ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
(Вычислительные системы)
1976 год Выпуск 67

УДК 515.251.26+519.3:330.115

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННОГО ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

В.П.Тарасова

Выделим класс K функций $f(x)$ со значениями в линейно упорядоченном множестве следующими условиями:

а) любая $f(x)$ определена в каждой точке области Ω n-мерного евклидова пространства;

б) для любой $f(x)$ существует область $\Delta \subset \Omega$ такая, что из $x \in \Delta$, $y \notin \Delta$ следует $f(x) > f(y)$;

в) области Ω, Δ есть n-мерные кубы с ребрами, параллельными соответствующим осям координат. Длина ребра Δ для всех функций одинакова.

При решении задачи поиска приближенного глобального экстремума для функций класса K в случае, когда известен способ его нахождения в области Δ, естественно поступать так. Сначала находится область Δ, и затем в ней используются известные методы отыскания экстремума для соответствующего класса функций.

В настоящей работе строится некоторая стратегия $S^n_{3m+1}S(\delta)$ поиска области Δ и доказывается, что она является локально-оптимальной, то есть она оптимальна на определенных последовательностях (этапах) ходов. Этому посвящены первые четыре пункта работы.

В качестве приложения в последнем пятом пункте рассматривается некоторый конкретный класс K^* функций, для которого указываются оптимальная пассивная и локально-оптимальная стратегии поиска приближенного глобального экстремума.

Отметим, что в ряде случаев задачи распознавания образов, такие, как выбор информативной подсистемы признаков [I] или выбор решающего правила, сводятся к многоэкстремальным задачам. Рассматриваемые в работе функции являются многоэкстремальными.

I°. Построим оптимальную стратегию $S(\gamma)$ поиска одной точки s_0 из области Δ. Стратегией с T экспериментами называется набор $A=(a_1, \dots, a_T)\in\Omega$. В настоящей работе будем считать, что точка x найдена с помощью стратегии A (если она является такой точкой стратегии A), значение функции в которой наибольшее. Выделим множество H стратегий, отыскивающих точку из некоторой заданной области, принадлежащей Ω. Назовем стратегию A оптимальной, если она имеет меньшее по сравнению с любой другой стратегией из H число экспериментов.

Приступим теперь к построению стратегии $S(\gamma)$. Будем называть γ-кубиком содержащийся в Ω n-мерный куб с ребрами длины γ, параллельными соответствующим осям координат. Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин куба Ω находится в начале координат, а ребра, исходящие из этой вершины, лежат на осях координат $OX_1, \dots, OX_n$.

В дальнейшем всюду будут использоваться обозначения: ω – длина ребра Ω, δ – длина ребра Δ, $[r]$ – наибольшее целое, не превосходящее r;

$$k = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\gamma} - 1, & \text{если } \dfrac{\omega}{\gamma} \text{ – целое число,} \\ \left[\dfrac{\omega}{\gamma}\right] & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

На каждом ребре Ω, исходящем из вершины O, отложим отрезок OA_i длиной $k\cdot\gamma$. Разобьем куб $OA_1, \dots, A_n$ на γ-кубики гиперплоскостями $x_i = j\gamma$, где $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,k$. В каждом из полученных γ-кубиков отметим по одной вершине, имеющей все наибольшие координаты. Отмеченные вершины обозначим через $s_1, \dots s_T$. Стратегию $S(\gamma) = (s_1, \dots s_T)$ назовем стандартной. Число экспериментов стратегии $S(\gamma)$ равно $T = k^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Произвольно расположенный γ-кубик содержит по крайней мере одну из точек $S(\gamma)$.

ЛЕММА I. П у с т ь л ю б о й γ - к у б и к с о д е р ж и т п о к р а й н е й м е р е о д н у и з т о ч е к м н о ж е с т в а $(a_1, \dots, a_N)$, т о г д а $N \geq T$, г д е T - ч и с л о э к с п е р и м е н т о в с т р а т е г и и $S(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздвинем все отмеченные точками $s_1, \dots s_T$ γ-кубики стратегии $S(\gamma)$ по кубу Ω так, чтобы между ними были "зазоры", то есть никакие два из них не имели бы общих точек. Это всегда можно сделать, так как длина ребра куба $OA_1 \dots A_n$ строго меньше ребра Ω. По условию леммы в каждом из "раздвинутых" γ-кубиков содержится не менее одной точ- из $(a_1, \dots, a_N)$. Следовательно, $N \geq T$.

ЛЕММА 2. С т р а т е г и я $S(\delta)$ я в л я е т с я о п т и м а л ь н о й с т р а т е г и е й п о и с к а о д н о й т о ч к и и з о б л а с т и Δ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стратегия $S(\delta)$ в силу замечания I находит хотя бы одну точку $s_i \in \Delta$. Точка s_i определяется как точка с наибольшим значением функции.

Докажем теперь оптимальность стратегии $S(\delta)$. Используя лемму I, нетрудно показать, что для любой стратегии C с меньшим, чем у $S(\delta)$, числом экспериментов найдется хотя бы один δ-кубик E, не содержащий ни одной точки стратегии C. Построим функцию $f(x)$, область Δ которой совпадает с E. Для этой функции стратегия C непригодна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ясно, что стратегия $S(\delta)$ является оптимальной и среди последовательных стратегий.

2°. Рассмотрим задачу нахождения оптимальной стратегии поиска области Δ в некоторой области $\Gamma\subset\Omega$. Она сводится к такой же задаче в одномерном случае. Будем говорить, что область Δ найдена с точностью τ, если найден $(\delta+\tau)$-кубик, содержащий Δ. Приступим к поиску области Δ, когда известна некоторая точка $s_0\in\Delta$. Возьмем 2δ-кубик Γ с центром в точке s_0. Ясно, что Δ находится в Γ. Через точку s_0 проведем прямые параллельные осям координат. Точки пересечения каждой такой прямой с гранями куба Γ обозначим соответственно $A_i B_i$, $i=1,\dots,n$. Длины отрезков $A_i B_i$ равны 2δ. Так как $s_0 \in \Delta$, то на каждом из отрезков $A_i B_i$ лежит отрезок длины δ, принадлежащий Δ. Поэтому, отыскав такой отрезок на каждом из $A_i\ B_i$, мы тем самым однозначно определим положение Δ. Если отрезок длины δ, принадлежащий Δ, найден только на одном $A_i\ B_i$, то на остальных $A_j\ B_j$ соответствующие отрезки могут располагаться произвольно. Таким образом, доказана следующая

ЛЕММА 3. Если на каждом $A_i\ B_i$ применяется оптимальная стратегия поиска отрезка длины δ с точностью τ, то получается оптимальная стратегия поиска Δ с точностью τ в области Γ.

3^0. Рассмотрим в одномерном случае стратегии поиска области Δ (отрезок длины δ) на отрезке LR длины 2δ, середина которого s_0 принадлежит Δ. Строится локально-оптимальная стратегия S^1_{3m+1}.

Обозначим через $|a,b|$ расстояние между точками a и b. Воспользуемся языком теории игр [2]. Рассмотрим парную игру с игроками И и П. Правила игры следующие:

I. На t-м ходе И выбирает точку r на LR, а П указывает значение $f(r)$.

2. Если $r\in\Delta$ и $f(r')\geq f(r)$, то $r'\in\Delta$.

3. Если $r\notin\Delta$ и $f(r')\leq f(r)$, то $r'\notin\Delta$.

4. Если $|L,l|<|L,s_0|<|L,r|$, то

а) из $|l,r|\leq\delta$, $f(l)\geq f(r)$ следует, что $l\in\Delta$;

б) из $|l,r|\geq\delta$, $f(l)\geq f(r)$ следует, что $r\notin\Delta$.

5. Если $|L,l|<|L,s_0|<|L,r|$ и $f(l)=f(r)$, то

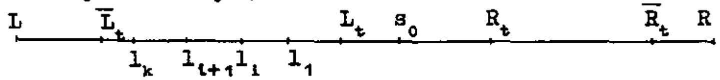
а) из $l\in\Delta$ следует, что $r\in\Delta$;

б) из $l\notin\Delta$ следует, что $r\notin\Delta$.

Выигрышем игрока И на t-м ходе будем считать наибольший по длине отрезок $\Delta_t\subset\Delta$, который получается после t ходов. Описанная игра является игрой бесконечной, с полной информацией и нулевой суммой.

Дадим точное описание стратегии игрока П, представляющего природу. При этом будем исходить из следующего принципа. Игрок П стремится на каждом отдельном ходе иметь наименьший проигрыш. Другими словами, игрок П поступает так на $(t+1)$-м ходе, чтобы разность $|\Delta_{t+1}|-|\Delta_t|$ была наименьшей, где $|\Delta_t|$ — длина отрезка Δ_t.

С учетом правил игры после t-го хода в общем случае возникает следующая ситуация:



,

где $L_tR_t=\Delta_t$, $|\bar L_t,R_t|=|L_t,\bar R_t|=\delta$.

Множество $\bar\Delta_t=[L\bar L_t)\cup(\bar R_tR]$ не содержит точек из Δ. Точки из Δ могут находиться на отрезках $\bar L_t\,L_t$ и $R_t\,\bar R_t$, объединение которых назовем Δ-зоной. Точки $l_1,\dots,l_k$ не попали ни в Δ_t, ни в $\bar\Delta_t$. Такого сорта точек нет в правой части Δ-зоны $R_t\,\bar R_t$ на основании правила игры 4 (см. стр. 80). Обозначим через s такую точку, что $f(s)=\min\limits_{x\in\Delta_t}\{f(x)\}$, а через $\bar s$ такую, что $f(\bar s)=\max\limits_{x\in\bar\Delta_t}\{f(x)\}$. Стратегию П строим так, чтобы выполнялось

$$f(\bar s)<f(l_k)<\dots<f(l_1)<f(s).$$

Поэтому если на $(t+1)$-м ходе игроком П сделан выбор l слева так, что $|\bar L_t,l_{i+1}|<|\bar L_t,l|<|\bar L_t,l_i|$, то по стратегии П будет $f(l_{i+1})<f(l)<f(l_i)$.

Пусть теперь игрок П на $(t+1)$-м ходе сделал выбор r справа в Δ-зоне $r\in R_t\bar R_t$. Пусть $\nu_t=\delta-|\Delta_t|$, $\rho=|R_t,r|$. Точка A такова, что $|A,r|=\delta$ и $|\bar L_t,l_{i+1}|<|\bar L_t,A|<|\bar L_t,l_i|$, $\bar\lambda=|\bar L_t,l_{i+1}|$, $\lambda=|l_1,L_t|$. Тогда в этих обозначениях стратег П на $(t+1)$-м ходе может быть дана в виде следующей таблицы

Стратегии И: r		Стратегия П: $f(r)$
$\rho\leq\frac{1}{2}\nu_t$	$\bar\lambda+\lambda\leq\rho$	$f(l_{i+1})<f(r)<f(l_i)$
	$\lambda\leq\rho\quad\bar\lambda=0$	$f(\bar s)<f(r)<f(l_i)$
	$\bar\lambda\leq\rho\quad\lambda=0$	$f(l_{i+1})<f(r)<f(s)$
	$\bar\lambda+\lambda>\rho$	$f(s)<f(r)$
$\rho\geq\frac{1}{2}\nu_t$	$\bar\lambda+\lambda\leq\nu_t-\rho$	$f(l_{i+1})<f(r)<f(l_i)$
	$\lambda\leq\rho\quad\bar\lambda=0$	$f(\bar s)<f(r)<f(l_i)$
	$\bar\lambda\leq\rho\quad\lambda=0$	$f(l_{i+1})<f(r)<f(s)$
	$\bar\lambda+\lambda>\nu_t-\rho$	$f(r)<f(\bar s)$

ЛЕММА 4. При стратегии П и любой стратегии И имеет место: $|\Delta_{t+1}|-|\Delta_t| \le \frac{1}{2}\nu_t$.

Доказательство этого факта получается непосредственным просчетом с помощью таблицы стратегии П.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существует оптимальная стратегия поиска области Δ в Г с точностью τ.

Дадим определение локально-оптимальной стратегии D. Пусть $T_0 = n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i + \ldots + n_l$ – число ходов стратегии D и она такова, что в начале делается n_1 ходов (первый этап), затем n_2 ходов (второй этап) и т.д. Стратегия D оптимальна на i-м этапе, если после $(n_1 + \ldots + n_{i-1})$-го хода следующие n_i ходов делаются оптимально. Стратегия, оптимальная на каждом этапе, называется локально-оптимальной.

Приступим теперь к построению последовательной стратегии S^1_{3m+i}, $i = 0,1,2$, игрока И. Для простоты описания будем искать область Δ не с заданной точностью τ, а по заданному числу ходов T. Заметим, что любое число T можно представить в виде $T = 3m+i$, $i = 0,1,2$. Описание стратегии разобьем на случаи, соответствующие значениям $i = 0,1,2$.

Пусть $T = 3m$. Стратегию S^1_{3m} определяем индуктивно. Пусть после $3t$ ходов возникла ситуация:

$$L \qquad \bar{L}_t \qquad L_t \qquad s_0 \qquad\qquad R_t \qquad \bar{R}_t \qquad R$$

Δ – зона не содержит ни одного выбора игрока И. Укажем, как выбираются следующие три хода по стратегии S^1_{3m}. На $(3t+1)$-м ходе делаем выбор l_1 в левой части Δ-зоны так, что $|l_1 \bar{L}_{3t}| = \frac{1}{3}\nu_{3t}$. На $(3t+2)$-м ходе делаем выбор l_2 в правой части Δ-зоны так, что $|\bar{R}_{3t}, l_2| = \frac{1}{3}\nu_{3t}$. Пусть для определенности $f(l_1) < f(l_2)$. Тогда на $(3t+3)$-м ходе делаем выбор l_3 в левой части Δ-зоны так, что $|l_3, L_{3t}| = \frac{1}{3}\nu_{3t}$. Ходы l_1, l_2, l_3 образуют $(t+1)$-й этап стратегии S^1_{3m}. Выигрыш на $(t+1)$-м этапе равен $|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}| = \frac{2}{3}\nu_{3t}$, погрешность $\tau = |\bar{L}_{3t+3}, \bar{R}_{3t+3}| - \delta = \frac{2}{3^{t+1}}\delta$.

Пусть $T = 3m+2$. Стратегия S^1_{3m+2} на первых $3m$ ходах совпадает со стратегией S^1_{3m}, а последние два выбора ставятся в середины левой и правой частей Δ-зоны, полученной после $3m$ ходов. При этом $|\Delta_{3m+2}| - |\Delta_{3m}| = \frac{1}{2}\nu_{3m}$, $\tau = \frac{1}{3^m}\delta$. Последний этап стратегии состоит из двух ходов.

Пусть $T = 3m+1$. Стратегия S^1_{3m+1} на первых $3(m-1)$ ходах совпадает со стратегией $S^1_{3(m-1)}$; следующие два выбора делаются в серединах левой и правой частей Δ-зоны, полученной после $3(m-1)$ ходов, а последние два – в середины левой и правой частей Δ-зоны, полученной после $3(m-1)+2$ ходов. Последний этап состоит из четырех ходов.

ЛЕММА 5. Стратегия S^1_{3m+i} является локально-оптимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сделано $3t$ ходов, т.е. проведено t этапов. Рассмотрим сначала случай, когда $(t+1)$-й этап состоит из трех ходов l_1, l_2, l_3. Если игрок И делает все три выбора в левой части Δ-зоны, по стратегии П будет $|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}| = 0$. Если же игрок И делает два выбора в левой, а затем один в правой части Δ-зоны, то по лемме 4 имеем

$$|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}| \le \frac{1}{2}\nu_{3t}.$$

Пусть теперь l_1 – в левой части Δ-зоны, а l_2 – в правой части и $|l_1, l_2| \ge \delta$, $|l_1, \bar{L}_{3t}| = x$ и (а) $|l_1, \bar{L}_{3t}| \le |l_2, \bar{R}_{3t}|$. Тогда стратегия П такова, что $l_1 \in \bar{\Delta}_{3t}$ и следующий выбор l_3 – слева в Δ-зоне на отрезке $l_1 L_{3t}$, в противном случае $|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}| \le \frac{1}{2}\nu_{3t}$. После выбора l_2 имеем

$$|\Delta_{3t+2}| - |\Delta_{3t}| = x.$$

Если же (б) $|l_2, \bar{R}_{3t}| < |\bar{L}_{3t}, l_1|$, то стратегия П такова, что $l_2 \in \bar{\Delta}_{3t}$ и $|\Delta_{3t+2}| - |\Delta_{3t}| = |l_2, \bar{R}_{3t}|$. Обозначим $|l_2, \bar{R}_{3t}|$ через y. В случае (б) выбор l_3 делается на отрезке $l_2 R_{3t}$. После выбора l_3 по лемме 4 в случае (а) имеем $|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}| \le \frac{1}{2}(\delta - x) + x$ и $\max(|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}|) = \frac{1}{2}(\delta - x) + x$, а в случае (б) – $\max(|\Delta_{3t+3}| - |\Delta_{3t}|) = \frac{1}{2}(\delta - x) + y$. В случае (а) максимум выигрыша достигается, когда $|l_3, L_{3t}| = x$. В случае (б) – когда $|l_3, R_{3t}| = y$. В обоих случаях максимальный выигрыш достигается при $x = y$, а также имеет место равенство

$$|l_3, L_{3t}| = \frac{1}{2}|l_1, L_{3t}| = \frac{1}{2}(\nu_{3t} - x) = y.$$

Так как $y = x$, то получаем уравнение $\frac{1}{2}(\nu_{3t} - x) = x$. Отсюда $x = y = \frac{1}{3}\nu_{3t}$. Случай $|l_1, l_2| < \delta$, а также двух- и четырехходовые этапы рассматриваются аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При заданном числе ходов оптимальной стратегией считается та, которая находит область Δ с наиболее высокой точностью.

4^0. Построим локально-оптимальную стратегию $S^n_{3m+1}S(\delta)$ поиска области Δ для класса K. Первый этап – это стратегия $S(\delta)$ нахождения одной точки s_0 из области Δ. Второй этап, состоящий из $3n$ ходов, заключается в поиске Δ в области Γ применением стратегии S^1_3 на каждом из отрезков $A_i B_i$ (см. 2^0). Аналогично второму этапу определяется третий, четвертый и т.д. $3n$-ходовые этапы. Соответственно стратегиям S^1_{3m+1}, S^1_{3m+2} определяются последние двух- и четырехходовые этапы.

ТЕОРЕМА I. Стратегия $S^n_{3m+1}S(\delta)$ является локально-оптимальной стратегией поиска области Δ для функций класса K.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2,3,5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. На первый этап стратегии $S^n_{3m+1}S(\delta)$ можно смотреть как на оптимальную стратегию поиска области Δ с заданным числом ходов T. Точность, с которой стратегией $S(\delta)$ находится область Δ, равна $\tau_0 = \delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если задана точность τ, с которой ищем область Δ, то число N экспериментов стратегии $S^n_{3m+1}S(\delta)$ вычисляется так. Находится число T экспериментов стратегии $S(\delta)$. Затем – наименьшие решения m_i неравенств:

$$\tau \ge \frac{2}{3^{m_1}}\delta, \qquad \tau \ge \frac{1}{3^{m_2}}\delta, \qquad \tau \ge \frac{1}{3^{m_3-1}}\delta .$$

Положим $M = \min\{3m_1, 3m_2+2, 3m_3+1\}$. Тогда $N = T+Mn$.

5^0. Рассмотрим подкласс K^* функций $f(x)$ из класса K, удовлетворяющих дополнительным условиям:

а) каждая $f(x)$ достигает в некоторой точке $x^* \in \Delta$ глобального экстремума;

б) для любых $x, y \in \Delta$ из $|x^*, x| > |x^*, y|$ следует $f(y) > f(x)$, $|x, y|$ – расстояние между x, y.

Для функций из класса K^* решается задача эффективного отыскания точки $\bar{x} \in \Omega$, принадлежащей экстремальной окрестности $\Omega_\varepsilon = \{x_i^* - \varepsilon \le x_i \le x_i^* + \varepsilon\}$, где x_i – координаты x. Как

будет показано, эта задача эквивалентна отысканию точки $\bar{x} \in \Delta \cap \Omega_\varepsilon$. Поэтому можно полагать $f(x^*) \approx f(\bar{x})$.

ЛЕММА 6. Пусть $\gamma \le \delta$, тогда точка $\bar{x}$, найденная по стратегии $S(\gamma)$, принадлежит Δ и лежит вместе с x^* в одном γ-кубике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем через точки $\bar{x}$ и x^* плоскости, параллельные граням куба Δ. Получим параллелепипед, содержащийся в области Δ, так как, по замечанию I, $\bar{x} \in \Delta$. Нетрудно показать, что ребра этого параллелепипеда меньше или равны γ.

ТЕОРЕМА 2. Для функций класса K^* стратегия $S(\gamma)$ при $\gamma = \min\{\varepsilon\ \delta\}$ является оптимальной пассивной стратегией поиска точки из экстремальной окрестности Ω_ε.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}$ – точка, найденная стратегией $S(\gamma)$. Тогда, по лемме 6, $\bar{x}$ лежит в одном γ-кубике с x^* и $\bar{x} \in \Delta$, а значит, $\bar{x} \in \Omega_\varepsilon \cap \Delta$.

Аналогично (как в доказательстве леммы 2) доказывается существование γ-кубика E, не содержащего точку любой другой стратегии C с меньшим, чем у $S(\gamma)$, числом экспериментов. Затем строится функция $f(x)$ из класса K^*, которая достигает глобального экстремума в точке x^*, находящейся в общей вершине области Δ и γ-кубика E. Так как $\Omega_\varepsilon \cap \Delta = E$, то стратегия C непригодна.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В случае произвольной области Ω для получения хорошей пассивной стратегии можно использовать идеи укладки и покрытия [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Локально-оптимальную стратегию поиска точки из экстремальной окрестности Ω_ε для класса K^* можно построить так. С помощью стратегии $S^n_{3m+1}S(\delta)$ найдем область Δ с точностью ε. Пусть Δ' – куб, найденный этой стратегией, а Δ'' есть $(\delta-\varepsilon)$-кубик, имеющий общий центр с кубом Δ'. Тогда $\Delta'' \subset \Delta$. На предпоследнем этапе возьмем множество A точек $(a_1, \dots, a_l)$ такое, чтобы любой ε-кубик из $(\Delta' \setminus \Delta'')$ содержал по крайней мере одну точку из A. Пусть A, обладающее этим свойством, имеет наименьшее l. Пусть, далее, x_1 – точка, найденная стратегией А, а x_2 – точка, найденная оптимальной стратегией в Δ'' на последнем этапе. Тогда Ω_ε принадлежит та из точек x_1, x_2, значение функции в которой наибольшее.

Автор считает необходимым выразить благодарность Лбову Г.С. за предложенную тему и ценные советы.

Литература

I. ЛБОВ Г.С. Адаптивный поиск экстремума функций от переменных, замеренных в шкале наименований. –В кн.: Вычислительные системы. Вып. 44. Новосибирск, I97I, с.I3–22.

2. Дж.фон НЕЙМАН, МОРГЕНШТЕРН О. Теория игр и экономическое поведение. М., "Наука", I970.

3. РОДЖЕРС К. Укладки и покрытия. М., "Мир", I968.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 января I976 года