac{\sigma}{(1+y)^2} = 0, \quad (3.6)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < z, \\ 1, & z < x < 1, \end{cases}$$

с граничными условиями для y и условиями сопряжения в точке $x=z$:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x=0; \quad y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x=1, \quad (3.7)$$

$$y(z-0) = y(z+0), \quad \frac{dy}{dx}(z-0) = \frac{dy}{dx}(z+0). \quad (3.8)$$

При этом уравнение (3.4) примет вид:

$$z^2 \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{2\epsilon^2 R^2 N b}{SE \Delta} (1 - \nu^2) = \lambda. \quad (3.9)$$

В равенствах (3.6)-(3.8) постоянные z, ρ и σ являются безразмерными комбинациями размерных величин:

$$z = \frac{R}{L}, \quad \rho = \frac{\epsilon P}{\Delta} \cdot \frac{L^2}{N}, \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon^3 u^2}{2 \Delta^3} \cdot \frac{L^2}{N}. \quad (3.10)$$

Отсюда

$$\rho = k\sigma, \quad k = \frac{2P\Delta^2}{\epsilon_0 \epsilon^2 u^2}, \quad (3.11)$$

где k - известная постоянная, если заданы P и u .

Построим точное решение задачи. Интегрируя (3.6) с учетом граничных условий, получим [9]:

$$0 \leq x < z,$$

$$y(x) = y_0 - \frac{\rho}{2} x^2, \quad \frac{dy}{dx} = -\rho x, \quad y_0 = y(0). \quad (3.12)$$

$$z < x < 1,$$

$$x(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_y^1 \sqrt{\frac{\theta+1}{\theta(1-k-k\theta)}} d\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\sigma}} \left\{ E[\varphi(y), k] - q(y) \right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2\sigma} q(y), \quad q(y) = \sqrt{\frac{y(1-k-k y)}{1+y}}, \quad (3.13)$$

где $E[\varphi(y), k] = \int_0^{\varphi(y)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$ - эллиптический интеграл второго рода, в котором

$$\varphi(y) = \arcsin \sqrt{\frac{y}{(1-k)(1+y)}}, \quad k = \sqrt{1-k}, \quad 0 \leq k < 1.$$

Воспользуемся далее условиями сопряжения (3.8):

$$x = z, \quad \alpha = y(z),$$

$$1-z = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1+\theta}{\theta(1-k-k\theta)}} d\theta, \quad zp = \sqrt{2\sigma} \sqrt{\frac{\alpha(1-k-k\alpha)}{1-\alpha}}$$

Из последних равенств следует, что задание α и k определяет z , σ и, следовательно, ρ :

$$\frac{1-z}{z} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha(1-k-k\alpha)}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1+\theta}{\theta(1-k-k\theta)}} d\theta, \quad (3.14)$$

или

$$z(\alpha, k) = \frac{q(\alpha)}{E[\psi(\alpha), k]},$$

$$\sigma(\alpha, k) = \left[\frac{1}{(1-z)\sqrt{2}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1+\theta}{\theta(1-k-k\theta)}} d\theta \right]^2 = \frac{2}{k^2} E^2[\psi(\alpha), k], \quad (3.15)$$

$$\rho(\alpha, k) = \frac{2}{k} E^2[\psi(\alpha), k] \quad (3.16)$$

Обратимся к условию (3.9) и вычислим интеграл, стоящий в левой части равенства:

$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \int_0^z \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \int_0^{\alpha} \frac{dy}{dx}(y) dy.$$

Подставим в правую часть выражения производных из (3.12) и (3.13):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx &= \frac{1}{3} \rho^2 z^3 + \sqrt{2\sigma} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{y(1-k-k y)}{1+y}} dy = \\ &= \frac{1}{3} \rho^2 z^3 + \frac{2\sqrt{2\sigma}}{3} \left\{ \frac{1+k}{k} E[\psi(\alpha), k] - 2F[\psi(\alpha), k] + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{k} - \alpha \right) \sqrt{\frac{\alpha(1-k-k\alpha)}{1+\alpha}} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$F(\psi, k) = \int_0^{\psi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

— эллиптический интеграл первого рода. При этом (3.9) преобразуется к виду:

$$\lambda(\alpha, k) = \frac{4q^2(\alpha)}{3k^2 E[\psi(\alpha), k]} \left\{ (1+k) E[\psi(\alpha), k] - 2kF[\psi(\alpha), k] - \frac{q(\alpha)}{1+\alpha} \right\}. \quad (3.17)$$

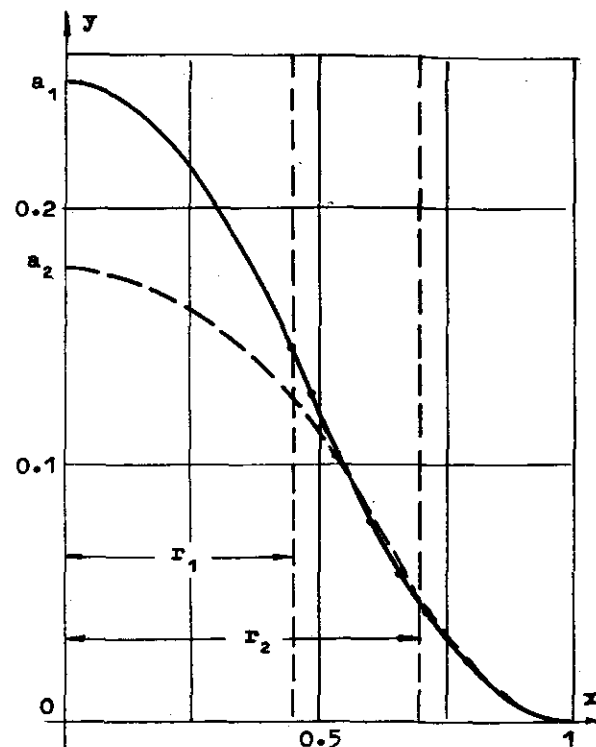


Рис. 9

Пусть $k = 0.5$, $\alpha = 0.1429$, $\phi(\alpha) = 0.5236$, $h = 0.7071$. Воспользовавшись таблицами для эллиптических функций [10], находим: $E[\phi(\alpha), k] = 0.5121$, $F[\phi(\alpha), k] = 0.5356$. Далее, по формулам (3.14)–(3.16) и (3.17) вычисляем z , σ , ρ и λ : $z = 0.4521$, $\sigma = 2.0976$, $\rho = 1.0488$, $\lambda = 0.01669$. Так как

$$y_0 = \alpha + \frac{1}{2} \rho z^2, \quad (3.18)$$

то в рассматриваемом примере $y_0 = 0.2501$. Вид функции $y(x)$ в соответствии с (3.12)–(3.13) изображен на рис. 9 (сплошная кривая).

Обратимся теперь к численному методу решения (3.6)–(3.9), основанному на интегральном представлении краевой задачи. Воспользуемся выражением функции Грина для краевой задачи (3.6), (3.7)

$$K(\xi, \theta) = \begin{cases} 1 - \theta, & \xi < \theta, \\ 1 - \xi, & \xi > \theta; \end{cases} \quad 0 \leq \xi, \theta \leq 1. \quad (3.19)$$

При помощи (3.19) представим краевую задачу (3.6)–(3.7) в виде:

$$y(x) = \sigma \int_0^1 K(x, \theta) F[\theta, y(\theta)] d\theta, \quad F[\theta, y(\theta)] = k - \frac{\phi(\theta)}{[1 + y(\theta)]^2},$$

или

$$y(x) = \sigma \left\{ k \frac{1-x^2}{2} - \int_0^1 K(x, \theta) \frac{\phi(\theta) d\theta}{[1 + y(\theta)]^2} \right\}. \quad (3.20)$$

Пусть $z \leq x \leq 1$. При этом

$$y(x) = \sigma \left\{ k \frac{1-x^2}{2} - (1-x) \int_z^x g[y(\theta)] d\theta - \int_x^1 (1-\theta) g[y(\theta)] d\theta \right\},$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \sigma \left\{ -kx + \int_z^x g[y(\theta)] d\theta \right\}, \quad g(y) = \frac{1}{(1+y)^2}.$$

Таким образом, из условия $\frac{dy}{dx}(1) = 0$ следует, что

$$k = \int_z^1 g[y(\theta)] d\theta. \quad (3.21)$$

С учетом (3.21) интегральное уравнение (3.20) преобразуется к виду:

$$z \leq x \leq 1, \quad y(x) = \sigma \left\{ \int_x^1 (\theta - x) g[y(\theta)] d\theta - \frac{k}{2} (1-x)^2 \right\} \quad (3.22)$$

Рассмотрим численный метод решения (3.22) при заданных значениях параметров σ и k , $0 < k < 1$. Воспользуемся выражениями $y_i = y(x_i)$ и $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, $z \leq x_i < x_{i+1} \leq 1$ и составим разность

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left\{ \int_x^{x_{i+1}} (\theta - x_i) g d\theta + (x_{i+1} - x_i) \int_{x_{i+1}}^1 g d\theta - k(x_{i+1} - x_i) \left(1 - x_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \right\} \quad (3.23)$$

Как и ранее, будем приближенно считать, что

$$g[y(\theta)] \approx g_{s+\frac{1}{2}}, \quad x_s < \theta < x_{s+1}, \quad g(y_s) \leq g_{s+\frac{1}{2}} \leq g(y_{s+1}). \quad (3.24)$$

При этом (3.23) преобразуется в следующую систему равенств ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$):

$$h_i = \frac{\Delta_i}{C_{i+1} + \sqrt{C_{i+1}^2 + \Delta_i (g_i - k)}}, \quad (3.25)$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad C_{i+1} = k_{i+1} - k(1 - x_{i+1}),$$

$$k_{i+1} = \sum_{s=i+1}^{n-1} g_s h_s, \quad \Delta_i = \frac{2(y_i - y_{i+1})}{\sigma},$$

$$x_0 = z, \quad x_n = 1, \quad y_0 = \alpha, \quad y_n = 0, \quad k_n = 0,$$

причем вначале находятся h_{n-1} , h_{n-2} и т.д. до тех пор, пока не нарушается условие: $k_{i+1} \leq k$.

В связи с выбором величины Δ_i приведем оценку α , являющуюся следствием неравенств:

$$\int_0^1 (\theta - z) g[y(\theta)] d\theta > \frac{(1-z)^2}{2(1+\alpha)^2}, \quad 1-z > k = \int_z^1 g[y(\theta)] d\theta. \quad (3.26)$$

Полагая в (3.22) $x=z$ и используя неравенства (3.26), получим $\alpha > \frac{\sigma k^2}{2} \left[\frac{1}{(1+\alpha)^2} - k \right]$. Отсюда искомое значение оценки $\bar{\alpha}$ является корнем алгебраического уравнения:

$$\frac{2\bar{\alpha}(1+\bar{\alpha})^2}{1-k(1+\bar{\alpha})^2} = \sigma k^2, \quad \alpha > \bar{\alpha} \quad (3.27)$$

Например, при равномерном шаге по y величину Δ_i можно взять равной $\Delta_0, \Delta_0 = \bar{\alpha}/m$, где m — достаточно большое число.

Пусть $k = 0.5$, $\sigma = 2.0976$, так что $\Delta_0 \approx \frac{0.1}{m}$. Построим численное решение при $\Delta_0 = 0.02$, $y_i - y_{i+1} = 0.02098$. При этом будем считать, что $g_i = (1+y_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{2})$. В итоге находим следующие значения α и z : $\alpha = \alpha_1 = 0.144$, $z = z_1 = 0.451$. Точки приближенного решения нанесены на рис. 9.

2. Случай осевой симметрии. Модельную задачу в случае осевой симметрии будем описывать уравнением равновесия круглой радиуса R мембраны:

$$N \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right) + p - \Phi(x) \frac{\epsilon_0 u^2}{2(\frac{\Delta}{\epsilon} + y)^2} = 0 \quad (3.28)$$

в совокупности с условиями (3.2) — (3.4). Воспользуемся теми же масштабами линейных размеров (3.5), а также обозначениями безразмерных комбинаций (3.I0)–(3.II). После подстановки в (3.28) и (3.2)–(3.4) новых переменных получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + p - \varphi(x) \frac{\sigma}{(1+y)^2} = 0, \quad (3.29)$$

а также условия (3.7)–(3.9).

Краевую задачу (3.29), (3.7)–(3.9) представим в виде интегрального уравнения:

$$y(x) = \sigma \left\{ k \frac{1-x^2}{4} - \int_z^1 \Gamma(x, \theta) \frac{\varphi(\theta) d\theta}{[1+y(\theta)]^2} \right\}, \quad (3.30)$$

где

$$\Gamma(x, \theta) = \begin{cases} -\theta \ln \theta, & x < \theta \\ -\theta \ln x, & x > \theta, \end{cases}$$

причем условие $\frac{dy}{dx}(1) = 0$ равносильно равенству:

$$k = 2 \int_0^1 \theta g[y(\theta)] d\theta, \quad g(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \quad (3.31)$$

При $z < x \leq 1$ интегральное уравнение (3.30) с учетом (3.31) можно преобразовать к виду:

$$y(x) = \sigma \left\{ \int_x^1 \theta \ln \frac{\theta}{x} g[y(\theta)] d\theta - \frac{k}{4} (x^2 + 2 \ln \frac{1}{x} - 1) \right\} \quad (3.32)$$

Численный метод решения (3.32) при заданных значениях σ и k строится аналогично рассмотренному способу в случае плоской симметрии. Составим разность y_i и y_{i+1} , $z < x_i < x_{i+1} < 1$:

$$y_i - y_{i+1} = \sigma \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta \ln \frac{\theta}{x_i} g d\theta + \ln \frac{x_{i+1}}{x_i} \int_{x_{i+1}}^1 \theta g d\theta - \frac{k}{4} (2 \ln \frac{x_{i+1}}{x_i} - x_{i+1}^2 + x_i^2) \right\} \quad (3.33)$$

Заменим в (3.33) $g[y(\theta)]$ на $g_{s+\frac{1}{2}}$ согласно (3.24). При этом (3.33) преобразуется в следующую систему трансцендентных относительно λ_i уравнений:

$$\ln \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{D_{i+1}} \left[2 \Delta_i + x_{i+1}^2 (g_i - k)(1 - \lambda_i) \right], \quad 0 < \lambda_i < 1, \quad (3.34)$$

где

$$x_i^2 = \lambda_i x_{i+1}^2, \quad D_{i+1} = k_{i+1} + g_i x_{i+1}^2 - k,$$

$$k_{i+1} = \sum_{s=i+1}^{n-1} g_s (x_{s+1}^2 - x_s^2), \quad \Delta_i = \frac{2(y_i - y_{i+1})}{\sigma},$$

$$x_0 = z, \quad x_n = 1, \quad y_0 = \alpha, \quad y_n = 0, \quad k_n = 0.$$

При $i = n-1$ значение λ_{n-1} удовлетворяет уравнению

$$\ln \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \frac{2 \Delta_{n-1}}{g_{n-1} - k} + 1 - \lambda_{n-1}.$$

Вначале вычисляется $\lambda_{n-1} = x_{n-1}^2$, затем λ_{n-2} и т.д., до тех пор, пока не выполнится условие: $k_{i+1} \leq k$.

При выборе шага по y можно использовать оценку для α , связанную с неравенствами:

$$\int_0^1 \theta \ln \frac{\theta}{2} g[y(\theta)] d\theta > \frac{1}{4(1+\alpha)^2} \left(\ln \frac{1}{z^2} + z^2 - 1 \right),$$

$$\frac{1-z^2}{(1+\alpha^2)^2} \leq k = 2 \int_0^1 \theta g[y(\theta)] d\theta < 1-z^2. \quad (3.35)$$

Полагая в (3.32) $x=z$ и учитывая (3.35), получим

$$\alpha > \frac{\sigma}{4} \left[\frac{1}{(1+\alpha)^2} - k \right] \left[\ln \frac{1}{1-k} - k(1+\alpha)^2 \right].$$

Таким образом, значение оценки $\bar{\alpha}$, $\alpha > \bar{\alpha}$, удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\frac{4\bar{\alpha}(1+\bar{\alpha})^2}{[1-k(1+\bar{\alpha})^2] \left[\ln \frac{1}{1-k} - k(1+\bar{\alpha})^2 \right]} = \sigma. \quad (3.36)$$

Пусть по-прежнему $k = 0.5$, $\sigma = 2.0976$. Из (3.36) следует, что $\bar{\alpha} \approx 0.035$. Построим численное решение при $\Delta_0 = 0.01$, $y_i - y_{i+1} = 0.01049$, $g_i = (1+y_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{2})^2$. Значения α и z равны: $\alpha = \alpha_2 = 0.0504$, $z = z_2 = 0.695$. На рис.9 численное решение нанесено пунктирной линией, причем при $0 \leq x \leq z$ $y(x)$ определяется из равенства

$$y(x) = \alpha + \frac{P}{4} (z^2 - x^2). \quad (3.37)$$

IV. В заключение рассмотрим одну из возможностей построения более гладкого приближенного решения системы (I.1), (I.2). Подставим в (I.1), (I.2) вместо $y(\theta)$ кубический сплайн дефекта I [II]. Возрастающая при этом громоздкость вычислений правых частей вполне оправдывается тем, что в ряде случаев получаются практически точные значения $\sigma(y_0)$ при небольшой размерности системы трансцендентных уравнений.

Пусть x_i — точки разбиения отрезка $[0,1]$: $x_0 = 0$, $x_n = 1$, $x_i = (2i-1)h$, $i=1,2,\dots,n-1$, $h = \frac{1}{2n-1}$. Обозначим через $S_i(x)$ кубическую параболу, если $x_i < x < x_{i+1}$. В силу симметрии

$$S_0(x) = y_0 + c_0 x^2, \quad 0 \leq x < h. \quad (4.1)$$

Выражения остальных $S_i(x)$ для удобства представим в виде

$$S_i(x) = S_{i-1}(x) + d_i \left(\frac{x-x_i}{2h} \right)^3, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (4.2)$$

где

$$d_i = y_{i+1} - S_{i-1}(x_{i+1}).$$

При $i=n-1$ $y_n = 0$, и поэтому $d_{n-1} = -S_{n-2}(1)$.

Для того чтобы однозначно определить построенный кубический сплайн заданием значений $y_0, y_2, \dots, y_{n-1}$, необходимо еще одно условие. Принимая во внимание (8), нетрудно получить из (I) соотношения:

$$m(0) \frac{d^2 y}{dx^2}(0) + \sigma \frac{\varphi(0)f(y_0)}{\rho+1} = 0,$$

$$m(1) \frac{d^2 y}{dx^2}(1) + \left[\rho m(1) + \frac{dm}{dx}(1) \right] \frac{dy}{dx}(1) + \sigma \varphi(1)f(0) = 0,$$

из которых следует, что условие, устраняющее произвол в выборе C_0 , имеет вид:

$$m(1) \frac{d^2 S_{n-1}}{dx^2}(1) + \left[\rho m(1) + \frac{dm}{dx}(1) \right] \frac{dS_{n-1}}{dx}(1) + \frac{(\rho+1)m(0)\varphi(1)f(0)}{\varphi(0)f(y_0)} \frac{d^2 S_0}{dx^2}(0) = 0. \quad (4.3)$$

В качестве примера рассмотрим вновь задачу (2.14). Так как в этом случае $m=1$, $\varphi=1$, $\rho=1$, то условие (4.3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 S_{n-1}}{dx^2}(1) + \frac{dS_{n-1}}{dx}(1) - 2 \frac{f(0)}{f(y_0)} \frac{d^2 S_0}{dx^2}(0) = 0. \quad (4.4)$$

При $n=2$ кубический сплайн запишется следующим образом:

$$S_0(x) = y_0 + c_0 x^2, \quad 0 \leq x < \frac{1}{3},$$

$$S_1(x) = S_0(x) + \alpha_1 \left(\frac{3x-1}{2} \right)^3, \quad \frac{1}{3} < x < 1, \quad (4.5)$$

где

$$C_0 = \frac{9y_0}{7+2(1-y_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2y_0^2(2-y_0)}{7+2(1-y_0)^2}$$

Приближенные значения $\sigma(y_0)$, которые следуют из формулы

$$\sigma(y_0) = \frac{y_0}{\int_0^1 \theta \ln \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{[1-S(\theta)]^2}}, \quad (4.6)$$

приведены на рис.10.

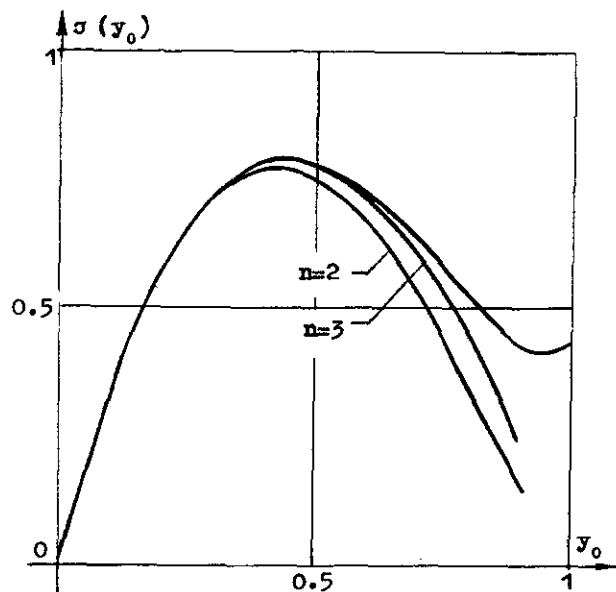


Рис. 10

При $n=3$ кубический сплайн определяется заданием y_0 и y_2 :

$$\begin{aligned} S_0(x) &= y_0 + C_0 x^2, \quad 0 \leq x < \frac{1}{5}, \\ S_1(x) &= S_0(x) + \alpha_1 \left(\frac{5x-1}{2} \right)^3, \quad \frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{5}, \\ S_2(x) &= S_1(x) + \alpha_2 \left(\frac{5x-3}{2} \right)^3, \quad \frac{3}{5} \leq x < 1, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$C_0 = -\frac{75}{2} \frac{14y_0 - 17y_2}{127 - 10(1-y_0)^2},$$

$$\alpha_1 = y_2 - y_0 - \frac{9}{25} C_0, \quad \alpha_2 = 7y_0 - 8y_2 + \frac{47}{25} C_0$$

Искомое значение y_2 отыскивается из решения трансцендентного относительно y_2 уравнения

$$y_2 = y_0 \frac{\ln \frac{5}{3} \int_0^{0.6} \frac{d\theta}{[1-S(\theta)]^2} + \int_{0.6}^1 \theta \ln \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{[1-S(\theta)]^2}}{\int_0^1 \theta \ln \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{[1-S(\theta)]^2}} \quad (4.8)$$

Результаты вычислений приведены на рис.10 и вполне согласуются с полученными ранее. Так, при $y_0 = 0.6$ двусторонние оценки σ имеют значения: $0.725 < \sigma < 0.727$, в то время как приближенное значение σ равно 0.670, если $n=2$, и 0.718, если $n=3$. Таким образом, максимальное значение σ вычисляется с точностью до 0.01 при $n=3$.

Наконец, отметим особенность применения вариационного метода Рунта для построения приближенного решения задачи (I), (4), [12]. За класс допустимых функций можно взять кубический сплайн $S(x)$, определенный в (4.1)–(4.3), причем y_0 фиксировано, и требуется найти такие y_i , $i=2, 3, \dots, n-1$, чтобы функционал

$$\Pi(S) = \int_0^1 x^p \left[m(x) \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 - 2\sigma \varphi(x) \int_0^{S(x)} f(\tau) d\tau \right] dx \quad (4.9)$$

принимал наименьшее значение. Параметр σ исключается из (4.9) при помощи (II), для того чтобы избежать затруднений, связанных с возможным ветвлением решений. Искомые y_i удовлетворяют условию: $y_i \leq y_0$. После отыскания минимума функционала $\sigma(y_0)$ вычисляется при помощи (II).

Л и т е р а т у р а

1. ДИТЛОВ В.И., СОЛДАТЕНКОВ И.С. Некоторые результаты исследования пленочных электростатических реле. -В кн.: Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Вып. 5. Физико-технологические исследования. Новосибирск, 1963, с.159-176.

2. БАБАКОВ И.М. Теория колебаний. М., ГИТТЛ, 1958.

3. ЗЕЛЕНИК Т.И. Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. Новосибирск, 1972.

4. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.

5. ФАДДЕЕВ С.И. Метод расчета статических параметров пленочного электростатического реле на ЭВМ. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 46, Новосибирск, 1971, с.14-19.

6. С.И.ФАДДЕЕВ. Численный метод решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна в связи с расчетом характеристик пленочного электростатического реле. -В кн.:Вычислительные системы. Вып. 50, Новосибирск, 1972, с. 3-29.

7. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

8. ТИМОШЕНКО С.П., ВОЙНОВСКИЙ-КРИГЕР С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.

9. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

10. СЕТАЛ Б.И., СЕМЕНЦАЕВ К.А. Пятизначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1962.

11. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложение. М., Изд-во "Мир", 1972.

12. КАНТОРОВИЧ Л.В., КРЫЛОВ В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., Физматгиз, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 сентября 1975 года