

УДК 531.258+539.385

ПРОГИБЫ В ТОНКИХ РАСТЯНУТЫХ ПЛАСТИНКАХ, ИМЕЮЩИХ ПЕРВОНАЧАЛЬНУЮ КРИВИЗНУ

К.К.Зиминг, И.С.Солдатенков

В ряде устройств микроэлектроники применяются элементы конструкций, состоящие из натянутых и закрепленных на двух опорах тонких пластин. В случае, если эти конструкции получены вакуумным напылением, в них могут возникать неоднородные по толщине внутренние напряжения, приводящие к появлению деформаций в пластинках и изменению расчетных зазоров, что должно сказаться на параметрах устройств.

С целью обоснованного выбора размеров и формы таких конструкций в настоящей работе проведен расчет прогибов пластин в зависимости от их геометрии и ряда других факторов. При расчете предполагалось, что названная выше причина возникновения неоднородных деформаций является единственной.

1. Постановка задачи. Требуется определить прогибы $W(x, y)$ в изображенной на рис. I прямоугольной пластине длиной a , шириной b и толщиной h . Пластина растянута силой N_x на единицу ширины и ее концы $x = 0$ и $x = a$ закреплены. При этом пластинка в свободном состоянии не является плоской, а имеет произвольные, но не зависящие от координат радиусы кривизны γ_x и γ_y .

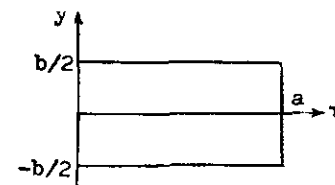


Рис. I

Введем некоторые упрощающие предположения, которые позволяют найти решение в известных функциях.

1. Будем считать, что величина прогибов много меньше толщины пластины. Фактически достаточно, чтобы выполнялось соотношение [1]

$$W(x, y) \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) h.$$

2. Учитывая, что рассматриваемые пластины, как правило, являются достаточно тонкими ($h/a \sim 10^{-3}$), условие жесткого закрепления концов можно без внесения существенных погрешностей заменить условием шарнирного закрепления.

3. Вместо изогнутой пластины будем рассматривать пластину первоначально плоскопараллельную, но нагруженную по краям изгибающими моментами. Величина моментов подбирается таким образом, чтобы получить заданные ε_x и ε_y .

Вследствие малой жесткости пластины и малой величины моментов, при конечных величинах N_x действием M_x можно, в первом приближении, пренебречь и учитывать только действие M_y .

С учетом принятых предположений задача, согласно [1], сводится к решению уравнения

$$\Delta^2 W - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (I)$$

где $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu)}$, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Граничные условия на концах $x = 0$, $x = a$ соответствуют шарнирному закреплению:

$$W = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Стороны $y = \pm \frac{b}{2}$ не закреплены, и к ним приложены изгибающие моменты M_y постоянной величины:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{M_y}{D}. \quad (5)$$

2. Решение. Обсуждение результатов. Решение найдено обычным методом разложения в ряд по соб-

ственным функциям. Нетрудно убедиться, что уравнению (I) удовлетворяет выражение:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y + B_m \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y) \sin \gamma_m x, \quad (6)$$

где

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{a},$$

$$\alpha_m = \frac{\gamma_m}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} + 1 \right)^{1/2},$$

$$\beta_m = \frac{\gamma_m}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} - 1 \right)^{1/2}.$$

Видно, что для каждого члена ряда (6) выполняются и граничные условия (2)-(3).

Определяя A_m и B_m из условий (4) и (5), имеем:

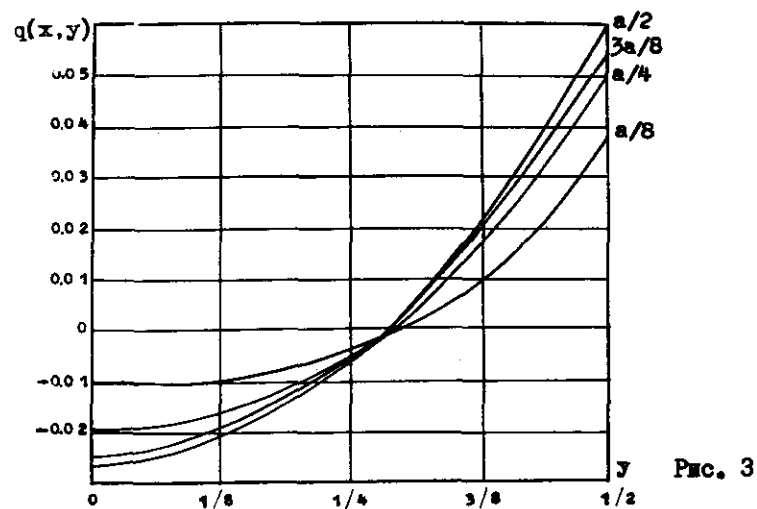
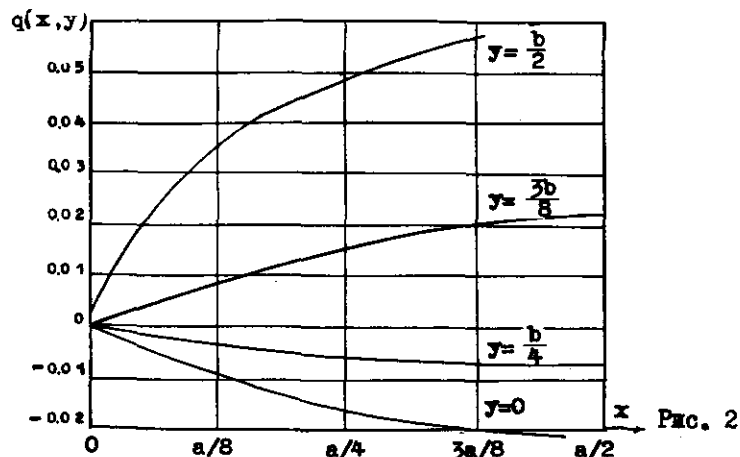
$$W(x, y) = \frac{4 M_y \alpha^2}{\pi^3 D} q(x, y). \quad (7)$$

Здесь

$$q(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \gamma_m x}{m^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y \cos \beta_m y - \Phi_m \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y}{\pi_m}, \quad (8)$$

$$\pi_m = \left[(1-\nu) - \Phi_m \sqrt{\frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{ch} \frac{\alpha_m b}{2} \cos \frac{\beta_m b}{2} - \left[(1-\nu) \Phi_m + \sqrt{\frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{sh} \frac{\alpha_m b}{2} \sin \frac{\beta_m b}{2}, \quad (9)$$

$$\Phi_m = \frac{\alpha_m \left[\nu - \sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{sh} \frac{\alpha_m b}{2} \cos \frac{\beta_m b}{2} - \beta_m \left[\nu + \sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{ch} \frac{\alpha_m b}{2} \sin \frac{\beta_m b}{2}}{\beta_m \left[\nu + \sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{sh} \frac{\alpha_m b}{2} \cos \frac{\beta_m b}{2} + \alpha_m \left[\nu - \sqrt{1 + \frac{N_x}{D \gamma_m^2}} \right] \operatorname{ch} \frac{\alpha_m b}{2} \sin \frac{\beta_m b}{2}}. \quad (10)$$



При анализе полученных результатов для удобства будем пользоваться не величиной N_x , а значением растягивающего напряжения $\sigma = N_x / h$.

На рис. 2 и 3 приведены протабулированные на ЭВМ зависимости величины q соответственно от x и от y , а на рис. 4 изображены профили равных значений q . Вычисления проведены для $b = 1 \text{ мм}$, $a = 3 \text{ мм}$, $h = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ и $\sigma = 2 \text{ кг/мм}^2$. Поскольку функция $q(x, y)$ пропорциональна $W(x, y)$, показанная на рис. 2-4

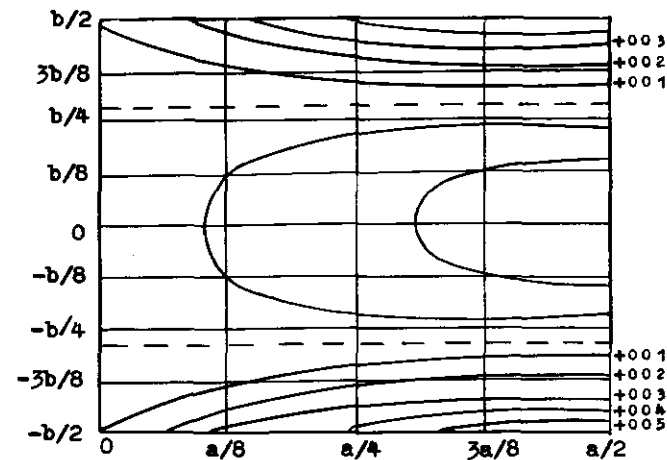


Рис. 4

картина соответствует распределению прогибов пластины. Заметим, что линии равных прогибов могут, по-видимому, служить для выбора оптимальной формы пластины при заданных ее размерах. Из приведенных данных видно, что наибольшие прогибы имеют место в точках с координатами $x = a/2$, $y = \pm b/2$, а средняя часть пластины имеет много меньшие смещения.

Считая E и ν константами, рассмотрим зависимость максимальных прогибов W_{max} от геометрических размеров, величины и первоначальной формы пластины.

Для упрощения анализа ограничимся рассмотрением трех наиболее часто встречающихся случаев:

- 1) $\epsilon_x = \epsilon_y$, $M_y = (1 + \nu) \frac{\sigma}{2}$;
- 2) $\epsilon_y = \epsilon$, $\frac{1}{\epsilon_x} = 0$, $M_y = \frac{\sigma}{2}$;
- 3) $\epsilon_x = \epsilon$, $\frac{1}{\epsilon_y} = 0$, $M_y = \nu \frac{\sigma}{2}$.

Выражение для M_y может быть тогда записано в виде: $M_y = c \frac{\sigma}{2}$, где c — множитель, зависящий от вида деформированного состояния.

Из (7)-(10) легко видеть, что

$$W_{max} = \frac{4C}{\pi^3} \frac{a^2}{\tau} q_{max} \left(\frac{b}{a}, \frac{\sigma a^2}{h^2} \right),$$

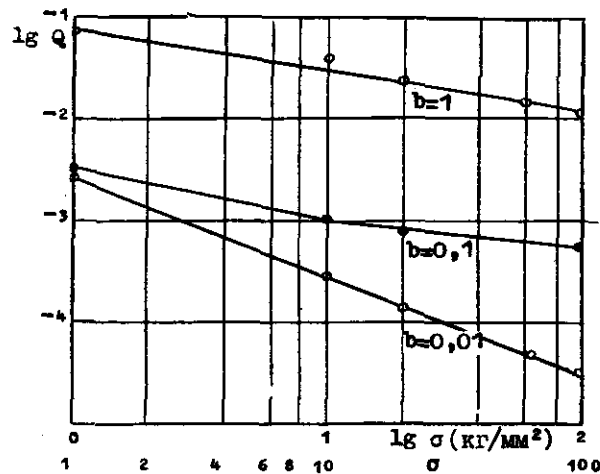


Рис. 5

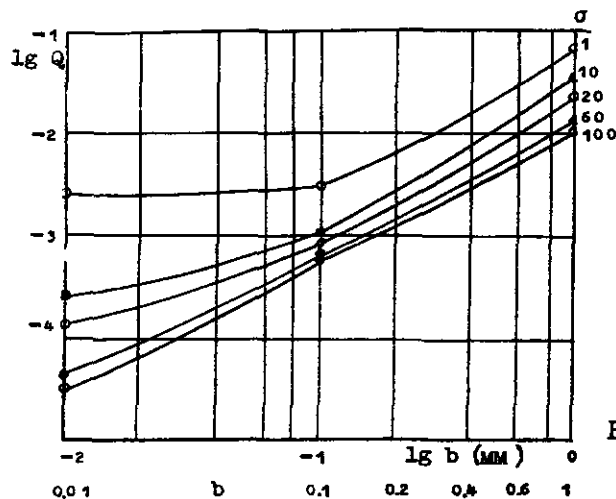


Рис. 6

то есть, W_{max} линейно зависит от первоначальной кривизны тонкой пластины. На рис. 5 и 6 приведены результаты расчета, показывающие изменение q_{max} в зависимости от b и σ . Расчет проведен при $a = 3$ мм, $h = 3 \cdot 10^{-3}$ мм.

Обработка результатов расчета показала, что в исследованном интервале изменения параметров:

$$\begin{aligned} a &\sim 2-4 \text{ мм}, \\ b &\sim 0,1-1 \text{ мм}, \\ h &\sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}, \\ \sigma &\sim 10-100 \text{ кг/мм}^2, \end{aligned}$$

зависимость W_{max} от входящих в (II) параметров в первом приближении может быть записана в виде:

$$W_{max} \sim \tau^{-1} \left(\frac{\sigma}{h^2} \right)^{-0.4} b^{1.2}.$$

От величины a значения W_{max} зависят слабо.

3. Экспериментальная проверка. Поскольку форма конденсированных пленок может зависеть от чисто технологических факторов (дефектов масок, неровностей подложек и т.д.), была произведена проверка соответствия вычисленных значений W экспериментально наблюдаемым с целью установить, является ли

обсуждаемая причина искажения формы пластин определяющей.

Эксперимент проведен на пленках сплава Cu-Be, имеющих следующие геометрические размеры: $a = 2$ мм, $b = 1$ мм, $h = 3,5 \cdot 10^{-3}$ мм. Значение σ принималось равным 20 кг/мм². Параллельно проведено измерение $W(x, y)$ на закрепленных образцах и определе-

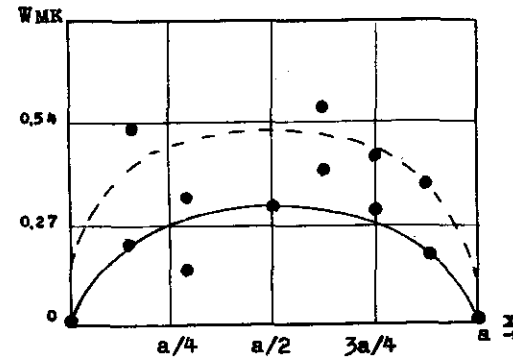
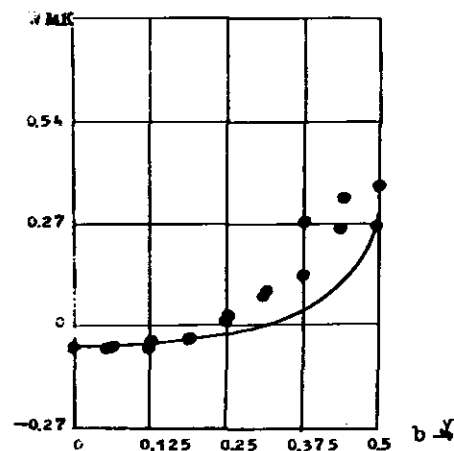


Рис. 7

ние τ_x и τ_y на свободных. Сопоставление экспериментальных (точки) и вычисленных значений $W(x, y)$ приведены на рис. 7-8. Видно, что большая часть экспериментальных значений удовлетворительно ложится на рассчитанные кривые.



Выбросы имеют локальный характер и связаны, как установлено, с наличием посторонних частиц на подложке, дефектами пленок и, по-видимому, с уменьшением толщины пленки вблизи ее краев.

Таким образом, рассмотренная выше причина возникновения неоднородных прогибов в натянутых пленочных конструкциях является, по-видимому, основной, но не единственной.

В заключение авторы благодарят Н.Г.Токареву за обработку результатов расчета на ЭЕМ.

Л и т е р а т у р а

Г. ТИМОШЕНКО С.П., ВОЙНОВСКИЙ-КРИТЕР С. Пластины и оболочки. М., Изд-во "Наука", 1966.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 декабря 1973 года