М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1976 год   Выпуск 68

УДК 518.12

К ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ КУБИЧЕСКИМИ И БИКУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

В.П. Роменский

Задача интерполирования кубическими и бикубическими сплайн-функциями изучена достаточно хорошо. Наиболее полные результаты содержатся в монографии [1] и работах [2,3].

В этой статье изложены алгоритмы построения для функций одной и двух действительных переменных интерполяционных кубических и бикубических сплайнов на основе представления сплайна через базисные функции с конечными носителями.

§ 1. Интерполирование кубическими сплайн-функциями

Пусть для $-\infty < \bar{a} < a < b < \bar{b} < +\infty$ и натурального числа N через Δ и $\bar{\Delta}$:

$$\begin{aligned} &\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \\ &\bar{\Delta}: \ \bar{a} = x_{-3} < x_{-2} < \ldots < x_{N+3} = \bar{b}, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

обозначены разбиения интервалов $[a,b]$ и $[\bar{a},\bar{b}]$ соответственно с узлами x_i. Так же, как в [2], будем считать, что в узлах сетки Δ заданы значения функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$, и требуется построить на сетке Δ кубический сплайн $S(x)$ с точками раздела в заданных узлах, интерполирующий функцию $y=f(x)$, т.е.

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\ldots,N). \qquad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Финитным кубическим сплайном назовем функцию $\sigma_i(x)$, $i = -1,0,1,\ldots,N+1$, обладающую свойствами:

$$\left.\begin{aligned}&\text{а) } \sigma_i(x) - \text{кубический сплайн класса } C^2[\bar{a},\bar{b}],\\&\text{б) } \sigma_i(x) \equiv 0 - \text{вне } [x_{i-2}, x_{i+2}],\\&\text{в) } \sigma_i(x_i) = 1,\ \sigma_i^{(p)}(x_{i\pm 2}) = 0,\ p = 0,1,2.\end{aligned}\right\} \qquad (I.3)$$

Интерполирующий кубический сплайн на сетке Δ будем искать в виде

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \tilde{u}_i \sigma_i(x) \qquad (I.4)$$

при линейных краевых условиях одного из следующих типов:

I. $S'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0,N,$ (I.5)

II. $S''(x_k) = f''(x_k), \quad k = 0,N.$ (I.6)

III. Если $f(x)$ - периодическая функция периода $(b-a)$, то

$$S^{(p)}(x_0) = S^{(p)}(x_N), \quad p = 1,2. \qquad (I.7)$$

Найдем явные выражения для финитных сплайнов $\sigma_i(x)$, $i=-1,0,\ldots, N+1$, отвечающих сетке Δ. Пусть $M_j^i = \sigma_i''(x_j)$, $i=-1, 0,\ldots,N+1$; $j = i-1,i,i+1$, - "моменты" сплайна $\sigma_i(x)$, а $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=-2,-1,\ldots N+3$, - шаг сетки. Используя определение (I.3), после довольно громоздких вычислений получаем

$$\left.\begin{aligned}M_{i-1}^i &= \frac{6}{\theta_i}\cdot\frac{1}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})},\\M_i^i &= -\frac{6}{\theta_i}\cdot\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\cdot\left(\frac{1}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}+\frac{1}{h_i+h_{i+1}+h_{i+2}}\right),\\M_{i+1}^i &= \frac{6}{\theta_i}\cdot\frac{1}{(h_{i+1}+h_{i+2})(h_i+h_{i+1}+h_{i+2})},\end{aligned}\right\} \qquad (I.8)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\theta_i &= 1 - \theta_{i-1}^i - \theta_{i+1}^i,\\\theta_{i-1}^i &= \frac{h_{i+1}^2}{(h_i+h_{i+1})(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})},\\\theta_{i+1}^i &= \frac{h_i^2}{(h_i+h_{i+1})(h_i+h_{i+1}+h_{i+2})}.\end{aligned}\right\} \qquad (I.9)$$

Кроме того,

$$\sigma_i(x_{i-1}) = \frac{1}{6}M_{i-1}^i h_{i-1}^2, \quad \sigma_i(x_{i+1}) = \frac{1}{6}M_{i+1}^i h_{i+2}^2. \qquad (I.10)$$

Учитывая формулу для кубического сплайна [I], имеем

$$\sigma_i(x)=\begin{cases}0, x\notin [x_{i-2}\ x_{i+2}],\\\sigma_i(x_{i-1})t^3, x\in[x_{i-2}, x_{i-1}],\\\sigma_i(x_j)t+\sigma_i(x_{j-1})(1-t)-\frac{1}{6}h_j^2 t(1-t)[(2-t)M_{j-1}^i+(1+t)M_j^i],\\\qquad x\in[x_{j-1}, x_j], \quad j = i, i+1,\\\sigma_i(x_{i+1})(1-t)^3, x\in[x_{i+1}\ x_{i+2}],\end{cases} \qquad (I.11)$$

где

$$t = \frac{x - x_j}{h_{j+1}}, \quad x\in[x_j, x_{j+1}]. \qquad (I.12)$$

При решении задачи интерполирования воспользуемся следующими, легко проверяемыми свойствами построенных финитных сплайнов:

Свойство I. Финитные сплайны $\sigma_i(x)$, $i=-1,0,\ldots,N+1$, линейно-независимы и образуют базис в пространстве всех кубических сплайнов на сетке Δ.

Свойство 2. $M_{i-1}^i > 0$, $M_i^i < 0$, $M_{i+1}^i > 0$.

Продолжим рассмотрение задачи интерполирования кубическими сплайн-функциями. Для ее полного решения, как легко видеть из (I.4), достаточно найти коэффициенты $\tilde{u}_i$ $(i = -1,0,1,\ldots,N+1)$. Рассмотрим сначала краевые условия (I.5) и (I.6). Для того, чтобы задача замыкалась с помощью однородных граничных условий, что полезно, например при формировании вычислительного алгоритма [4], так как краевые условия при этом автоматически учитываются в модифицированных уравнениях, преобразуем (I.4) к виду

$$S(x) = S_0(x) + \frac{y_0^{(p)}}{\sigma_{-1}^{(p)}(x_0)}\sigma_{-1}(x) + \frac{y_N^{(p)}}{\sigma_{N+1}^{(p)}(x_N)}\sigma_{N+1}(x), \qquad (I.13)$$

где

$$S_0(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} u_i \, \sigma_i(x) \tag{I.14}$$

– кубический сплайн, интерполирующий набор данных

$$q_i = \begin{cases} y_0 - \dfrac{y_0^{(p)}}{\sigma_{-1}^{(p)}(x_0)} \sigma_{-1}(x_0), i=0; \\ y_i, i = 1,2,\ldots, N-1; \\ y_N - \dfrac{y_N^{(p)}}{\sigma_{N+1}^{(p)}(x_N)} \sigma_{N+1}(x_N), i=N, \end{cases} \tag{I.15}$$

при нулевых краевых условиях типа I ($p = 1$) и типа II ($p = 2$).

Выведем систему уравнений для определения коэффициентов u_i сплайна $S_0(x)$. Используя (I.14) и условие $S^{(p)}(x_k)=0$, $k=0,N$, имеем

$$u_{-1} = -\frac{1}{\sigma_{-1}^{(p)}(x_0)}[\sigma_0^{(p)}(x_0)u_0 + \sigma_1^{(p)}(x_0)u_1],$$

$$\sigma_{i-1}(x_i)u_{i-1} + u_i + \sigma_{i+1}(x_i)u_{i+1} = q_i, i = 0,1,\ldots,N, \tag{I.16}$$

$$u_{N+1} = -\frac{1}{\sigma_{N+1}^{(p)}(x_N)}[\sigma_N^{(p)}(x_N)u_N + \sigma_{N-1}^{(p)}(x_N)u_{N-1}].$$

Приведенная методика применима и в случае общих линейных краевых условий, когда, например, задаются линейные комбинации значений $f^{(p)}(x)$ ($p= 0,1,2$) на продолжениях концевых дуг в точках $\xi_0 \in [x_{-1}, x_0]$, $\xi_N \in [x_N, x_{N+1}]$.

В периодическом случае приходим к условиям $u_i = u_{N+i}$ ($i = 0, \pm 1$) и представлению сплайна в виде

$$S(x) = \sum_{i=2}^{N-2} u_i\sigma_i(x)+u_0[\sigma_0(x)+\sigma_N(x)]+u_1[\sigma_1(x)+\sigma_{N+1}(x)]+ \\ +u_{N-1}[\sigma_{N-1}(x) + \sigma_{-1}(x)], \tag{I.17}$$

где u_i определяются из системы:

$$u_0 + \sigma_1(x_0)u_1 + \sigma_{N-1}(x_N)u_{N-1} = y_0,$$

$$\sigma_{i-1}(x_i)u_{i-1} + u_i + \sigma_{i+1}(x_i)u_{i+1} = y_i, \quad i=1,2,\ldots,N-2, \tag{I.18}$$

$$\sigma_N(x_{N-1})u_0 + \sigma_{N-2}(x_{N-1})u_{N-2} + u_{N-1} = y_{N-1}.$$

Таким образом, решение задачи интерполирования сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (I.16), в частности (I.18), с ленточной матрицей специальной структуры. Для решения таких систем удобно применять метод прогонки.

Отметим, что матрица системы (I.16) или (I.18) в общем случае не обладает свойством диагонального преобладания, однако оно имеет место для сетки Δ такой, что

$$\max_{|i-j|=1} \frac{h_i}{h_j} \le \rho \approx 2{,}439,$$

где ρ – корень уравнения

$$6 + 7\rho + \rho^2 - 2\rho^3 = 0$$

при любом типе краевых условий (I–III).

Доказательство этого следует из свойств финитных сплайнов и формул (I.8)–(I.II).

Проведенное исследование показывает нецелесообразность применения указанного метода интерполирования в случае сильно неравномерной сетки Δ, так как в этом случае нельзя гарантировать устойчивость метода прогонки. Таким образом, целесообразно применять финитные сплайны только для сеток, близких к равномерным; в частности, для равномерной сетки с шагом h в формулах (I.8)–(I.18) следует положить

$$\sigma_i(x_i) = 1, \quad \sigma_i(x_{i\pm 1}) = \frac{1}{4},$$

$$\sigma_i'(x_i) = 0, \quad \sigma_i'(x_{i\pm 1}) = \mp\frac{3}{4h}, \tag{I.19}$$

$$\sigma_i''(x_i) = -\frac{3}{h^2}, \quad \sigma_i''(x_{i\pm 1}) = \frac{3}{2h^2}.$$

Отметим также, что на равномерной сетке Δ финитный сплайн (I.II) с точностью до постоянного множителя совпадает с кубическим B-сплайном Шёнберга [5].

§ 2. Интерполирование бикубическими сплайнами в прямоугольной области

Пусть для $-\infty < \bar{a} < a < b < \bar{b} < +\infty$; $-\infty < \bar{c} < c < d < \bar{d} < +\infty$ и натуральных чисел N и M через Δ_x, $\bar{\Delta}_x$, Δ_y, $\bar{\Delta}_y$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_x &: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \\
\bar{\Delta}_x &: \bar{a} = x_{-3} < x_{-2} < \ldots < x_{N+3} = \bar{b}, \\
\Delta_y &: c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d, \\
\bar{\Delta}_y &: \bar{c} = y_{-3} < y_{-2} < \ldots < y_{M+3} = \bar{d},
\end{aligned}
\qquad (2.I)
$$

обозначены разбиения интервалов $[a,b]$, $[\bar{a},\bar{b}]$, $[c,d]$, $[\bar{c},\bar{d}]$ соответственно. Будем считать, что в области R: $[a \le x \le b;\ c \le y \le d]$, в узлах P_{ij} $(i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M)$ сетки $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ заданы значения функции $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. Так же, как в работе [3], требуется построить бикубический сплайн на сетке Δ, интерполирующий $z = f(x,y)$, т.е.

$$S(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M), \qquad (2.2)$$

и удовлетворяющий на границе области R одному из следующих типов условий, задаваемых в точках P_{ij} с координатами x_i, y_j:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^p S}{\partial x^p} = \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \quad \text{при} \quad i = 0, N;\ j = 0,1,\ldots,M; \\
&\frac{\partial^p S}{\partial y^p} = \frac{\partial^p f}{\partial y^p} \quad \text{при} \quad i = 0,1,\ldots,N;\ j = 0, M; \qquad (2.3) \\
&\frac{\partial^{2p} S}{\partial x^p \partial y^p} = \frac{\partial^{2p} f}{\partial x^p \partial y^p} \quad \text{при } i=0,N;\ j=0,M;\ p=1,2.
\end{aligned}
$$

Здесь $p=1$ отвечает типу I, а $p=2$ – типу II граничных условий.

При решении задачи интерполирования нам потребуется

Свойство 3. Бикубические финитные сплайны $\sigma_{ij}(x,y) = \sigma_i(x)\sigma_j(y)$, $i = -1,0,1,\ldots,N+1$; $j = -1,0,1,\ldots,M+1$, для заданных N и M образуют базис в пространстве всех бикубических сплайнов, заданных на сетке $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$.

Это свойство можно проверить непосредственно, пользуясь определением линейной независимости, либо организовав тензорное произведение соответствующих пространств кубических сплайнов.

Используя свойство 3, решение задачи интерполирования при краевых условиях типа I или II будем искать в виде

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_{ij}\sigma_i(x)\sigma_j(y). \qquad (2.4)$$

Для того чтобы задача замыкалась с помощью однородных граничных условий, преобразуем (2.4) к виду

$$
\left.
\begin{aligned}
&S(x,y) = S_0(x,y) + S_\Gamma(x,y), \\
&S_\Gamma(x,y) = \sum_n \phi_n(y) \frac{\sigma_n(x)}{\sigma_n^{(p)}(\bar{x}_n)} + \sum_m \varphi_m(x) \frac{\sigma_m(y)}{\sigma_m^{(p)}(y_M)} - \\
&\qquad - \sum_{n,m} \frac{\partial^{2p} f(\bar{x}_n\ y_m)}{\partial x^p \partial y^p} \cdot \frac{\sigma_n(x)\sigma_m(y)}{\sigma_n^{(p)}(\bar{x}_n)\sigma_m^{(p)}(\bar{y}_m)}, \\
&\qquad n = -1, N+1;\ m = -1, M+1, \\
&S_0(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} u_{ij}\sigma_i(x)\sigma_j(y),
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.5)
$$

где $\phi_{-1}(y)$, $\phi_{N+1}(y)$, $\varphi_{-1}(x)$, $\varphi_{M+1}(x)$ – кубические сплайн-функции, интерполирующие наборы $f_{x^p}(x_n, y_j)$, $f_{y^p}(x_i, y_m)$ $(i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots M;\ n = 1,N;\ m = 1,M)$ при нулевых краевых условиях типа I $(p = 1)$ и типа II $(p = 2)$.

Бикубическая сплайн-функция $S_\Gamma(x,y)$, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (2.3), отличается от нуля только на слое сетки Δ, примыкающем к границе. Бикубический сплайн $S_0(x,y)$ интерполирует набор данных

$$q_{ij} = z_{ij} - S_\Gamma(x_i, y_j) \quad (i = 0,1,\ldots,N;\ j = 0,1,\ldots,M) \qquad (2.6)$$

при нулевых граничных условиях (2.3) типа I ($p = 1$) и типа II ($p = 2$). При этом для удобства в (2.5) использовано обозначение

$$\bar{t}_l = \begin{cases} t_{l+1}, & l = -1; \\ t_{l-1}, & l > 2 . \end{cases}$$

Таким образом, мы пришли к задаче интерполирования набора q_{ij} бикубическим сплайном $S_0(x,y)$ при однородных граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^p S_0}{\partial x^p} = 0 \quad \text{при } i=0,N;\ j=0,1,\ldots,M; \\ &\frac{\partial^p S_0}{\partial y^p} = 0 \quad \text{при } i=0,1,\ldots,N;\ j=0,M; \\ &\frac{\partial^{2p} S_0}{\partial x^p \partial y^p} \quad \text{при } i=0,N;\ j=0,M;\ p=1,2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Для решения этой задачи введем функции:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j(x) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \sigma_i(x) u_{ij} \quad (j = -1,0,\ldots,M+1), \\ \beta_i(y) &= \sum_{j=-1}^{M+1} \sigma_j(y) u_{ij} \quad (i = -1,0,\ldots,N+1), \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

с помощью которых $S_0(x,y)$ можно записать в одной из двух форм:

$$\left.\begin{aligned} S_0(x,y) &= \sum_{j=-1}^{M+1} \sigma_j(y) \alpha_j(x), \\ S_0(x,y) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \sigma_i(x) \beta_i(y). \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

Значения $\alpha_j(x)$ и $\beta_i(y)$ в узлах и их производных будем обозначать через

$$\alpha_j^{(p)}(x_i) = \alpha_{ij}^{(p)}; \quad \beta_i^{(p)}(y_j) = \beta_{ij}^{(p)},$$

$$p = 0,1,2;\ i = -1,0,\ldots,N+1;\ j = -1,0,\ldots,M+1.$$

Используя, например, первую из формул (2.9) и второе из условий (2.7) для определения α_{ij}, получаем систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{i,-1} = -\frac{1}{\sigma_{-1}^{(p)}(y_0)} \cdot [\sigma_0^{(p)}(y_0)\alpha_{i0} + \sigma_1^{(p)}(y_0)\alpha_{i1}], \\ &\sigma_{j-1}(y_j)\alpha_{i,j-1} + \alpha_{ij} + \sigma_{j+1}(y_j)\alpha_{i,j+1} = q_{ij}, \\ &\alpha_{i,M+1} = -\frac{1}{\sigma_{M+1}^{(p)}(y_M)} \cdot [\sigma_M^{(p)}(y_M) + \sigma_{M-1}^{(p)}(y_M)\alpha_{i,M-1}], \\ &\qquad i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M. \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Дифференцируя первую из формул (2.9) p раз по x, с учетом (2.7), имеем $\alpha_j^{(p)}(x_n) = 0$, $j=0,1,\ldots,M$; $n=0,N$, что вместе с (2.8) дает систему алгебраических уравнений для определения u_{ij}

$$\left.\begin{aligned} &u_{-1,j} = -\frac{1}{\sigma_{-1}^{(p)}(x_0)} [\sigma_0^{(p)}(x_0) u_{0j} + \sigma_1^{(p)}(x_0) u_{1j}], \\ &\sigma_{i-1}(x_i) u_{i-1,j} + u_{i,j} + \sigma_{i+1}(x_i) u_{i+1,j} = \alpha_{ij}, \\ &u_{N+1,j} = -\frac{1}{\sigma_{N+1}^{(p)}(x_N)} [\sigma_N^{(p)}(x_N) u_{Nj} + \sigma_{N-1}^{(p)}(x_N) u_{N-1,j}], \\ &\qquad i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M, \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

причем типу I краевых условий всюду соответствует $p = 1$, а типу II – $p = 2$.

Таким образом, построение интерполяционного бикубического сплайна осуществляется в три этапа. На первом этапе строится бикубический сплайн $S_\Gamma(x,y)$, учитывающий граничные условия (2.3), и определяется набор q_{ij}. На втором этапе решается $(N + 1)$ система уравнений, каждая с трехдиагональной матрицей

(2.10), что эквивалентно построению частичного сплайна, и, наконец, на последнем этапе решается группа из $(M+1)$-й системы уравнений также с трехдиагональными матрицами, дающая искомое решение. Тем самым 9-диагональную матрицу системы для определения коэффициентов u_{ij} сплайна $S_0(x,y)$ мы представили в виде произведения двух клеточно-диагональных матриц, каждая клетка которых есть трехдиагональная матрица размера $(N+1)$ и $(M+1)$ соответственно.

Очевидным образом решение интерполирования можно записать и в терминах величин β_{ij}. Предложенный метод годится и в случае более общих граничных условий, а также в случае, когда $f(x,y)$ является периодической по одной или двум переменным. В периодическом случае, так же как и в одномерном варианте, можно получить более простые расчетные формулы за счет целесообразного выбора дополнительных узлов сеток $\bar{\Delta}_x, \bar{\Delta}_y$.

Отметим, что данный способ построения бикубического интерполяционного сплайна обладает тем преимуществом, что для решения задачи интерполирования необходимо решить $(M+N+6)$ систем уравнений или даже $(M+N+2)$ системы, если решение интересует нас в области $R_1:[a+h_1 \le x \le b-h_N;\ \ c+H_1 \le y \le d-H\ ]$, вместо $(2M+N+5)$ систем в методе, предложенном Ю.С.Завьяловым [3]. При этом для хранения интерполяционного сплайна в ЭВМ требуется в 4 раза меньше ячеек памяти.

Литература

1. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками (сплайнами). -В кн.: Вычислительные системы. Вып.38. Новосибирск, 1970, с.23-73.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами). Там же, с.74-100.

4. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. М., "Наука", 1973, с.249-252.

5. SCHOENBERG I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analitic functions. Parts A, B, Quart. Appl.Math. 1946, v.4, p.45-99,112-141.

Поступила в ред.-изд.отд.
2 июля 1976 года