ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
(Вычислительные системы)
1976 год Выпуск 67

УДК 681.142.2

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СЕМАНТИКИ ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Д.И.Свириденко

Рассмотрим программу, которая вычисляет функцию $f(x)= x \uparrow 2$ для натуральных чисел. Даже для этой простейшей программы возникает принципиальный вопрос: каким образом можно продемонстрировать (доказать) её правильность или безошибочность написания в семантическом смысле. Быть может, конкретная программа уже содержит некоторую ошибку, несмотря на всю её простоту? Тогда как её обнаружить? Если бы мы имели дело с конечным множеством входных данных, то мы могли бы просто проверить работу программы для каждого конкретного значения, но в нашем случае семантическая область бесконечна. Тестирование программы в лучшем случае помогло бы обнаружить ошибки, но ни в коем случае доказать их отсутствие. В конце концов решение о том, что программа написана правильно, принимается на основании неполной информации. Но ведь это типичная задача распознавания образов (эмпирического предсказания). Аналогичным образом может трактоваться задача эквивалентного преобразования программ и многие другие. Однако построение теории этой специальной ветви распознавания образов, как и всегда, предполагает разработку специфического математического аппарата, и нет никаких оснований считать, что указанные задачи не могут быть решены в рамках теоретического программирования.

При развитии теории, как это бывает в подобных случаях, возникают свои внутренние математические задачи. Ниже излагаются решения некоторых из них.

§ I. Полнота семантических областей

Хорошо известно, что при попытке формально описать семантику синтаксических объектов языка программирования высокого уровня всегда возникают определённые трудности. Одна из них – определить семантику таких потенциально бесконечных сущностей, как циклы и рекурсивные процедуры. Не случайно в качестве семантических областей при некоторых подходах [например, 5,6] выбраны полные решётки: для них справедлива теорема Тарского [7] о наименьшей неподвижной точке. Поэтому вполне естественно выделить и изучить те математические структуры, для которых справедлив аналог теоремы Тарского.

Пусть $\langle X,\xi \rangle$ – T_0-пространство и $\sqsubseteq_\xi$ – частичный порядок, индуцированный на множестве X T_0-топологией ξ. Напомним, что

$$x \sqsubseteq_\xi y \leftrightarrow (\forall U \in \xi)\ (x \in U \to y \in U).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. T_0-пространство $\langle X,\xi \rangle$ назовем LFP – **п р о с т р а н с т в о м**, если каждая непрерывная в топологии ξ функция $f\colon X \to X$ обладает наименьшей неподвижной точкой относительно частичного порядка $\sqsubseteq_\xi$, т.е.

$$\exists y \in X\ \forall y' \in X\ [f(y) = y \,\&\, [f(y') = y' \to y \sqsubseteq_\xi y']].$$

Назовем непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, где $\langle X,\xi \rangle$ и $\langle Y,\zeta \rangle$ – T_0-пространства, **r-о т о б р а ж е н и е м**, если существует правое обратное отображение к f, т.е. существует непрерывное отображение $q\colon Y \to X$ такое, что $f \circ q = id_Y$ (тождественное отображение на Y); $\langle Y,\zeta \rangle$ называется **r – о б р а з о м** T_0-пространства $\langle X,\xi \rangle$.

ТЕОРЕМА I. **r – о б р а з LFP – п р о с т р а н с т в а т а к ж е я в л я е т с я LFP – п р о с т р а н с т в о м.** (Полные доказательства теорем I–5 данного параграфа будут опубликованы позже.)

Пусть $\langle X,\sqsubseteq \rangle$ – частично упорядоченное множество. Подмножество $X_0 \subseteq X$ назовем **п о д п а р у с о м**, если для каждых $x,y \in X_0$ из того, что существует некоторая верхняя грань для множества $\{x,y\}$ в X следует существование точной верхней грани $x \sqcup y \in X_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [I]. T_0-пространство $\langle X,\xi \rangle$ называется **A – п р о с т р а н с т в о м**, если существует подмножество $X_0 \subseteq X$, называемое базисным, такое, что

а) X_0 является подпарусом в частично упорядоченном множестве $\langle X,\sqsubseteq_\xi \rangle$;

б) семейство подмножеств $\{\emptyset\} \cup \{Int(\{y \in X \mid x_0 \sqsubseteq_\xi y\}) \mid x_0 \in X_0\}$, где $Int(S)$ – внутренность подмножества $S \subseteq X$, образует базис топологии;

в) для $x_0 \in X_0$, $x \in X$ при $x_0 \prec x$ найдется $x_1 \in X_0$ такой, что $x_0 \prec x_1 \prec x$, где отношение $x \prec y$ определяется формулой: $y \in Int\{z \in x \mid x \sqsubseteq_\xi z\}$.

Если A-пространство в индуцированном порядке обладает наименьшим элементом, то оно носит название **A_0 – п р о с т р а н с т в а**. Если же для каждого базисного элемента $x_0 \in X_0$ имеет место отношение $x_0 \prec x_0$, то A-пространство называется **f – п р о с т р а н с т в о м** [2].

Пусть $\langle X,\sqsubseteq \rangle$ – некоторое частично упорядоченное множество. Подмножество $S \subseteq X$ называется **н а п р а в л е н н ы м**, если для каждых $x,y \in S$ найдется в S их некоторая верхняя грань. Определим **T_0 – т о п о л о г и ю С к о т т а** τ_X на множестве X следующим образом: $U \in \tau_X$, если и только если выполнены условия:

$$\forall x y \in X (x \in U \,\&\, x \sqsubseteq y \to y \in U), \tag{i}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{для каждого непустого направленного подмножества}\\ S \subseteq X \text{ из того, что существует его точная верх-}\\ \text{няя грань } \sqcup S \text{ и } \sqcup S \in U, \textbf{ следует, что } S \cap U \neq \emptyset\end{array}\right\} \tag{ii}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Частично упорядоченное множество $\langle X,\sqsubseteq \rangle$ назовем **A – ч а с т и ч н о у п о р я д о ч е н н ы м м н о ж е с т в о м**, если T_0-пространство $\langle X,\tau_X \rangle$ является A-пространством.

Отображение $f\colon X \to X$ частично упорядоченного множества $\langle X,\sqsubseteq \rangle$ в частично упорядоченное множество $\langle Y,\leq \rangle$ называется **а – н е п р е р ы в н ы м**, если для каждого непустого направленного подмножества $S \subseteq X$ из того, что существует его точная верхняя грань $\sqcup S$, следует существование точной верхней грани $\sqcup f(S)$ и выполнение равенства $f(\sqcup S) = \sqcup f(S)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Отображение $f: X \to Y$ частично упорядоченного множества $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ в частично упорядоченное множество $\langle Y, \leq \rangle$ а-непрерывно в том и только в том случае, когда f является непрерывным отображением T_0-пространства $\langle X, \tau_X \rangle$ в T_0-пространство $\langle Y, \tau_Y \rangle$.

Для А-частично упорядоченных множеств справедлив следующий критерий непрерывности отображений:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\langle X, \sqsubseteq \rangle, \langle Y, \leq \rangle$ – А-частично упорядоченные множества, $X_0 \subseteq X$ и $Y_0 \subseteq Y$ – их базисные множества. Тогда $f: X \to Y$ непрерывна в том и только в том случае, когда

$$(\forall x \in X)\ (\forall y_0 \in Y)[y_0 \prec f(x) \leftrightarrow \exists x_0 \in X_0 [y_0 \prec f(x_0) \,\&\, x_0 \prec x]].$$

СЛЕДСТВИЕ I. Если А-частично упорядоченные множества $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ и $\langle Y, \leq \rangle$ имеют счетные базисные подмножества, то множество $[X \to Y]$ всех непрерывных отображений из X в Y имеет мощность $2^{\aleph_0}$, где $\aleph_0$ – первый счетный кардинал.

Как хорошо известно, для того чтобы каждая а-непрерывная функция частично упорядоченного множества $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ при отображении в себя имела наименьшую неподвижную точку, достаточно, чтобы X было счетно-полным, т.е. чтобы каждое счетное направленное подмножество $S \subseteq X$ обладало точной верхней гранью $\sqcup S$ (теорема Клини). Тогда из утверждения I вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если T_0-пространство $\langle X, \xi \rangle$ таково, что топология $\xi \subseteq \tau_{\langle X, \sqsubseteq_\xi \rangle}$, то $\langle X, \xi \rangle$ является LFP-пространством.

Естественно возникает вопрос: в каких случаях LFP-пространство является полным (или счетно-полным) частично упорядоченным множеством в частичном порядке, индуцированным

топологией? Напомним, что частично упорядоченное множество $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ полное, если каждое непустое направленное подмножество $S \subseteq X$ обладает точной верхней гранью $\sqcup S \in X$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ – А-частично упорядоченное множество, у которого существует такое базисное подпространство $X_0 \subseteq X$, что для каждого $x \in X$ множество $\{x_0 \in X_0 \mid x_0 \prec x\}$ не более чем счетно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) $\langle X, \tau_X \rangle$ – LFP-пространство;

(б) $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ – счетно-полное частично упорядоченное множество с наименьшим элементом.

Если у частично упорядоченного множества $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ базисное подпространство счетное, то утверждение (а) эквивалентно следующему:

(в) $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ – полное частично упорядоченное множество с наименьшим элементом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ – А-частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Тогда при условии, что у X существует наибольший элемент, следующие утверждения эквивалентны:

$\langle X, \tau_X \rangle$ – непрерывная решетка;

$\langle X, \tau_X \rangle$ – LFP-пространство.

При доказательстве теоремы 2 использовалось утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ – А-частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 2, и пусть $\mathscr{X} \subseteq X$ – некоторая счетная цепь

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \ldots;$$

тогда произвольное монотонное отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ может быть продолжено до а-непрерывного на всём множестве X.

Отметим одно интересное следствие данной теоремы. Назовем частично упорядоченное множество $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ аппликативным, если X а-гомеоморфно частично упорядоченному множеству $[X \to X]$ всех своих а-непрерывных отображений, где для f, $q \in [X \to X]$

$$f \sqsubseteq q \leftrightarrow \forall x \in X\ [f(x) \sqsubseteq q(x)].$$

Существование таких частично упорядоченных множеств было показано в [I,2,4]. (Данные структуры решают проблему само-применимости, возникающую при определении математической семантики языков программирования.)

ТЕОРЕМА 4. Пусть -А- частично упорядоченное множество $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 2, является аппликативным и содержит, по крайней мере, два элемента. Тогда его мощность не менее чем $\aleph_1$. Равенство достигается в случае, когда у X существует счетное базисное подпространство.

Как известно, все существующие конструкции аппликативных частично упорядоченных множеств использовали полноту исходного частично упорядоченного множества. Поэтому вполне естественно высказать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Каждое аппликативное частично упорядоченное множество является полным частично упорядоченным множеством с наименьшим элементом.

Частичное решение данного вопроса дает следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть -А- частично упорядоченное множество $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и является аппликативным, тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $\langle X, \tau_X \rangle$ - LFP - пространство;

(ii) $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ - счетно-полное частично упорядоченное множество с наименьшим элементом;

(iii) в X каждое непустое подмножество обладает точной нижней гранью.

§ 2. О семантике решетки блок-схем Д.Скотта

Предполагается знакомство с определениями и конструкциями работы [3]. Напомним, что решетку E блок-схем, описанную Д.Скоттом, можно рассматривать как обратный предел непрерывных решеток $\mathscr{D}_n$, $n \geq 0$, конечных блок-схем. Семейство решеток $\{\mathscr{D}_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{D}_0 = \mathbf{F} \quad \text{(решетка функциональных символов)},$$

$$\mathscr{D}_{n+1} = \mathscr{D}_0 + (\mathscr{D}_n; \mathscr{D}_n) + (B \to \mathscr{D}_n, \mathscr{D}_n),$$

где B - решетка предикатных символов, ";" и "$\to$" - символы операций произведения и суммы блок-схем. Отношение же частичного порядка $\sqsubseteq$ на $\mathscr{D}$ можно представлять себе так:

$$(\forall d \in \mathscr{D})(\bot \sqsubseteq d)$$

и $d' \sqsubseteq d''$ тогда и только тогда, когда либо $d_1' \sqsubseteq d_1''$ и $d_2' \sqsubseteq d_2''$, где $d' = (d_1'; d_2')$ и $d'' = (d_1''; d_2'')$; либо $b' \sqsubseteq b''$, $d_1' \sqsubseteq d_1''$ и $d_2' \sqsubseteq d_2''$, где $d' = (b' \to d_1' d_2')$ и $d'' = (b'' \to d_1'', d_2'')$.

Как обратный предел непрерывных решеток решетка $E = \varprojlim \mathscr{D}_n$ также является непрерывной. Сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Решетка E блок-схем является полным f_0-частично упорядоченным множеством с подрешеткой $\mathscr{D} = \bigcup_{n=0} \mathscr{D}_n$ конечных блок-схем как основным базисным подпространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau(\sqsubseteq) - T_0$ - топология, индуцированная частичным порядком $\sqsubseteq$ на E. Покажем, что в этой топологии решетка E является полным f_0 - пространством. На самом деле достаточно показать, что E - f -пространство, так как полнота следует из того, что E-полная решетка и что для про -

извольного направленного подмножества $S \subseteq E$ его точная верхняя грань $\sqcup S$ является предельной точкой множества S в топологии $\tau(\sqsubseteq)$ (см. теорему I §3 работы [I]).

Пусть S – некоторое направленное множество. Положим

$$\hat{S} = \{ d \in \mathcal{D} \mid \exists s \in S\ [d \sqsubseteq s]\}.$$

Нетрудно показать, что $\hat{S}$ также является направленным множеством и что $\sqcup S = \sqcup \hat{S}$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_{\infty i}(\sqcup S)\}_{i=0}^{\infty}$. Так как для каждого $i \ge 0$ $\varphi_{\infty i}$ – аддитивная функция, то

$$\varphi_{\infty i}(\sqcup S) = \sqcup\{\varphi_{\infty i}(s) \mid s \in S\}.$$

Заметим теперь, что если $d \in \mathcal{D}$, то множество $\{d' \mid d' \sqsubseteq d\}$ конечное. Так как множество $\{\varphi_{\infty i}(s) \mid s \in S\}$ направленное и конечное, то $\varphi_{\infty i}(\sqcup S)$ есть наибольший элемент данного множества и, следовательно, $\varphi_{\infty i}(\sqcup S) \in \hat{S}$. Принимая во внимание то, что для каждого $i \ge 0$, функция $\varphi_{\infty i}(\sqcup S)$ есть наилучшая аппроксимация элементами из $\mathcal{D}_i$ схемы $\sqcup S$, получаем, что множества $\hat{S}$ и $\{\varphi_{\infty i}(\sqcup S)\}_{i=0}^{\infty}$ конфинальны друг с другом. Рассмотрим $d \in \mathcal{D}$ и множество $\check{d} = \{d' \in E \mid d \sqsubseteq d'\}$. Пусть S – произвольное направленное множество с $\sqcup S \in \check{d}$. Так как $d \sqsubseteq \sqcup S$, то найдется $i \ge 0$ такое, что $\varphi_{\infty i}(\sqcup S) \in \check{d}$, т.е. $\check{d} \cap \hat{S} \neq \emptyset$. Но множество S конфинально с $\hat{S}$, и, следовательно, $\check{d} \cap S \neq \emptyset$. Отсюда $\check{d} \in \tau(\sqsubseteq)$, так как выполнение условия $x \in \check{d} \,\&\, x \sqsubseteq y \to y \in \check{d}$ очевидно. Пусть $U \in \tau(\sqsubseteq)$ и $v \in U$. Так как $v = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \varphi_{\infty i}(v)$, то существует $i \ge 0$ такое, что $\varphi_{\infty i}(v) \in U$. Отсюда $v \in \check{\varphi_{\infty i}(v)} \subseteq U$, и, следовательно, семейство $\{\emptyset\} \cup \{\check{d} \mid d \in \mathcal{D}\}$ образует базис топологии $\tau(\sqsubseteq)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Каждое монотонное отображение f из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ можно продолжить единственным образом до непрерывного отображения $f: E \to E$ из E в E.*

Рассмотрим теперь фактор-множество $E/\cong$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ (см. [3]). В [3] был поставлен вопрос: будет ли $E/\cong$ полной решеткой?

ТЕОРЕМА 7. *$\langle E/\cong, \sqsubseteq \rangle$ – полная решетка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для схемы $d \in E$ обозначим $[d] \rightleftharpoons \{d' \in E \mid d \cong d'\}$ и положим $[d] \sqsubseteq [d'] \leftrightarrow d \sqsubseteq d'$. Пусть теперь $[x] \in E/\cong$ и $\mathcal{J} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{B}, \mathcal{V} \rangle$ – произвольная интерпретация элементов решетки E. Так как $\mathcal{V}: E \to [S \to S]$ – непрерывное отображение полной решетки E в полную решетку всех непрерывных отображений полной решетки S в себя, то

$$\mathcal{V}(x) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{V}(\varphi_{\infty i}(x)).$$

В [3] было показано, что $E/\cong$ является верхней счетно-полной полурешеткой, где для $[y],[z] \in E/\cong$

$$[y] \sqcup [z] = [(T \to y, z)], \tag{I}$$

а для произвольного счетного множества $\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty} = \mathcal{X}$

$$\sqcup \mathcal{X} = [(T \to x_0, (T \to x_1, \dots) \dots)]. \tag{2}$$

Так как $\mathcal{J}$ произвольное, то из (I) и (2) следует, что

$$[x] = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} [\varphi_{\infty i}(x)]. \tag{3}$$

Пусть теперь S' – произвольное непустое подмножество из $E/\cong$. Положим

$$\hat{S}' = \{[d] \mid \exists [d'] \in S' [d \sqsubseteq d' \,\&\, d \in \mathcal{D}]\}.$$

Так как $\hat{S}'$ – счетное множество, то для него существует точная верхняя грань $\sqcup \hat{S}'$. Пусть $[s] \in S'$. Тогда счетная последовательность $\{[\varphi_{\infty i}(s)]\}_{i=0}^{\infty}$ лежит в $\hat{S}'$. Из (3) следует, что

$$[s] = \bigsqcup_{i=0} [\varphi_{\infty i}(s)] \sqsubseteq \hat{S}'.$$

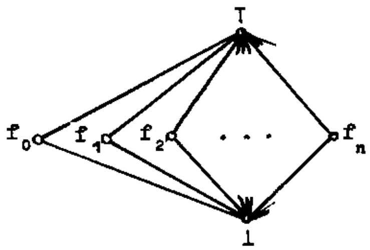
Следовательно, $\sqcup \hat{S}'$ – верхняя грань множества S'. Но так как S' конфинально с $\hat{S}'$, то $\sqcup \hat{S}'$ – точная верхняя грань S'. Таким образом, $E/\cong$ является верхней полной полурешеткой с наименьшим элементом [I]. Следовательно, $E/\cong$ – полная решетка. Теорема доказана.

Возникает следующий вопрос: справедлив ли аналог теоремы 6 (или некоторые его ослабления) для полной решетки $E/\cong$?

Нижеприведенный результат может оказаться полезным в поисках решения указанной проблемы.

В работе [3] от семантической области S требовалось только, чтобы S была **полной решеткой**. Покажем, что при исследовании семантической эквивалентности можно ограничиться только одной областью.

Пусть $\mathbb{F}$ – полная решетка примитивных функциональных символов (включая и символ тождественного преобразования):



Аналогично тому, как происходило пополнение решетки $\mathcal{D}$ конечных блок-схем, мы можем определить пополнение $\mathbb{F}^\infty$ решетки $\mathbb{F}^*$ всех конечных слов над алфавитом $\mathbb{F}$, где

$$\mathbb{F}^* = \mathbb{F} + \mathbb{F} \times \mathbb{F} + \ldots + \underbrace{\mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}}_{n} + \ldots .$$

Отметим, что решетка $\mathbb{F}^\infty$ удовлетворяет следующему рекурсивному равенству

$$\mathbb{F}^\infty = \mathbb{F} + (\mathbb{F}^\infty)^*.$$

Определим на множестве $\mathbb{F}^\infty$ для каждого символа $f \in \mathbb{F}$ отображение $\hat{f}: \mathbb{F}^\infty \to \mathbb{F}^\infty$

$$\hat{f}(\mathcal{b}) = \begin{cases} \mathcal{b}, & f = I, \\ \perp, & f = \perp, \\ \top, & f = \top, \\ \langle f, \mathcal{b} \rangle & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\hat{f}$ – непрерывное отображение.

С в о б о д н о й и н т е р п р е т а ц и е й решетки E будем называть интерпретацию $\mathcal{J}$, у которой $S = \mathbb{F}^\infty$ и $(\forall f \in \mathbb{F})(\mathcal{H}(f) = \hat{f})$. Схемы d и d' называются E – э к в и в а л е н т н ы м и ($d \approx_{\mathbb{F}} d'$), если для каждой свободной интерпретации $\mathcal{J}$

$$\vartheta^{\mathcal{J}}(d) = \vartheta^{\mathcal{J}}(d').$$

ТЕОРЕМА 8. Д л я к а ж д ы х $d\, d' \in E$ в е р н о $d \cong d' \leftrightarrow d \approx_{\mathbb{F}} d'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\to$ очевидна. Обратно, пусть $d \approx_{\mathbb{F}} d'$, но $d \not\cong d'$, т.е. существует интерпретация $\mathcal{J}$ такая, что для некоторого $\sigma_0 \in S^{\mathcal{J}}$

$$\vartheta^{\mathcal{J}}(d)(\sigma_0) \neq \vartheta^{\mathcal{J}}(d')(\sigma_0). \tag{4}$$

Рассмотрим свободную интерпретацию $\mathcal{J}'$ такую, что для каждого $b \in \mathbb{B}$ и слова $\mathcal{D} \in \mathbb{F}^\infty$

$$\mathcal{B}^{\mathcal{J}'}(b)(\mathcal{D}) = \mathcal{B}^{\mathcal{J}}(b)(\sigma^{\mathcal{D}}), \tag{5}$$

где $\sigma^{\mathcal{D}} \in S$ определяется следующим образом. Определим непрерывное отображение $\phi: \mathbb{F}^\infty \to E$ равенством

$$\phi(\mathcal{D}) = \begin{cases} \mathcal{D}, \text{ если } \mathcal{D} \in \mathbb{F}, \\ (\phi(\mathcal{D}_2);\ \phi(\mathcal{D}_1)), \text{ если } \mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \rangle. \end{cases}$$

Полагаем в (5)

$$\sigma^{\mathcal{D}} = \vartheta^{\mathcal{J}}(\phi(\mathcal{D}))(\sigma_0). \tag{6}$$

Покажем теперь, что для каждого $d \in E$

$$\vartheta^{\mathcal{J}}(d)(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{J}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{J}'}(d)(I)))(\sigma_0). \tag{7}$$

На самом деле достаточно показать справедливость равенства (7) только для конечных блок-схем, так как для произвольной схемы $d \in E$:

$$\vartheta^{\mathcal{J}}(d)(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{J}}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \varphi_{\infty i}(d)\right)(\sigma_0) =$$

$$= \bigsqcup \vartheta^{\mathcal{J}}(\varphi_{\infty i}(d))(\sigma_0) = \bigsqcup \vartheta^{\mathcal{J}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{J}}(\varphi_{\infty i}(d))(I)))(\sigma_0) =$$

$$= \vartheta^{\mathcal{J}}\left(\phi\left(\vartheta^{\mathcal{J}'}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \varphi_{\infty i}(d)\right)(I)\right)\right)(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{J}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{J}'}(d)(I)))(\sigma_0).$$

(Здесь существенным образом использовалась непрерывность функций $\vartheta^{\mathcal{J}}$, $\vartheta^{\mathcal{J}'}$ и ϕ.)

Равенство (7) будем доказывать индукцией по $\rho(d)$, где $d \in \mathcal{D}$ и

$$\rho(d) = \min \{ n \mid d \in \mathcal{D}_n \}.$$

I. $\rho(d) = 0$. В этом случае $d \in \mathbb{F}$. Случай $d = \bot, \top, I$ тривиален. Пусть $d = f$. Тогда

$$\vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(f)(I)))(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi\langle f, I\rangle)(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}((\phi(I);$$

$$\phi(f)))(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}(f)(\vartheta^{\mathcal{F}}(I)(\sigma_0)) = \vartheta^{\mathcal{F}}(f)(\sigma_0).$$

2. Предположим, что для всех $d, \rho(d) \le n$ равенство (7) справедливо. При $d \in \mathcal{D}_{n+1}$ возможны два подслучая:

A) $d = (d_1, d_2);$

B) $d = (b \to d_1, d_2).$

Так как для $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}$

$$((d_1; d_2); d_3) \cong (d_1; (d_2; d_3)),$$

$$((b \to d_1, d_2); d_3) \cong (b \to (d_1; d_3), (d_2; d_3)),$$

то случай A) можно заменить рассмотрением

A') $d = (d'; f)$, где $f \in \mathbb{F}$ и $\rho(d') \le n$,

$$\text{A'}) \quad \vartheta^{\mathcal{F}}((d'; f))(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}(f)(\vartheta^{\mathcal{F}}(d')(\sigma_0)) =$$

$$= \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(f))(\vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d')(I))))(\sigma_0) =$$

$$= \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi\langle f, \vartheta^{\mathcal{F}'}(d')(I)\rangle)(\sigma_0);$$

так как $\langle f, \mathcal{D}\rangle = \vartheta^{\mathcal{F}'}(f)(\mathcal{D})$, то мы можем записать

$$\vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(f)(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d')(I)))(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d'; f)))(\sigma_0).$$

$$\text{B}) \quad \vartheta^{\mathcal{F}}((b \to d_1, d_2))(\sigma_0) = (\mathcal{B}^{\mathcal{F}}(b)(\sigma_0) \supset \vartheta^{\mathcal{F}}(d_1)(\sigma_0), \vartheta^{\mathcal{F}}(d_2)(\sigma_0)).$$

Заметим теперь, что

$$\mathcal{B}^{\mathcal{F}'}(b)(I) = \mathcal{B}^{\mathcal{F}}(b)(\sigma^I) = \mathcal{B}^{\mathcal{F}}(b)(\vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(I)))(\sigma_0) = \mathcal{B}^{\mathcal{F}}(b)(\sigma_0).$$

Отсюда

$$\vartheta^{\mathcal{F}}((b \to d_1, d_2))(\sigma_0) = (\mathcal{B}^{\mathcal{F}'}(b)(I) \supset \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d_1)))(\sigma_0),$$

$$\vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d_2)))(\sigma_0) = \vartheta^{\mathcal{F}}(\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(b \to d_1, d_2)(I)))(\sigma_0).$$

Итак, равенство (7) доказано. Но тогда из (4) следует, что

$$\phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d)(I)) \ne \phi(\vartheta^{\mathcal{F}'}(d')(I)).$$

Следовательно,

$$\vartheta^{\mathcal{F}'}(d)(I) \ne \vartheta^{\mathcal{F}'}(d')(I),$$

что противоречит F-эквивалентности схем d и d'.

Литература

I. ЕРШОВ Ю.Л. Теория А-пространств. -"Алгебра и логика", 1973, т.I2, № 4.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Вычислимые функционалы конечных типов.-"Алгебра и логика", I972, т.II, № 4, с.367-437.

3. SCOTT D. The Lattices of Flow-Diagrams. Symposium on Semantics of Algorithmic Langwages. Lecture Notes in Math., 1971, N 188.

4. SCOTT D. Continuons Lattices; Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lecture Notes in Math., 1972, N 274.

5. SCOTT D. Outline of a Mathematical Theory of Computation. - In: Procceding of the Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, 1970, p.169-176.

6. SCOTT D., STACHEY Ch. Toward a Mathematical Semantics for Computer Languages. - In: Proc.Symposium on Computer and Automata. Microwave Inst. Symposia Series 21, Polytechnic Inst. of Brooclyn.

7. TARSKY A. A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and its Application. - "Pacific J.Math.", 1955, p.285-309.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 декабря I975 года