

УДК 518.12:621.01

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ — УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ
ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
В МАШИНОСТРОЕНИИ

В.С.Завьялов

§1. Методы представления сложных поверхностей
машиностроительных конструкций

1. Проблема обработки информации. Автоматизация проектно-конструкторских работ и технологической подготовки производства средствами вычислительной техники в таких областях машиностроения, как авиационная, судостроительная и автомобильная промышленность, производство моторов и турбин, поставила задачу разработки математических методов обработки информации о деталях и агрегатах сложной формы.

В процессе проектирования изделий приходится решать такие задачи, как вычисление координат точек поверхности, нормалей и кривизн в них, задачи компоновки агрегатов, сводящиеся к пересечению поверхностей, расчет конструктивных элементов, выходящих за теоретические обводы, нахождение поверхности, эквидистантной данной, расчет длин, площадей, объемов и т.п. При технологической подготовке производства к этим задачам добавляются расчет заготовок, проектирование технологической и сборочной оснастки, подготовка управляющих программ для технологического оборудования с программным управлением (станки, прессы, аппараты для раскроя панелей и т.п.).

При традиционных методах носителями информации о таких деталях были преимущественно чертежи, а также изображения плоских сечений, агрегатов на плазах при плазово-шаблонном методе производства в авиа- и судостроении. Однако, ввиду недостаточ-

ной точности мелкомасштабных чертежей, приходится дополнять их числовой информацией в большем или меньшем объеме. При обработке информации на ЭВМ она вся должна допускать числовую интерпретацию. Это поставило проблему создания языка описания геометрической информации универсального, с одной стороны, и достаточно экономичного и алгоритмичного в отношении машинной реализации — с другой.

2. Инженерные методы проектирования поверхностей. За последние десять-пятнадцать лет различные конструкторские бюро и заводы накопили определенный опыт в создании ряда способов и приемов представления и обработки геометрической информации для своих изделий. Для этих целей использовались, главным образом, определенного типа аналитические кривые и поверхности. Выбором параметров, от которых они зависят, удается получить форму деталей и агрегатов, удовлетворяющую конструктивным требованиям. Впрочем, подобрать математическое представление поверхности детали или агрегата удастся лишь в сравнительно простых ситуациях. В большинстве случаев при проектировании геометрически сложных объектов создаются лишь наборы кривых, из которых конструируется каркас поверхности детали или агрегата. Чаще всего, например, при проектировании корпуса судна или фюзеляжа летательного аппарата каркас образуется пересечением двух наборов плоских сечений: один параллелен строительной горизонтали (ватерлинии, горизонтали), другой перпендикулярен ей (шпангоуты). В общем случае это пространственные кривые, определяемые вектор-функциями $\vec{r}^{(i)} = x^i \vec{e}_1 + y^i \vec{e}_2 + z^i \vec{e}_3$ ($i = 0, \dots, N$) и $\vec{r}^{(j)} = x^j \vec{e}_1 + y^j \vec{e}_2 + z^j \vec{e}_3$ ($j = 0, \dots, M$).

После построения каркаса нужно доопределить поверхность, указав правило вычисления координат точек, не лежащих на линиях каркаса. Если он достаточно густой, то в пределах допустимой погрешности это можно сделать разными способами. Для сравнительно редкого каркаса правило вычисления координат точек будет вполне определенным, и оно должно обеспечивать требуемую точность восстановления и гладкость поверхности. Например, в отмеченном выше случае задается правило построения кривых, параллельных шпангоутам, вдоль строительной горизонтали.

Такой подход к проектированию форм деталей отражает привычный для инженера геометрический способ мышления, но совер-

шенно не учитывает алгоритмической стороны дела. А эта сторона становится главной, если не решающей, при создании системы автоматизации обработки информации на ЭВМ. При использовании различных математических моделей объем программирования растет быстрее, чем по линейному закону от числа последних. И тем не менее такая система остается узкоспециализированной, не приемлемой даже в качестве отраслевой.

3. Поверхности Кунза. Важный шаг в разработке методов описания сложных поверхностей был сделан американским математиком Кунзом [1] (см. также [4]), который предложил общий способ построения по заданному каркасу, поверхности, удовлетворяющей некоторым условиям гладкости. Для применения этого способа необходимо, чтобы каркас представлял собой два семейства кривых таких, что каждая из них не пересекается с кривыми одного с нею семейства (в том числе с самой собой), а с кривыми другого семейства пересекается только в одной точке

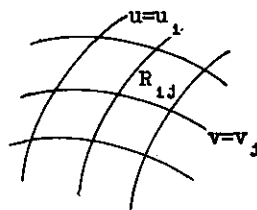


Рис. I

(рис. I). Говорят, что такая поверхность гомеоморфна прямоугольнику на плоскости с сеткой линий, параллельных его ребрам. В более общем случае могут быть объединения таких прямоугольников, а также поверхности, гомеоморфные цилиндру, конусу и сфере. В этих случаях линии одного из семейства замкнутые, и, кроме того, для конуса линии второго семейства пересекаются в одной точке — вершине, а для сферы они тоже замкнутые и пересекаются в двух точках — полюсах.

Метод Кунза состоит в следующем. Пространственные линии каркаса принимаются за координатные линии криволинейных координат u, v на поверхности

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(v) \quad (i = 0, \dots, N); \quad \vec{r}^{(j)} = \vec{r}^{(j)}(u) \quad (j = 0, \dots, M). \quad (1.1)$$

Построение поверхности проводится локально для каждой ячейки-сегмента R_{ij} , и предполагается, что вдоль её ребер параметры u и v изменяются от 0 до 1. Тогда уравнение поверхности в ячейке R_{ij} будет

$$\begin{aligned}\bar{F}^{(1j)}(u, v) = & \bar{F}^{(1)}(v)f_0(u) + \bar{F}^{(1+1)}(v)f_2(u) + \bar{F}^{(j)}(u)f_0(v) + \\ & + \bar{F}^{(j+1)}(u)f_1(v) - \bar{F}_{1,j}f_0(u)f_0(v) - \bar{F}_{1,j+1}f_0(u)f_1(v) - \\ & - \bar{F}_{1+1,j}f_1(u)f_0(v) - \bar{F}_{1+1,j+1}f_1(u)f_1(v),\end{aligned}\quad (1.2)$$

где $\bar{F}_{ki}$ - векторы вершин сегмента.

Поверхность $\bar{F}(u, v)$ определяется неоднозначно. Она зависит от вида функций f_0 и f_1 . Выбором последних распоряжаются с целью обеспечить выполнение требований гладкости. Так, если вектор-функции $\bar{F}^{(j)}(v)$ и $\bar{F}^{(j)}(u)$ только непрерывны, то для непрерывной поверхности достаточно наложить на функции f_0 и f_1 ограничения

$$\begin{aligned}f_0(0) = 1, \quad f_0(1) = 0, \\ f_1(0) = 0, \quad f_1(1) = 1.\end{aligned}\quad (1.3)$$

В простейшем случае они суть $f_1(w) = w$ и $f_0 = 1 - f_1(w)$.

Если функции $\bar{F}^{(1)}(v)$ и $\bar{F}^{(j)}(u)$ имеют непрерывные первые производные, то требования (1.3) и

$$\begin{aligned}f'_0(0) = f'_0(1) = 0, \\ f'_1(0) = f'_1(1) = 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

обеспечивают непрерывность поверхности и непрерывность касательной плоскости к ней. Заметим, что при этом непрерывна и производная $\bar{F}_{uv}(u, v)$ и она равна нулю в узлах сетки. Здесь достаточно положить $f_1(w) = 3w^2 - 2w^3$ и $f_0(w) = 1 - f_1(w)$.

Аналогично если линии каркаса обладают непрерывными вторыми производными, то, добавляя ограничения на f''_0 и f''_1 типа (1.4) и беря в качестве функций f_0 и f_1 , например, полиномы пятой степени, можно построить поверхности с непрерывными производными до порядка $\bar{F}_{u^2v^2}(u, v)$, причем смешанные производные в вершинах сегмента равны нулю.

Если бы вдоль линий каркаса были заданы производные $\bar{F}^{(1j)}_u(u, v)$ и $\bar{F}^{(1j)}_v(u, v)$, то, добавляя к правой части (1.2) аналогичный агрегат из этих функций, можно получить поверхность с заданной касательной плоскостью вдоль линий каркаса.

В дальнейшем мы ещё вернемся к методу Кунза. Здесь же отметим, что его можно положить в основу автоматизированной системы обработки геометрической информации, в которой будут нестандартные блоки вычисления функций $\bar{F}^{(1)}(v)$ и $\bar{F}^{(j)}(u)$ и их производных при фиксированных функциях f_0 и f_1 . Такая система была бы достаточно универсальной, хотя её адаптация к конкретным условиям при большом разнообразии нестандартных функций не была бы простой. Поэтому на практике получили применение ее системы, где вид функций $\bar{F}^{(1)}(v)$ и $\bar{F}^{(j)}(u)$ тоже фиксирован. Классическим образцом таких систем является система, основанная на сплайн-функциях.

4. Поверхности, описываемые сплайн-функциями. Построение математического аппарата, пригодного для весьма общей системы обработки геометрической информации, достаточно просто адаптируемого для той или иной отрасли машиностроения, решается с помощью теории сплайн-функций.

Впервые задача математического описания сложных локальных кривых была поставлена и решена Шенбергом в 1946 г. В работе [2] он ввел понятие сплайн-функций, рассмотрел структуру и задачу интерполирования сплайнами. С этой работы и началось систематическое изучение сплайн-функций одной переменной. Сплайны многих переменных (в одном частном случае) появились впервые в 1952 г. в работе В.С.Рябенюкого [3] так же, как аппарат интерполирования.

В настоящее время существует обширная литература по теории сплайнов, насчитывающая десяток монографий, из которых на русский язык переведены [4, 5], и около тысячи других работ.

В приложениях наиболее широкое распространение получили сплайн-функции нечетных степеней. Сплайн-функция $S(u)$ определяется на отрезке $[a, b]$ с заданной сеткой узлов $\Delta: a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$ так, что а) $S(u)$ есть полином степени $2m-1$ на $[u_i, u_{i+1}]$ и б) $S(u)$ обладает непрерывными производными до порядка $m - \mu - 1$, где μ - дефект сплайна ($1 \leq \mu \leq m$).

Сплайн-функция двух переменных $S(u, v)$ определяется в прямоугольной области $R = [a, b] \times [c, d]$ с сеткой $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$ так, что а) $S(u, v)$ есть полином степени $2m-1$ по каждой из переменных u, v и б) $S(u, v)$ обладает непрерывными производными до порядка $(2m - \mu - 1, 2m - \mu - 1)$.

Отметим один важный предельный вариант $\mu = m$. В этом случае интерполяционный сплайн определяется путем задания во всех узлах сетки значений функции и её производных до порядка $m-1$.

По заданным условиям сплайна на каждом звене $[u_i, u_{i+1}]$ находится независимо от соседних звеньев. Подобные сплайны получили название локальных. Соответствующий аналог может быть построен и в случае двух переменных [3].

Постановка и решение интерполяционных задач в общем случае для n переменных, включая так называемые обобщенные L -сплайны, даны в работе автора [6].

Для описания геометрических образов методами сплайн-функций применяется параметрическое представление. Пространственные кривые аппроксимируются вектор-функциями

$$\bar{S}(u) = S_1(u)\bar{e}_1 + S_2(u)\bar{e}_2 + S_3(u)\bar{e}_3, \quad (1.5)$$

где $S_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, — сплайн-функции параметра u . Поверхности приближаются вектор-функциями

$$\bar{S}(u, v) = S_1(u, v)\bar{e}_1 + S_2(u, v)\bar{e}_2 + S_3(u, v)\bar{e}_3, \quad (1.6)$$

где $S_k(u, v)$, $k = 1, 2, 3$, — сплайны от параметров u, v .

5. Связь сплайновых поверхностей с поверхностями Кунза. Сущность метода Кунза состоит в построении поверхности с заданным каркасом. С этой точки зрения каркас сплайновой поверхности образуется сплайновыми кривыми. Если в формуле (1.2) положить компоненты вектор-функций $\bar{r}^{(1)}(v)$, $\bar{r}^{(2)}(u)$ сплайнами нечетной степени, а функции f_0 и f_1 полиномами той же степени, то поверхность $\bar{F}(u, v)$ будет сплайновой поверхностью [4]. При этом ее компоненты будут описываться локальными сплайнами двух переменных. В частности, из (1.2) получаются билинейные и бикубические сплайновые поверхности. Если на каркасе поверхности Кунза заданы функции производных и все исходные функции, а также f_1 и f_0 — полиномы пятой степени, то получается сплайновая поверхность дважды пятой степени.

Характерной особенностью этих поверхностей является то, что все смешанные производные в узлах сетки равны нулю в силу условий, налагаемых на f_0 и f_1 . В то же время обычная сплайновая техника этого не предполагает, и значения смешанных про-

изводных, как и других параметров сплайна, выбираются с целью обеспечения требуемой формы поверхности.

Сплайн-функции как аппарат приближения функций обладают рядом замечательных свойств, ставящих их практически вне конкуренции в численном анализе. Это, во-первых, интересные экстремальные свойства. Во-вторых, высокая степень приближения по сравнению с традиционными полиномами, что заставляет их предпочесть, в частности, в деле описания сложных поверхностей. Наконец, в-третьих — и это решающий фактор — алгоритмичность при численной реализации тех или иных задач на ЭВМ. Эти свойства сплайнов будут проиллюстрированы в дальнейшем.

§2. Применение сплайнов первой степени

Простейшие сплайны первой степени. Коэффициенты такого сплайна на сегменте $R_i = [u_i, u_{i+1}]$ ($i=0, \dots, N-1$) получаются из условий интерполяции заданных значений f_i и f_{i+1} , и

$$P_1^{(i)}(u) = f_i \frac{u_{i+1} - u}{h_i} + f_{i+1} \frac{u - u_i}{h_i}, \quad (2.1)$$

где $h_i = u_{i+1} - u_i$.

Если функция $f(u) \in C[a, b]$ задана на всем отрезке и $f(u) \in C^2[u_i, u_{i+1}]$, то оценка погрешности приближения имеет вид

$$|f(u) - S(f; u)| \leq \frac{1}{8} B_i h_i^2, \quad (2.2)$$

$$B_i = \max_{u \in R_i} |f''(u)|.$$

Эта же оценка верна и в случае приближения вектор-функции $\bar{F}(u)$, описывающей пространственную кривую параметрически. Конечно, её составляющие функции $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ должны обладать указанными выше свойствами гладкости. Наивысший порядок приближения линейными сплайнами $O(h^2)$. Можно получить оценки и для более широких классов функций (см., например, добавление к монографии [4]).

Пусть α — характерный размер аппроксимируемой кривой, ϵ — относительная погрешность аппроксимации, ϵ_d — абсолютная погрешность. Тогда, чтобы погрешность не превосходила на $[u_i,$

$u_{i+1}]$ заданной величины, должно быть

$$h_i \leq \sqrt{\frac{8\epsilon d}{B_i}} \quad (2.3)$$

Пример. Задан эллипс $x = a \cos u$, $y = b \sin u$. Формула (2.3) дает величину шага по u в первой четверти

$$\left| \frac{8\epsilon d}{a} \right|_{u=0} \leq h_i \leq \left| \frac{8\epsilon d}{b} \right|_{u=\frac{\pi}{2}}$$

Если в качестве характерного размера d взять $\sqrt{a^2 + b^2}$ и если $\epsilon \approx 0,001$ (0,1%), то $h_i \approx 0,1$.

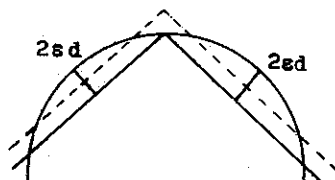


Рис.2

Приведенные оценки (2.2) и (2.3) касаются аппроксимации хордами. Между тем можно пользоваться аппроксимацией секущими. Для этого следует произвести расчеты по формуле (2.3) с допустимой относительной погрешностью 2ϵ , а затем параллельно перенести хорды на ϵd (рис. 2) [7].

Аппроксимации каркаса поверхности ломаными соответствует сплайновая поверхность с компонентами x, y, z в виде билинейных сплайнов. Четыре коэффициента каждого из них на сегменте $R_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ определяются условиями вида

$$S(u_k, v_l) = f(u_k, v_l) \quad (k=i, i+1, l=j, j+1). \quad (2.4)$$

Ошибка приближения заданной функции $f(u, v)$ билинейным сплайном на сегменте R_{ij} есть

$$|f(u, v) - S(f; u, v)| \leq \frac{1}{8} (B_{ij} h_i^2 + C_{ij} l_j^2), \quad (2.5)$$

где $h_i = u_{i+1} - u_i$, $l_j = v_{j+1} - v_j$,

$$B_{ij} = \max_{(u, v) \in R_{ij}} |f_{u^2}(u, v)|,$$

$$C_{ij} = \max_{(u, v) \in R_{ij}} |f_{v^2}(u, v)|.$$

Здесь предполагается, что частные производные существуют и непрерывны на R_{ij} . Такой будет оценка и в случае приближения вектор-функции $F(u, v)$, описывающей поверхность параметрически, если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ обладают нужными свойствами.

Выбор шагов h_i и l_j здесь неоднозначен. Должно быть

$$\frac{1}{8} (B_{ij} h_i^2 + C_{ij} l_j^2) \leq \epsilon d.$$

Этого можно достичь, например, полагая

$$h_i \leq 2 \sqrt{\frac{\epsilon d}{B_{ij}}}, \quad l_j \leq 2 \sqrt{\frac{\epsilon d}{C_{ij}}}. \quad (2.6)$$

На аппроксимации обводов судовых корпусов, т.е. шпангоутов, ватерлиний и батоксов (рис.3), ломаными была основана система обработки информации, созданная в 60-х годах в г. Горьком Ю.П. Кетковым [7]. Он рассмотрел плоские контуры и решил задачу

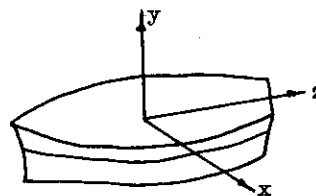


Рис. 3

о минимальном числе звеньев ломаной, обеспечивающем заданную точность приближения контура. Отсылая за подробностями к публикациям [7, 8], здесь отметим, что была разработана совершенная по тому времени система автоматизации программирования, получившая широкое применение в судостроительной промышленности для расчета судовых корпусов, где об-

воды сравнительно просты, а точность их воспроизводства невелика — порядка 0,1%.

В силу невысокой точности приближения, система, основанная на линейных сплайнах, малоприменима для проектирования сложных поверхностей, но вполне применима для обработки информации, когда

да поверхность уже задана. Собственно, для таких целей и была создана горьковская система.

Ещё один, крайне важный случай применения сплайнов первой степени — это расчет управляющей информации для обработки деталей на станках с числовым программным управлением. Об этом речь пойдет в §6.

§3. Применение кубических сплайнов

1. Виды кубических и бикубических сплайнов. Для целей проектирования изделий удобны кубические ($m=2$) и соответственно бикубические сплайны. Существует два типа таких сплайнов, а именно: а) $\mu=2$ — локальные сплайны и б) сплайны дефекта $\mu=1$.

Вопрос, какие из этих сплайнов применять в том или ином случае, решается в зависимости от вида проектируемых изделий. Сплайновые поверхности, определяемые локальными сплайнами, обладают непрерывными первыми частными производными, т.е. непрерывной касательной плоскостью, и пригодны в задачах общего машиностроения, где подобная степень гладкости достаточна.

Сплайновые поверхности, определяемые сплайнами дефекта I, обладают непрерывной касательной плоскостью и, кроме того, непрерывными производными до порядка $S_{u_2 v_2}(u, v)$, что обеспечивает непрерывность кривизн. Такая гладкость требуется от обтекаемых поверхностей летательных аппаратов, корпусов судов, гребных винтов всех назначений, лопастей рабочих колес турбин, но на практике часто и в этих случаях используют локальные сплайны, и может сложиться впечатление, что требования гидродинамики нарушены. На самом деле, здесь речь идет не о проектировании, а лишь об аппроксимации уже найденных теоретически или экспериментально поверхностей деталей и агрегатов. При этом стремятся, чтобы разрывы вторых производных, а следовательно, и кривизн были достаточно малыми, чтобы не нарушить гидродинамических свойств поверхностей.

2. Локальные кубические сплайны. Как уже отмечалось, локальные кубические сплайны на сегментах $R_i = [u_i, u_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, n-1$) определяются по значениям функции f_i, f_{i+1} и производных f'_i, f'_{i+1} :

$$s(f; u) = f_i(1-t)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) +$$

$$+ h_i f'_i t(1-t)^2 - h_i f'_{i+1} t^2(1-t), \quad (3.1)$$

где $t = \frac{u-u_i}{h_i}$. Такие сплайны, очевидно, имеют на $[a, b]$ непрерывные производные.

Оценка приближения для функции $f(u) \in C^1[a, b]$ и $f(u) \in C^4[u_i, u_{i+1}]$ на R_i есть

$$|f(u) - s(f; u)| \leq \frac{1}{384} B_i h_i^4, \quad (3.2)$$

где

$$B_i = \max_{u \in R_i} |f^{(4)}(u)|,$$

и это максимально возможный порядок. Приближение производной оценивается формулой

$$|f'(u) - s'(f; u)| \leq \frac{2}{81} B_i h_i^3. \quad (3.3)$$

При аппроксимации пространственной кривой, заданной в параметрической форме $\vec{r} = \vec{r}(u)$, погрешность в вычислениях координат оценивается по формуле (3.2). Погрешность в определении касательного вектора есть угол

$$\gamma \leq \frac{2}{81} \frac{B_i h_i^3}{\min_{u \in R_i} |\vec{r}'(u)|}, \quad (3.4)$$

причем знаменатель всегда больше нуля.

Если теперь заданы допустимые погрешности в определении координат точки ϵ_0 и углов касательных ϵ' , то шаг по u определяется неравенством

$$h_i \leq \min \left[\left(\frac{384 \epsilon_0}{B_i} \right)^{1/4}, \left(\frac{81 \min_{u \in R_i} |\vec{r}'(u)| \epsilon'}{2 B_i} \right)^{1/3} \right] \quad (3.5)$$

Пример. Рассмотрим тот же эллипс $x = a \cos u, y = b \sin u$, что и в предыдущем параграфе. Формула (3.5) даст величину шага по u в первой четверти

$$\min \left[\left(\frac{384 \varepsilon d}{a} \right)^{1/4}, \left(\frac{81 b \varepsilon^2}{2 a} \right)^{1/3} \right]_{u=0} \leq h_1 \leq \\ \leq \min \left[\left(\frac{384 \varepsilon d}{b} \right)^{1/4}, \left(\frac{81 a \varepsilon^2}{2 b} \right)^{1/3} \right]_{u=\frac{\pi}{2}}.$$

Если $\varepsilon \approx 0,0001$ (0,01%) и $\varepsilon' = 0,001$ (3'), то $h_1 \approx 0,1$, как и в случае линейных сплайнов. Но теперь этот шаг обеспечивает точность приближения на порядок выше, чем там.

Приведенные результаты на практике будут полезны, когда заданная кривая описывается гладкими кусочно-аналитическими функциями $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$ (непрерывные первые производные существуют всюду на $[a, b]$, а четвертые могут иметь конечные разрывы только в точках стыковки звеньев). Можно было бы получить оценки и в тех случаях, когда функции обладают более слабыми свойствами дифференцируемости, например, существуют кусочно-непрерывные только третьи или только вторые производные.

Часто, как это бывает при проектировании, функции нет, а имеется только эскиз с указанными размерами. В этом случае не заданы значения производных f'_i и нужно указать правило их вычисления. В качестве такого правила можно использовать разностные отношения по заданным значениям f_i :

$$f'_i = \beta_1 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \alpha_1 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \quad (i=1, \dots, N-1), \\ f'_0 = (1 + \alpha_1) \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \alpha_1 \frac{f_2 - f_1}{h_1}, \\ f'_N = -\beta_{N-1} \frac{f_{N-1} - f_{N-2}}{h_{N-2}} + (1 + \beta_N) \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}, \\ \alpha_i + \beta_i = 1.$$

Если сплайн периодический, то $f'_0 = f'_N$, и эти значения определяются по общей формуле. Выбирая различным образом α_i и β_i , можно получить разные аппроксимации. Наиболее естественная из них, которая обеспечивает хорошее приближение и функции, и ее производной, получается при $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$. Это соответствует тому, что производная f_i принимается равной производной параболы, проведенной через точки (u_{i-1}, f_{i-1}) , (u_i, f_i) и (u_{i+1}, f_{i+1}) .

При разработке алгоритмов и программ можно предусмотреть включение в кривую заданных звеньев в виде прямых, парабол и, разумеется, кубических кривых. Для этого достаточно вычислить отвечающие им точные значения f'_i .

В том случае, когда речь идет о проектировании контура, нельзя говорить о точности приближения. Но если имеется хотя бы эскиз, то постановка вопроса закономерна. При этом для применения эффективных оценок нужно, как и в предыдущих случаях, знать дифференциальные свойства заданной кривой. В противном случае можно непосредственно сравнивать графики.

3. Кубические сплайны дефекта I. Они определяются сразу на всем отрезке $[a, b]$ по значениям функции в узлах

$$S(u_i) = f_i \quad (i=0, \dots, N) \quad (3.7)$$

и граничным условиям

$$S^{(p)}(u_i) = f_i^{(p)} \quad (i=0, N), \quad (3.8a)$$

где $p = 1$ или 2 . Последние могут заменяться условиями периодичности

$$S^{(p)}(u_0) = S^{(p)}(u_N) \quad (p=1, 2). \quad (3.8b)$$

Такие сплайны обладают непрерывными производными первого и второго порядков.

Задача нахождения сплайна сводится к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей относительно коэффициентов сплайна, которую можно решать методом прогонки [9].

Теперь об оценках приближения функций при интерполяции в рассматриваемом случае. Максимальный порядок для кубических сплайнов дефекта I такой же, как для локальных сплайнов, т.е. h^4 . Он достигается для функций $f(u) \in C^2[a, b]$ и $f(u) \in C^4[u_1, u_{i+1}]$ [10], к которым, в частности, относятся уравнения контуров, получаемых при плазовых работах упругими рейками, и имеют место оценки вида (3.2) и (3.3) (или (3.4)) при $h = \max_i h_i$, $B = \max_i B_i$ с коэффициентами $\frac{7}{64}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}$ соответственно для $p = 0, 1, 2$. Если же $f(u) \in C^4[a, b]$, то значения коэффициентов будут $\frac{5}{384}, \frac{1}{24}, \frac{3}{8}$ соответственно [11]. Некоторые результаты об интерполяции функций с более слабыми дифференциальными свойствами можно найти в [4, 9].

4. Параметрические представления кривых кубическими сплайнами. При использовании параметрического представления пространственных кривых кубическими сплайнами возникают два вопроса.

Первый — это выбор параметра u . Часто в качестве последнего принимают длину ломаной, стягивающей узлы интерполяции. Такой параметр привлекает тем, что он по значению близок к геометрической характеристике — длине дуги — как заданной, так и аппроксимирующей кривых. Однако с точки зрения вычислительной проще брать параметр, для которого значения в узлах интерполяции суть числа натурального ряда [1]. Методика представления плоских кривых параметрически локальными кубическими сплайнами изложена в статье В.А.Скороспелова (см. стр.33–45 настоящего сборника). В частности, в ней рассмотрен и случай, когда параметр есть длина ломаной.

В этой же статье освещен и второй вопрос — выбор значений производных в узлах. Если никаких ограничений нет, то их можно вычислять по вышеприведенным формулам (3.7). Но при проектировании обычно в некоторых узлах задаются производные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(u)}{x'(u)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'(u)}{x'(u)},$$

и выбор $x'(u)$, $y'(u)$ и $z'(u)$ хотя и остается неоднозначным, но должен согласовываться с этими условиями. Из приведенных ре-

зультатов видно, насколько сильно может измениться форма кривой за счет этой неоднозначности.

Применение кубических сплайнов позволяет не только описать сложный контур, но и достаточно просто вычислить его геометрические характеристики, как то:

а) вектор касательной,

б) длину кривой,

в) площадь фигуры, ограниченной сплайновыми кривыми на плоскости.

Они находятся по известным формулам математического анализа, и методы их вычисления также разработаны (см., например, [12]).

Более трудная задача — нахождение общей точки касания или пересечения двух плоских контуров. Если известны звенья, на которых это происходит, $\bar{r} = \bar{S}^{(1)}(u)$ и $\bar{r} = \bar{S}^{(2)}(\bar{u})$, то задача сводится к решению системы двух алгебраических уравнений третьей степени $S_k^{(1)}(u) = S_k^{(2)}(\bar{u})$ ($k = 1, 2$), вещественный корень которой ($u_0, \bar{u}_0$) определяет искомую точку. Система упрощается, если звено одного из контуров выражается через параметр линейно. В этом случае получается одно уравнение третьей степени. Решение системы удобно находить итерационными методами. В частности, в случае пересечения (но не касания!) применим метод Ньютона. Примеры таких задач имеются в докладах данного сборника.

5. Применение кубических сплайнов в судостроении. Первыми из кубических сплайнов в инженерном деле стали применяться локальные сплайны. В работах Зейлхеймера и Старквезера [13] и Эскера [14] они использовались для описания обводов корпусов судов. В системе координат, указанной на рис.3, шпангоуты ($z = \text{const}$) проектировались в виде кубических сплайнов $y = S(x)$, а ватерлинии ($y = \text{const}$) — $x = S(z)$ и батоксы ($x = \text{const}$) — $z = S(y)$. При этом значения производных в некоторых узлах задавались, исходя из конструктивных требований, в остальных вычислялись по формулам типа (3.6). В последующем эта методика применялась и в других разработках, перечислять которые затруднительно.

Эти идеи были развиты в дальнейшем другими конструкторами, в том числе советскими. В г. Ленинграде Э. Шелковниковой [15] описание обводов создавалось на стадии проектирования судна. Использовались сплайны локальные и дефекта I, прямые и окружности. На их основе разрабатывался каркас поверхности судна, осуществлялась трассировка пазов, рассчитывались конструктивные элементы и контуры деталей корпуса судна, проводились расчеты для выполнения плазовых работ.

6. Нелинейные локальные сплайны. Здесь уместно остановиться и на схемах нелинейной сплайновой интерполяции плоских кривых, нашедших применение на практике. Главный вариант такой интерполяции заключается в том, что интерполяционная кривая, как и обычно, состоит из сегментов кубических полиномов $\eta = S(\xi)$, но каждый полином строится в своей системе координат $A_i \xi \eta$ (рис. 4). При этом углы наклона касательной в точках A_i принимаются равными углам наклона парабол, проходящих через точки A_{i-1}, A_i, A_{i+1} .

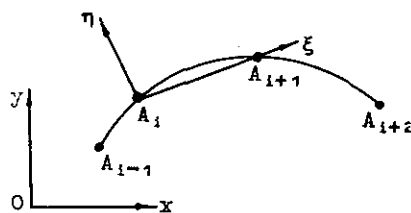


Рис. 4

Другой вариант подобной интерполяции предложен В.А. Леусом [16]. В его схеме за касательные в узлах принимаются касательные к окружностям, проходящим через те же тройки точек. Уравнение звена кривой строится в системе $A_i \xi \eta$ как сумма указанных окружностей с линейными весами, изменяющимися от 0 до 1, что обеспечивает непрерывность кривой и касательной к ней. Такая схема позволяет точно описывать часто употребляемые в инженерных кривых прямолинейные отрезки и дуги окружностей и приближенно другие контуры, для которых получены оценки погрешности. Автором этой интерполяции разработана методика построения каркаса поверхностей и решения основных геометрических задач, послужившая основой системы автоматизации плазово-шаблонных работ для авиастроения, структура которой изложена в докладе А.А. Пономаренко и Г.В. Солодовниковой.

Каркасы агрегатов летательного аппарата строятся в виде наборов плоских сечений. Так, фюзеляж самолета (рис. 5) представляется набором сечений, параллельных плоскости Oxy (шпангоутами), и наборами продольных сечений, параллельных плоскости Oxz (горизонталями) и параллельных плоскости Oyz (батоксами). Поверхности крыльев описываются поперечными сечениями

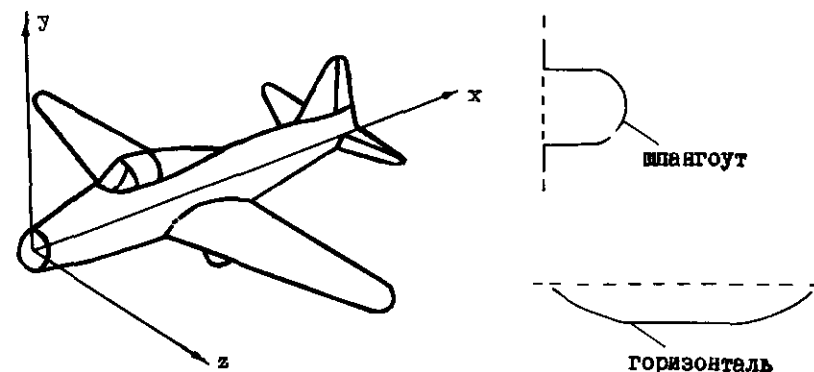


Рис. 5

(профилями) и продольными сечениями. На основе такого представления рассчитываются конструктивные элементы, т.е. сами шпангоуты, лонжероны, стрингеры, нервюры и т.п. В результате создается информационное обеспечение серийного производства в виде шаблонов, эталонов и других носителей информации.

Методика получила применение в задачах подготовки управляющей информации для изготовления деталей сложной формы на станках с числовым программным управлением. Эти вопросы отражены в докладе И.П. Пушина.

§4. Применение бикубических сплайнов

1. Локальные бикубические сплайны. Переходим теперь к проблеме применения бикубических сплайнов $S(u, v)$. Они позволяют дать описание не только каркаса, но и всей поверхности в целом. Локальные сплайны определяются на сегментах

$$R_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}] \quad (i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M)$$

по значениям функции и производных в четырех их вершинах:

$$\begin{aligned} S(f; u_i, v_j) &= f_{ij}, \\ S_u(f; u_i, v_j) &= (f_u)_{ij}, \\ S_v(f; u_i, v_j) &= (f_v)_{ij}, \\ S_{uv}(f; u_i, v_j) &= (f_{uv})_{ij}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Это дает 16 условий для определения 16 коэффициентов $a_{\lambda}^{(ij)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$).

Оценка приближения для функции $f(u, v) \in C^{(4)}[R]$ и $f(u, v) \in C^{(4)}[R_{ij}]$ имеет ту же структуру, что и в случае билинейных сплайнов:

$$|f(u, v) - S(f; u, v)| \leq \frac{1}{384} [B_{ij} h_i^4 + C_{ij} l_j^4], \quad (4.2)$$

где

$$B_{ij} = \max_{(u,v) \in R_{ij}} |f_{uu}(u, v)|,$$

$$C_{ij} = \max_{(u,v) \in R_{ij}} |f_{vv}(u, v)|.$$

но, естественно, более высокий порядок по h и l . Оценки приближения производных суть

$$|f_{u^p v^q}(u, v) - S_{u^p v^q}(f; u, v)| \leq \frac{2}{81} [B_{ij} h_i^{4-p} + C_{ij} l_j^{4-p}] \quad (4.3)$$

$$(p, q = 0, 1).$$

Оценка аппроксимации вектор-функции поверхности $\vec{F}(u, v)$ будет такой же, если $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ обладают требуемыми свойствами.

С помощью формул (4.3) можно получить оценку угла между направлениями нормалей к заданной $\vec{F}(u, v)$ и аппроксимирующей $\vec{S}(\vec{F}; u, v)$ поверхностям для сегмента R_{ij} :

$$\gamma \leq \frac{2}{81} \frac{B_{ij} h_i^3 + C_{ij} l_j^3}{\min_{(u,v) \in R_{ij}} (|\vec{F}_u|, |\vec{F}_v|) \min_{(u,v) \in R_{ij}} |\sin(\vec{F}_u, \vec{F}_v)|}. \quad (4.4)$$

Если система координат (u, v) ортогональная, то $\sin(\vec{F}_u, \vec{F}_v) = 1$.

Выбор шагов h_i и l_j , обеспечивающий заданную точность ϵ вычисления координат и ϵ' вычисления углов, неоднозначен. Для этого можно дважды применить прием, рекомендованный в §2, и с его помощью добиться, чтобы правые части (4.2) и (4.4) не превосходили ϵ и ϵ' соответственно, и затем выбрать h_i и l_j меньшими из двух пар найденных значений.

2. Бикубические сплайны дефекта I определяются в области $[a, b] \times [c, d]$ условиями

$$S(u_i, v_j) = f_{ij} \quad (i=0, \dots, N; j=0, \dots, M) \quad (4.5)$$

и граничными условиями

$$S_{u^p v^q}(f; u_i, v_j) = f_{u^p v^q}(u_i, v_j), \quad (4.6)$$

где $p=1$ или 2 , $q=0$ при $i=0, N; j=0, \dots, M$; $q=1$ или 2 , $p=0$ при $i=0, \dots, N; j=0, M$; $p, q=1$ или 2 при $i=0, N; j=0, M$. Граничные условия могут заменяться условиями периодичности по одной или обоим переменным, заключающимися в равенстве первых и вторых частных производных по u в узлах границ $u = u_0$ и $u = u_N$ и по v в узлах границ $v = v_0$ и $v = v_M$.

Решение интерполяционной задачи для бикубического сплайна сводится к многократному решению таких задач для кубических сплайнов. Для практического применения мы рекомендуем вариант, предложенный нами в [17], когда число одномерных задач равно $2N + M + 5$ (или $N + 2M + 5$) для непериодических сплайнов и на два меньше в периодическом случае.

Для бикубических сплайнов дефекта I оценки имеют вид (4.2) и (4.3) (или (4.4)), где h_i и l_j , B_{ij} и C_{ij} нужно заменить их максимальными значениями в области, а постоянные коэффициенты $\frac{1}{384}$ и $\frac{2}{81}$ - на соответствующие числа, например, $\frac{7}{64}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8}$ или $\frac{5}{384}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{3}{8}$.

3. Применение бикубических сплайнов. Нине главным направлением в применении сплайнов является направление, связанное с представлением поверхностей тройкой бикубических сплайнов. Оно позволяет описывать поверхность и рассчитывать ее геометрические характеристики, как то:

- а) вектор нормали или касательную плоскость,
- б) длины линий на поверхности, если известны зависимости $v = \varphi(u)$ на них,

- в) площади фигур на поверхности,
- г) объёмы, ограниченные сплайновыми поверхностями.

Эти задачи считаются стандартными [12].

Задача о нахождении общей линии касания или пересечения поверхностей, принадлежащей звеньям $\tilde{F} = \tilde{S}^{(i,j)}(u,v)$ и $\tilde{F} = \tilde{S}^{(i,j)}(\tilde{u},\tilde{v})$, сводится к решению системы трех уравнений

$$S_k^{(i,j)}(u,v) = \tilde{S}_k^{(i,j)}(\tilde{u},\tilde{v}) \quad (k = 1,2,3).$$

Она определяет три параметра из $u, v, \tilde{u}, \tilde{v}$ через четвертый. Вещественное решение даст звено искомой линии. Если одна из поверхностей (точнее, ее звено) линейно зависит от своих параметров, то система сводится к одному уравнению третьей степени относительно каждого из параметров другой пары. Решение системы удобно искать численными методами. В частности, в случае пересечения двух поверхностей применим метод Ньютона.

Первым последовательным применением бикубических сплайнов была система Гамильтона и Вейса [18], разработанная в Массачусетском технологическом институте (США) для целей проектирования корпусов судов. Каркас поверхности строился из кубических сплайновых кривых, а затем использовался алгоритм Кунза. В результате получалась сплайновая поверхность, каждая компонента которой $S_k(u,v)$ ($k = 1,2,3$) являлась локальным бикубическим сплайном с равными нулю смешанными производными в вершинах сегментов. Описание поверхности применялось для вычисления геометрических и технических характеристик корпуса судна (моменты инерции, водоизмещение и т.п.). В качестве операционной системы использовалась диалоговая система SKETCHPAD-III.

В 60-х годах в Норвегии тоже для судостроения была создана система проектирования AUTOCON-71 [19]. Ее авторы, Мелум

и Сørenсен, в качестве аппарата описания использовали бикубические сплайны обоих типов. Алгоритмы записывались на языке ФОРТРАН, управление осуществлялось с помощью операционной системы.

Большое место вопросы проектирования сложных поверхностей заняли на Второй Международной конференции по языкам программирования для станков с числовым программным управлением (PROLAMAT - 73) [20]. Общие вопросы рассматривались в докладах Безье (Франция), Николо и Пиккини (Италия), Умидо (Япония). В докладе Ландмарка рассказывалось о структуре системы AUTOCON-71, а в докладе Мелума, Мэлгуса и Лунгтрена - о ее модернизациях для автомобилестроения и космической техники.

Широкие возможности сплайновой техники были раскрыты в докладе Флаттера (Англия), разработавшем на их основе систему для проектирования колодок обуви.

В этом сборнике читатель найдет описание системы проектирования применительно к геометрически сложным объектам как лопасти рабочих колес гидротурбин. Система создана группой сотрудников (В.А.Скороспеловым и др.) Института математики СО АН СССР. Наибольшую трудность в подобных деталях и агрегатах представляет разработка караса поверхности, удобного для всех последующих расчетов. В данном случае авторам системы с этим удалось справиться.

§5. 0 сглаживания кривых и поверхностей

В предыдущих параграфах мы дали обзор методов описания кривых и поверхностей на основе интерполяции. При проектировании часто более естественной является задача интерполирования с одновременным сглаживанием исходной информации. Разрабатывая обводы изделий, стремятся достичь не просто непрерывности касательного вектора или касательной плоскости, т.е. первых производных, но и уменьшить градиенты - вторые производные. Когда же проектируются аэро-, гидродинамические обводы, то соответственно добиваются непрерывности вторых и уменьшения третьих производных.

Для этих целей можно применять разнообразные, более или менее сложные способы. Простейшие из них - это анализ и корректировка контура (заданного таблицей) по разделенным разностям,

которые отражают поведение производных. Для кривых с непрерывной касательной контролируются первые разделенные разности или их линейные комбинации (3,6). Кроме того, внутри звеньев кривой можно контролировать вторые разделенные разности, их изменение на соседних звеньях характеризует разрыв вторых производных в точках стыковки. Для кривых с непрерывной касательной и кривизной вначале контролируются первые и вторые разделенные разности, а в заключение и поведение третьих. Эта методика применялась для сглаживания обводов судов в работе [15].

Здесь мы подробнее остановимся на одной экстремальной задаче, поставленной Шенбергом [21]. Это задача интерполирования со сглаживанием исходных данных сплайнами.

Еще на первом этапе изучения сплайнов было установлено [4], что, например, кубический сплайн, и только он, минимизирует функционал

$$I[f] = \int_a^b [f''(u)]^2 du \quad (5.1)$$

на множестве функций $w_2(a,b)$ с абсолютно непрерывной первой и суммируемой с квадратом второй производными при условиях, что заданы $\phi_i = f(u_i)$ ($i = 0, \dots, N$). Локальные сплайны получаются, если, кроме того, заданы $\phi'_i = f'(u_i)$ ($i = 0, \dots, N$). В противном случае получаются сплайны дефекта I, для которых можно либо зафиксировать граничные условия $\phi'_i = f'(u_i)$ или $f''(u_i) = 0$ ($i = 0, N$), либо наложить условия периодичности [4-6].

Если же значения ϕ_i ($i=0, \dots, N$) не фиксировать, то на тех же множествах функций сплайн дефекта I дает минимум функционалу [22].

$$I_1[f] = I[f] + \sum_{i=0}^N p_i [f(u_i) - \phi_i]^2 \quad (p_i > 0). \quad (5.2)$$

Эта задача представляет собой как бы компромисс между построением идеально гладкой функции $f''(u)=0$ при $p_i=0$ и интерполяционной функции $f(u_i)=\phi_i$ ($i=0, \dots, N$) при $p_i \rightarrow \infty$.

Существенное значение здесь имеет выбор параметров p_i . При обработке экспериментальных данных они должны учитывать закон

распределения ошибок. При проектировании машиностроительных конструкций параметры отражают требования к характеру поведения кривой, например, ограниченность третьих производных сплайна или их разрыва в узлах. В докладе А.М. Тузова параметры выбираются из условий ограниченности отклонений координат в узлах. Отметим, что чем точнее задана информация в узле, тем больше должно быть соответствующее значение параметра, и наоборот.

Задача сводится к системе уравнений с пятидиагональной матрицей размерности $N+1$ для определения первых или вторых производных сплайна, которую при больших p_i (слабое сглаживание) можно решать методом прогонки [22].

При сглаживании локальным сплайном минимизируется функционал [23]

$$I_2[f] = I[f] + \sum_{i=0}^N p_i [f(u_i) - \phi_i]^2 + \sum_{i=0}^N p'_i [f'(u_i) - \phi'_i]^2 \quad (5.3)$$

$$(p_i, p'_i > 0).$$

т.е. сглаживаются заданные значения и функции, и производных.

В [23] выведены условия для сплайна, решающего эту задачу:

$$\begin{aligned} p_i S(u_i) + [S'''(u_i+) - S'''(u_i-)] &= p_i \phi_i, \\ p'_i S'(u_i) - [S''(u_i+) - S''(u_i-)] &= p'_i \phi'_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$(i = 0, \dots, N),$$

где в квадратных скобках стоят разрывы производных в узлах u_i ; $S''(u_0-) = S''(u_N+) = 0$, $S'''(u_0-) = S'''(u_N+) = 0$. Первые условия (5.4) такие же, как в задаче (5.2), а вторые новые. Подстановка условий гладкости сплайна в (5.4) дает систему для определения значений сплайна и его первых производных в узлах u_i с четырехклеточной матрицей размерностью $2(N+1)$. При больших p_i, p'_i ее решение можно строить итерационными методами. Однако практические примеры на этот счет нам неизвестны.

При применении рассматриваемого метода сглаживания к кривым, представляемым кубическими сплайнами параметрически, возникают серьезные трудности. Дело в том, что в данном случае сглаживание применяется не к кривой, а к описывающим ее функ-

циям $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$. Но их поведение (гладкость) зависит от способа параметризации. При неудачном выборе параметра эти функции могут оказаться "негладкими" даже для "гладкой" кривой. Поэтому здесь снова возникает потребность связать параметризацию с характеристиками кривой. Например, при слабом сглаживании, когда модуль уклонения сглаженных точек от заданных на порядок меньше расстояния между ними, можно в качестве параметра брать длину хорд между узлами. После этого следует подвергнуть сглаживанию каждую из функций $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$. По-видимому, вследствие указанных трудностей конкретных примеров такого рода в литературе нет.

Как отмечалось в §4, задача интерполирования бикубическими сплайнами $S(u, v)$ сводится к последовательному решению большого числа одномерных задач. До недавнего времени подобный результат для сглаживания не был известен. В работе [23] найдено такое обобщение задач (5.2) и (5.3), для которого процесс сглаживания расщепляется на последовательное сглаживание кубическими сплайнами при $v = v_j$ ($j = 0, \dots, M$), а затем сглаживание полученных значений при $u = u_i$ ($i = 0, \dots, N$). Доказано, что окончательный результат не зависит от того, по какому направлению сглаживание проводилось на первом шаге и по какому на втором. Правда, доказательство проведено только для случая $p_i = p'_i = \text{const}$ для переменной u и $q_j = q'_j = \text{const}$ для переменной v .

При сглаживании поверхностей, описываемых бикубическими сплайнами параметрически, остается та же трудность с параметризацией, что и при сглаживании кривых. В этом направлении требуются дополнительные исследования.

§6. 0 подготовке геометрической информации для воспроизводящих устройств

1. В ы ч е р ч и в а н и е п л о с к и х к р и в ы х на графопостроителях и дисплеях. Плоская кривая восстанавливается на шаговых графопостроителях и дисплеях в виде ломаной линии. Если кривая задана уравнениями $x = x(u)$, $y = y(u)$, то шаг $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ по параметру определяется формулой (2.3). Для ее применения нужно вычислять величину

$$B_k = \max_{u \in [u_k, u_{k+1}]} |\ddot{r}''(u)| \text{ на каждом } k\text{-м шаге. Эта задача}$$

становится простой, если кривая описывается кубическими сплайнами с сеткой узлов u_i ($i = 0, \dots, N$). В этом случае $x''(u)$ и $y''(u)$ на каждом промежутке $[u_i, u_{i+1}]$ суть линейные функции, и вычисление B_k на более густой сетке узлов u_k ($k = 0, 1, \dots$) не представляет труда. Вычислительную работу можно ещё уменьшить, если величину B_k заменить на $B_i = \max_{u \in R_i} |\ddot{r}''(u)| \geq B_k$.

Определенный по B_i шаг Δu_k будет пригоден на всем промежутке $[u_i, u_{i+1}]$, и последний разбивается на равные части, число которых $v_i = \lceil [B_i / \Delta u_k] \rceil$, где $\lceil \cdot \rceil$ означает округление до большего целого.

Напомним также, что шаг можно увеличить, если воспользоваться схемой аппроксимации, изображенной на рис. 2.

2. О б р а б о т к а ц и л и н д р и ч е с к и х д е т а л е й на станках с числовым программным управлением. Для изготовления деталей нужно уметь вычислять на гладких частях поверхности координаты точек и нормалей в них, чтобы рассчитывать координатные и угловые установки режущего инструмента станка. Это, во-первых. Во-вторых, нужно определить способ обработки, обеспечивающий заданную точность воспроизводства деталей. В управляющей программе записывается последовательность кадров, содержащих геометрическую и технологическую информацию. Переход от одного кадра к другому осуществляется во времени по линейному закону.

Для цилиндрической детали известно уравнение ее направляющей, и потому расчет геометрической информации для кадра не представляет принципиальных трудностей. Второй вопрос — частота кадров — зависит от способа обработки.

Первый способ, обычно употребляемый при контурной обработке деталей, — это проход вдоль направляющей боковой поверхностью цилиндрической фрезы радиуса ρ (рис. 6).

Для этого задаются положения центра фрезы O_k и O_{k+1} на эквидистантной кривой контура. Так как фреза перемещается по линейному закону, то, как видно из рисунка, по сравнению с вычерчиванием кривых на графопостроителях погрешность изменяет-

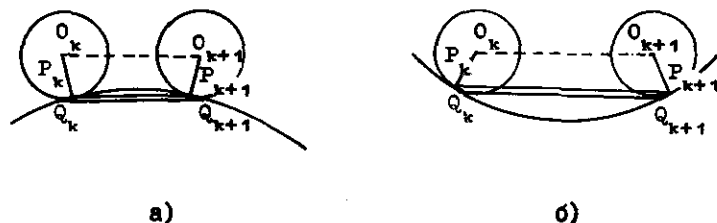


Рис. 6

ся за счет конечности радиуса фрезы. След фрезы будет не $P_k P_{k+1}$, а $Q_k Q_{k+1}$. На выпуклых частях контура погрешность возрастает, а на вогнутых уменьшается (ρ должно быть меньше радиуса кривизны). Однако изменение погрешности в первом приближении не превосходит $\delta = \rho (\Delta\beta_k)^2 / 2$, где $\Delta\beta_k$ — угол между нормальными в двух позициях. (Этот угол не должен превышать допустимой погрешности в воспроизведении угла касательной к контуру, что для кривых, не имеющих больших скачков кривизны, обычно выполняется.) Если величина δ мала по сравнению с допустимой погрешностью в координатах ϵ_d , то выбор шага Δu_k производится так, как описано в предыдущем пункте. Для $\epsilon_d \sim 0,1$ мм и $\rho \sim 10$ мм возможное приращение $\Delta\beta_k \sim 0,05$ (3°).

Другой способ — обработка цилиндрической поверхности торцом фрезы. Если фреза перемещается по образующей, то обработан-

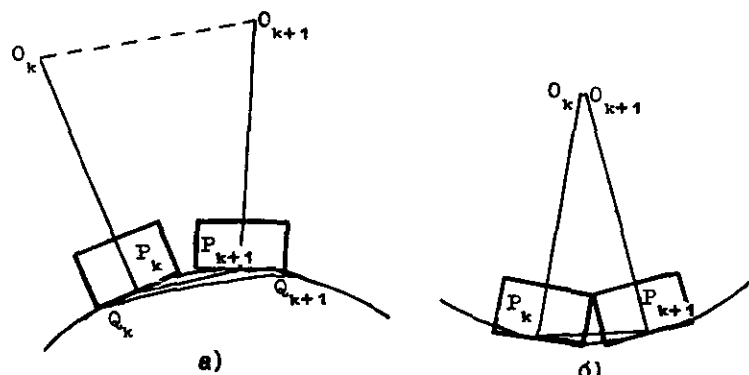


Рис. 7

ная поверхность будет многогранником. Выбор шага совершенно аналогичен предыдущему.

Пусть теперь фреза перемещается вдоль направляющей (рис. 7). В этом случае обвод детали на участке $Q_k Q_{k+1}$ принимает форму траекторий краев фрезы. Форма зависит от радиуса фрезы ρ и от расстояния s центра вращения фрезы от поверхности. Если $s \gg \rho$, то погрешность изменяется на величину $\delta = s \Delta\beta_k^2 / 2$. Ее снова можно пренебречь, если $\delta \ll \epsilon_d$. При $\epsilon_d \sim 0,1$ мм, $s \sim 100$ мм допустимо $\Delta\beta_k \sim 0,05$ (3°).

От описанного способа не отличаются существенным образом подготовка геометрической информации и расчет шагов при обработке тел вращения на токарных станках.

3. Обработка деталей общего вида на многокоординатных станках. В общем случае фреза относительно детали может перемещаться в трех направлениях, а ее ось вращаться около точки подвеса в двух плоскостях. В таких условиях подготовка геометрической информации значительно усложняется.

Для случая, когда поверхность задана своим каркасом, разработаны способы и приемы доопределения поверхности и расчета ее координат и угловых характеристик. В докладах В.А. Леуса, Ф.А. Калсановой и И.П. Пушина рассмотрены различные аспекты подготовки управляющей информации и приведены конкретные примеры обработки сложных деталей на многокоординатном оборудовании.

Поэтому здесь мы ограничиваемся изложением некоторых соображений о подготовке геометрической информации, когда поверхность задана параметрически вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Как и при контурной обработке, расчет координат и угловых установок станка не представляет принципиальных трудностей.

Обработку удобно производить, перемещая фрезу последовательно вдоль одного из семейств, например, v -линий с постоянным шагом Δu_k по параметру u (рис. 8а) либо по спиралеобразной линии с чередованием проходов вдоль v -линий и u -линий (рис. 8б). Первый способ употребляется чаще, второй — обычно при фрезировании частей поверхности типа "колодцев". При этом, будет ли деталь обрабатываться боковой поверхностью фрезы (в общем случае конической) или торцом, ее поверхность при изменении установок станка по линейному закону будет в первом приближении (с точностью до малых порядка $\Delta\beta_{\text{нм}}^2$) кусочно-

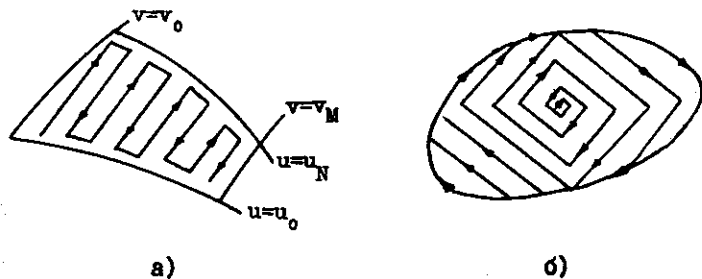


Рис. 8

линейчатой. Каждое ее звено $R_{nn} = [u_n, u_{n+1}] \times [v_n, v_{n+1}]$ описывается тройкой билинейных функций.

Ограничения на шаги Δu и Δv задаются формулами (2.6). Для их применения нужно вычислять величины

$$B_{nn} = \max_{(u,v) \in R_{nn}} |\bar{F}_{u^2}(u,v)|, \quad C_{nn} = \max_{(u,v) \in R_{nn}} |\bar{F}_{v^2}(u,v)|.$$

Как и при контурной обработке, эта задача упрощается, если поверхность является кубической сплайновой поверхностью с сеткой узлов (u_i, v_j) ($i = 0, \dots, N$; $j = 0, \dots, M$). Вычислительную работу снова можно уменьшить, если ограничения на шаги определять сразу для сегмента поверхности R_{ij} и делить его на v_{ij} равных шагов по u и λ_{ij} шагов по v .

Таким способом можно осуществить обработку первого сегмента в схеме на рис.8,б. При проходе же координатных траекторий, например, v -линий, пересекающих два и более сегментов, шаг по u удобно брать постоянным на этих сегментах, равным наименьшему. В случае, если функция $\bar{F}(u,v)$ линейно зависит от v (линейчатая поверхность), то проход по v -линиям можно, очевидно, выполнять за один шаг. При этом шаг Δu можно увеличить, не выходя за пределы допустимой погрешности, до $\sqrt{2} \Delta u_n$.

Этих указаний достаточно для подготовки информации при обработке частей поверхности, ограниченных координатными линиями, а в случае внешних ребер и другими кривыми. При проходе же внутренних ребер, например дна колодца с произвольным конту-

ром (рис.8,б), с некоторого момента нужно учитывать границу, рассчитывая фрезерование ее участков как при контурной обработке.

Л и т е р а т у р а

1. COONS S. Surfaces for computer-aided design of space form. Massachusetts Institute of Techn. Report MAC-TR-41, 1967.

2. SCHOENBERG I. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. - "Quart. Appl. Math.", 1946, v.4, pt. A, N1, p.45-99; pt. B, N 2, p.112-141.

3. РЯБЕНЬКИЙ В.С. Об устойчивости конечноразностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для системы уравнений с частными производными. Автореф. дисс. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М., 1952.

4. АЛБЕРТ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

5. ЛОРАН Е.-П. Аппроксимация и оптимизация. М., "Мир", 1975.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование L -сплайн-функциями многих переменных. - "Мат. заметки", 1973, т. 14, № 1, с.11-20.

7. КЕТКОВ Ю.Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации. - "Изв. вузов. Радиофизика", 1966, т. IX, № 6, с. 1202-1209.

8. КЕТКОВ Ю.Л. Об оптимальных методах нелинейной аппроксимации плоских кривых и система автоматизации программирования для обработки геометрической информации. Автореф. дисс. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Горький, 1966.

9. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвеньниками (сплайнами). - В кн.: Вычислительные системы. Вып.38. Новосибирск, 1970, с. 23-73.

10. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполировании кубическими сплайнами. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.56. Новосибирск, 1973, с. 18-22.

11. HALL C.A., MEYER W.W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation. - "J. Approx. Theory", 1976, v.16, N 2, p. 105-121.

12. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., "Наука", 1973.

13. THEILMEYER F., STARKWEATHER W. The fairing of ship lines on high speed computer. - "Numerical Tables Aids Computation", 1961, v.15, p.338-355.

14. ASKER B. The spline curve a smooth interpolating function used in numerical design of ship-lines. - "Nord. Tidskr. Inform. Behandling" 1962, Bd 2, N 2, p.76-82.

15. ШЕЛКОВНИКОВА Э. Исследование и разработка математических методов согласования обводов и определение контуров деталей корпуса судна. Автореф. дисс. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Ленинград, 1966.

16. ЛЕУС В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 102-127.

17. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами). - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 74-101.

18. HAMILTON M., WEIS A. An approach to computer-aided preliminary ship design. Massachusetts Institute of Technology, Report, 1965.

19. MEHLUM E., SRENGSEN P. Example of an existing system in the ship-building industry. The Autokon system. - "Proc. Royal Society", 1971, v. A 321, p. 219-233.

20. The Second International Conference on Programming Languages for Numerical Controlled Machine Tools ("Prolamat-73"), Budapest, April 10-13, 1973. Ed. Hatvany. Nord-Holland Publish. Comp., Amsterdam, 1973.

21. SCHOENBERG I. Spline functions and the problem of graduation. - "Proc. Nation. Acad. Sci. U.S.", 1964, v. 52, N 2, 947-950.

22. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников (сплайнов) и задача сглаживания. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42. Новосибирск, 1970, с. 89-108.

23. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ИМАМОВ А. Алгоритм с расщеплением решения задачи сглаживания сплайн-функциями многих переменных. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, Новосибирск, 1976.

Поступила в ред.-изд. отд.

10 ноября 1976 года